

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Г.С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

ФИЗИЧЕСКИЕ
ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ
ЗВЕЗДНОЙ
ЭВОЛЮЦИИ



МОСКВА "НАУКА"

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1989

либо связанной со звездами проблемы, либо рассматривались интересные физические вопросы, возможно, не очень важные или с не вполне осознанной ролью для развития теории звездной эволюции. Критерий отбора был значительно мягче при изложении собственных результатов автора. Некоторые вопросы остаются в книге без ответа и включение их связано с надеждой на то, что у какого-нибудь читателя возникнет желание найти решение.

В книге рассмотрены пути эволюции только одиночных звезд. Теория эволюции звезд в тесных двойных системах, в которой разнообразие эволюционных путей неизмеримо возрастает, изложена в недавно вышедшей книге А.Г. Масевич и А.В. Тутукова "Эволюция звезд: теория и наблюдения" [156]. Там же рассматривается и связь теории с астрономическими наблюдениями.

Автор искренне благодарен С.И. Блинникову, С.А. Ламзину, А.Ф. Илларионову за полезные обсуждения и помощь, и, в особенности Э.В. Бугаеву и Д.Г. Яковлеву, которые прочитали отдельные главы и сделали много ценных замечаний.

ГЛАВА I

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

§ 1. Идеальный газ с излучением

Вещество большинства звезд имеет высокую температуру и сравнительно умеренную плотность. В этих условиях кинетическая энергия частиц много больше энергии взаимодействия между ними и модель нерелятивистского, невырожденного идеального газа оказывается хорошим приближением к реальности. Термодинамические свойства вещества планет, например, Земли, изучены гораздо хуже. Температура их при той же плотности значительно ниже и вещество находится в жидкой и твердой фазах, исследование которых сопряжено с существенными трудностями.

В недрах звезд вещество и излучение находятся в термодинамическом равновесии, которое устанавливается быстрыми процессами столкновений частиц, поглощением и испусканием фотонов. Излучение, наряду с газом, создает давление, противодействующее силе тяжести.

Вещество звезд состоит из различных химических элементов, основными из которых являются водород и гелий. На Солнце, например, они составляют в сумме более 98,5% плотности вещества. Остальная часть массы Солнца состоит из смеси практически всех стабильных изотопов таблицы Менделеева. В табл. 1 указано содержание наиболее обильных элементов, наблюдаемых на Солнце [5]. При изменении от центра до поверхности звезды температуры на три-четыре порядка и плотности на ~ 10 порядков изменяется состояние ионизации вещества.

В центральных областях звезд с $M \geq M_{\odot}$ все атомы практически полностью ионизованы.

Пусть i — номер химического элемента, который может находиться в различных состояниях ионизации от нейтрального ($j = 0$) до полностью ионизованного ($j = i$). Обозначим через ϵ_{ij} энергию связи j -кратно ионизованного иона элемента i , определяемую так, что для полностью ионизованного иона $\epsilon_{ii} = 0$. Удельная энергия E (эрг $\cdot$ г $^{-1}$), давление P (дин $\cdot$ см $^{-2}$) и удельная энтропия S (эрг $\cdot$ г $^{-1} \cdot$ К $^{-1}$) данной смеси атомов, ионов и электронов с излучением имеют вид [145]

$$E = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_u} + \frac{aT^4}{\rho} - \sum_i \sum_{j=0}^i \frac{x_i}{m_i} y_{ij} \epsilon_{ij}, \quad (1.1)$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_u} + \frac{1}{3} aT^4, \quad (1.2)$$

$$S = \frac{k}{\rho} \sum_i \sum_{j=0}^i n_{ij} \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[\left(\frac{m_i k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_{ij}}{n_{ij}} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{k}{\rho} n_e \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[\left(\frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{n_e} \right] \right\} + \frac{4}{3} \frac{a T^3}{\rho}. \quad (1.3)$$

Здесь использованы обозначения:

ρ — плотность,

T — температура,

$k = 1,38067 \cdot 10^{-16}$ эрг $\cdot$ К $^{-1}$ — постоянная Больцмана,

$\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-27}$ эрг $\cdot$ с — постоянная Планка,

$a = \pi^2 k^4 / 15 \hbar^3 c^3 = 7,565 \cdot 10^{-15}$ эрг $\cdot$ см $^{-3} \cdot$ К $^{-4}$ — постоянная плотности излучения,

$c = 2,9979 \cdot 10^{10}$ см $\cdot$ с $^{-1}$ — скорость света в вакууме,

x_i — массовая доля элемента с атомным номером i ,

Т а б л и ц а 1

Распространенность наиболее обильных химических элементов (Солнце, [5])

Элемент	Символ	Атомный номер	Атомная масса	Десятичный логарифм распространенности	
				по числу атомов	по массе
Водород	H	1	1,0080	12,00	12,00
Гелий	He	2	4,0026	10,93	11,53
Углерод	C	6	12,0111	8,52	9,60
Азот	N	7	14,0067	7,96	9,11
Кислород	O	8	15,9994	8,82	10,02
Неон	Ne	10	20,179	7,92	9,22
Натрий	Na	11	22,9898	6,25	7,61
Магний	Mg	12	24,305	7,42	8,81
Алюминий	Al	13	26,9815	6,39	7,78
Кремний	Si	14	28,086	7,52	8,97
Фосфор	P	15	30,9738	5,52	7,01
Сера	S	16	32,06	7,20	8,71
Хлор	Cl	17	35,453	5,6	7,2
Аргон	Ar	18	39,948	6,8	8,4
Кальций	Ca	20	40,08	6,30	7,90
Хром	Cr	24	51,996	5,85	7,57
Марганец	Mn	25	54,9380	5,40	7,14
Железо	Fe	26	55,847	7,60	9,35
Никель	Ni	28	58,71	6,30	8,07

Относительное содержание по массе:

Водород $X_H = 0,73$

Гелий $X_{He} = 0,25$

Прочие элементы $\sum x_i = 0,017$

Число нуклонов на ядро,

$\mu_H = 1,26$

Средняя атомная масса при полной ионизации

$\mu = 0,60$

y_{ij} — степень j -кратной ионизации i -го элемента, так что $\sum_{j=0}^i y_{ij} = 1$,
 $m_i \approx A_i m_u$ — масса ядра атома с номером i и атомной массой $A_i \geq 4$,
 $m_u = 1,66057 \cdot 10^{-24}$ г — атомная единица массы, равная 1/12 массы
 изотопа ^{12}C ,
 $m_e = 9,10953 \cdot 10^{-28}$ г — масса электрона*),

$n_{ij} = x_i \rho y_{ij} / m_i \text{ см}^{-3}$ — концентрация ионов элемента i в j -м состоянии ионизации, (1.4)

g_{ij} — статистический вес иона i -го элемента в j -м состоянии ионизации,

$n_e = \sum_i \sum_{j=1}^i j n_{ij} \text{ см}^{-3}$ — концентрация электронов в условиях электронной-
 тральности, (1.5)

$\mu = \left[\sum_i \frac{m_u}{m_i} x_i \sum_{j=0}^i (1+j) y_{ij} \right]^{-1}$ — количество нуклонов на одну части-
 цу газа (средняя атомная масса). (1.6)

В полностью ионизованном газе, состоящем из водорода, гелия и других элементов с $A_i \approx 2i \geq 1$, имеем

$$\mu = \left[2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \frac{1}{2} x_A \right]^{-1}, \quad x_A = \sum_{i \geq 6} x_i, \quad m_{\text{He}} \approx 4m_u, \quad m_{\text{H}} \approx m_u. \quad (1.7)$$

Энергия в (1.1) отсчитывается от энергии покоя полностью ионизованных ионов и электронов. Степени ионизации элементов в термодинамическом равновесии определяются формулой Саха [145]

$$\frac{y_{i,j-1}}{y_{i,j}} = n_e \frac{g_{i,j-1}}{2g_{ij}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} e^{I_{ij}/kT} = n_e K(T). \quad (1.8)$$

Здесь $I_{ij} = \epsilon_{i,j-1} - \epsilon_{ij}$ — энергия (потенциал) ионизации j -го электрона, $I_{i0} = 0$. Энергии ионизации наиболее обильных элементов приведены в табл. 2. Для нахождения степени ионизации элементов в смеси необходимо решить систему уравнений (1.8) с учетом (1.4), (1.5). Аналитическое решение получается в случае однократной ионизации одного (i -го) сорта атомов

$$n_e = n_{i1} = \frac{\rho}{m_i} y_{i1}, \quad y_{i0} = 1 - y_{i1},$$

$$\frac{1 - y_{i1}}{y_{i1}^2} = \frac{\rho}{m_i} \frac{g_{i0}}{2g_{i1}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} e^{I_{i1}/kT} = F_{\rho, T},$$

откуда

$$y_{i1} = \left(\frac{1}{4F_{\rho, T}^2} + \frac{1}{F_{\rho, T}} \right)^{1/2} - \frac{1}{2F_{\rho, T}}. \quad (1.9)$$

*) $m_p = 1,67265 \cdot 10^{-24}$ — масса протона, $m_n = 1,67495 \cdot 10^{-24}$ г — масса нейтрона, $m_D/m_u = 2,01410$, $m_3\text{H}/m_u = 3,01605$, $m_3\text{He}/m_u = 3,01603$, — относительные массы атомов дейтерия, трития и гелия-3. Константы взяты из [5, 180].

Потенциалы ионизации и полные моменты внешних электронных оболочек наиболее обильных элементов [180].

Атомный номер	Элемент	Потенциалы ионизации, эВ	Полные моменты
1	H ⁺ , H	0,747; 13,5985	0; 1/2
2	He	24,5876; 54,418	0; 1/2; 0
6	C	11,260; 24,284; 47,89; 64,49	0; 1/2; 0; 1/2
7	N	14,534; 29,602; 47,45; 77,47	3/2; 0; 1/2; 0
8	O	13,618; 35,118; 54,94; 77,41	2; 3/2; 0; 1/2
10	Ne	21,565; 40,964; 63,46; 97,12	0, 3/2; 2; 3/2
11	Na	5,1391; 47,287; 71,64; 98,92	1/2; 0; 3/2; 2
12	Mg	7,646; 15,035; 80,15; 109,2	0, 1/2; 0; 3/2
13	Al	5,9858; 18,828; 28,448; 120	1/2; 0; 1/2; 0
14	Si	8,152; 16,346; 33,493; 45,14	0; 1/2; 0; 1/2
15	P	10,49; 19,73; 30,18; 51,47	3/2; 0; 1/2; 0
16	S	10,36; 23,33; 34,83; 47,31	2; 3/2; 0; 1/2
17	Cl	12,968; 23,81; 39,61; 53,47	3/2; 2; 3/2; 0
18	Ar	15,760; 27,63; 40,74; 59,81	0; 3/2; 2; 3/2
20	Ca	6,113; 11,872; 50,91; 67,10	0; 1/2; 0; 3/2
24	Cr	6,766; 16,50; 30,96; 49	3; 5/2; 0; 3/2
25	Mn	7,4368; 15,640; 33,67; 51,2	5/2; 2; 5/2; 0
26	Fe	7,87; 16,18; 30,65; 54,8	4; 9/2; 4; 5/2
28	Ni	7,63; 18,17; 35,2; 54,9	4; 5/2; 4; 9/2
1 эв = 11,604 К		$X_0; X_+; X_{++}; X_{+++}$	$X_0; X_+; X_{++}; X_{+++}$

При исследовании звездной эволюции часто необходимо знать значения адиабатических показателей

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S, \quad \gamma_2 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S, \quad \gamma_3 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S$$

и теплоемкостей

$$c_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\rho, \quad c_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P.$$

В условиях неполной ионизации все величины рассчитываются численно, для чего их удобно выразить через производные

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T, \quad \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_\rho = c_v.$$

Вспользуемся известными свойствами якобианов

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \frac{\partial(t, s)}{\partial(x, y)}; \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, u)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_v. \quad (1.10)$$

Получаем

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T - \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T / \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_\rho, \quad (1.11)$$

$$\gamma_2 = \left[\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho - \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_\rho / \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T \right]^{-1}, \quad (1.12)$$

$$\gamma_3 = - \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T / \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_\rho, \quad (1.13)$$

$$c_v = (\partial S / \partial \ln T)_\rho, \quad (1.14)$$

$$c_p = c_v - \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho / \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T, \quad (1.15)$$

$$c_p / c_v = \gamma_1 / \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T. \quad (1.16)$$

Производные от энтропии выражаются через производные от энергии и давления из первого закона термодинамики и условия полноты дифференциала свободной энергии $F = E - TS$:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_\rho = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial \ln T} \right)_\rho, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T = - \frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial P}{\partial \ln T} \right)_\rho. \quad (1.17)$$

Если степени ионизации y_{ij} постоянны, то из (1.3) – (1.6) следует

$$S = \frac{k}{\mu m_u} \ln(T^{3/2}/\rho) + \frac{4}{3} \frac{a T^3}{\rho} + \text{const} \quad (1.18)$$

и все производные вычисляются аналитически:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T &= \beta_g, \quad \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho = 4 - 3\beta_g, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \ln \rho} \right)_T &= - \frac{P}{\rho T} (4 - 3\beta_g), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_\rho = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho T} (8 - 7\beta_g). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь $\beta_g = P_g/P$ – отношение газового давления к полному. Выражения для адиабатических показателей и теплоемкостей одноатомного газа с $\mu = \text{const}$ и излучения принимают вид [218]

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_g + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta_g)^2}{8 - 7\beta_g}, \quad \gamma_2 = \left[4 - 3\beta_g + \frac{3}{2} \beta_g \frac{8 - 7\beta_g}{4 - 3\beta_g} \right]^{-1}, \\ \gamma_3 &= \frac{2}{3} \frac{4 - 3\beta_g}{8 - 7\beta_g}, \\ c_v &= \frac{3}{2} \frac{P}{\rho T} (8 - 7\beta_g), \quad c_p = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho T} (8 - 7\beta_g) \left[1 + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta_g)^2}{\beta_g (8 - 7\beta_g)} \right], \\ \frac{c_p}{c_v} &= 1 + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta_g)^2}{\beta_g (8 - 7\beta_g)} = \gamma_1 / \beta_g. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Соотношения (1.18)–(1.20) широко применяются при описании звездной материи, так как основная часть массы звезд находится в состоянии полной ионизации с $\mu = \text{const}$. В оболочках звезд, где температура меньше, вещество ионизовано не полностью и $\mu = \mu(\rho, T)$.

Задача. Вывести уравнения для концентраций электронов в плазме, состоящей из H^0 , H^+ , H^- , He^0 , He^+ , He^{++} , а также атомов и однократно ионизованных ионов k других элементов.

Решение. Используя формулу Саха (1.8) и табл. 2, получаем для водорода

$$y_{\text{H}^0} = \frac{4}{n_e} \left(\frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{0,747}{T_3}} y_{\text{H}^-} \equiv \frac{y_{\text{H}^-}}{n_e} Q_{\text{H}^0}, \quad g_{\text{H}^0} = 4, \quad (1)$$

$$y_{\text{H}^+} = \frac{1}{n_e} \left(\frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{13,6}{T_3}} y_{\text{H}^0} \equiv \frac{y_{\text{H}^0}}{n_e} Q_{\text{H}^+} = \frac{y_{\text{H}^-}}{n_e^2} Q_{\text{H}^0} Q_{\text{H}^+}.$$

Используя условие $y_{\text{H}^-} + y_{\text{H}^0} + y_{\text{H}^+} = 1$, имеем

$$y_{\text{H}^-} = n_e^2 (n_e^2 + n_e Q_{\text{H}^0} + Q_{\text{H}^0} Q_{\text{H}^+})^{-1}. \quad (2)$$

Аналогично для гелия получаем

$$y_{\text{He}^0} = n_e^2 (n_e^2 + n_e Q_{\text{He}^+} + Q_{\text{He}^+} Q_{\text{He}^{++}})^{-1},$$

$$y_{\text{He}^+} = \frac{y_{\text{He}^0}}{n_e} Q_{\text{He}^+}, \quad y_{\text{He}^{++}} = \frac{y_{\text{He}^0}}{n_e^2} Q_{\text{He}^{++}} Q_{\text{He}^+}, \quad (3)$$

где

$$Q_{\text{He}^+} = 4 \left(\frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{24,6}{T_3}}, \quad Q_{\text{He}^{++}} = \left(\frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{54,4}{T_3}} \quad (4)$$

и для тяжелых элементов

$$y_{j^+} = \frac{Q_{j^+}}{n_e + Q_{j^+}}, \quad Q_{j^+} = 2 \frac{g_{j^+}}{g_{j^0}} \left(\frac{m_e k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{I_{j1}}{kT}}. \quad (5)$$

Здесь T_3 — температура в электронвольтах. Используя соотношение (1.4) для каждого элемента и условие электронейтральности (1.5)

$$n_{\text{H}^+} + n_{\text{He}^+} + 2n_{\text{He}^{++}} + \sum_{j=1}^k n_{j^+} = n_e + n_{\text{H}^-},$$

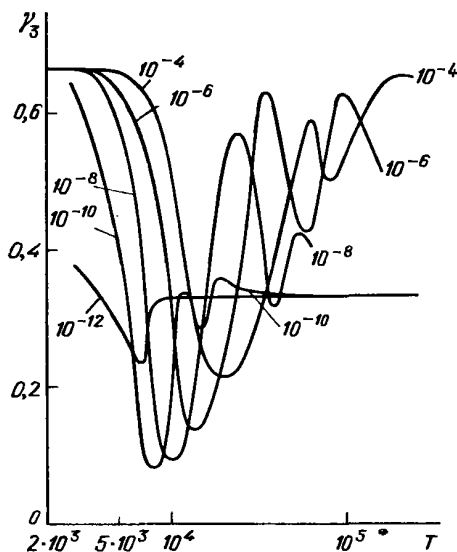
получаем уравнение для приведенной электронной концентрации

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{m_u}{\rho} n_e, \\ x_{\text{H}} \frac{Q_{\text{H}^0} Q_{\text{H}^+} - x_e^2}{x_e^2 + x_e Q_{\text{H}^0} + Q_{\text{H}^0} Q_{\text{H}^+}} &+ \frac{x_{\text{He}}}{4} \frac{x_e Q_{\text{He}^+} + 2Q_{\text{He}^+} Q_{\text{He}^{++}}}{x_e^2 + x_e Q_{\text{He}^+} + Q_{\text{He}^+} Q_{\text{He}^{++}}} + \\ &+ \sum_{j=0}^k x_j \frac{m_u}{m_j} \frac{q_{j^+}}{x_e + q_{j^+}} = x_e. \end{aligned} \quad (6)$$

Рис. 1. Зависимости $\gamma_3(T)$ при $\rho = \text{const}$, указанных на кривых, для нормального состава (табл. 1) в области, где происходит ионизация водорода и гелия

Здесь $q_i = m_i Q_i / \rho$. Все величины в (6) безразмерны и близки к единице, что удобно для численного решения.

После нахождения степеней ионизации в зависимости от ρ и T , можно вычислить термодинамические функции и их производные. На рис. 1 в качестве примера такого расчета приведена зависимость $\gamma_3(\rho, T)$ для смеси с составом $x_H = 0,75$, $x_{He} = 0,22$ и солнечным соотношением между другими элементами (табл. 1). Два минимума на кривых $\gamma_3 |_\rho(T)$ соответствуют областям ионизации водорода и первой ионизации гелия. При малой плотности $\rho = 10^{-12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ второй минимум попадает в область преобладания давления излучения и потому не заметен.



§ 2. Релятивистский газ с учетом вырождения

В центральных областях звезд, находящихся на поздних стадиях эволюции, а также при взрывах сверхновых кинетическая энергия электронов может стать порядка их энергии покоя, т.е. скорости их приближаются к скорости света:

$$kT \sim m_e c^2, \quad \langle v_e \rangle \sim c. \quad (2.1)$$

При вычислении термодинамических функций необходимо тогда использовать полные релятивистские выражения для энергии и импульса электронов. С другой стороны, плотности могут вырасти настолько, что среднее число частиц в ячейке фазового пространства приближается к единице. При этом необходимо учитывать принцип Паули для электронов (спин = 1/2), число которых в ячейке фазового пространства равно либо нулю, либо единице. Среднее число электронов с энергией ϵ в ячейке задается функцией Ферми [145]

$$f_e = \left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \mu_{te}}{kT}\right) \right]^{-1}, \quad (2.2)$$

где μ_{te} — химический потенциал электронов,

$$\epsilon = (m_e^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}, \quad p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ — импульс электрона.} \quad (2.3)$$

Термодинамические функции находятся с помощью интегралов по импульсному пространству (с учетом статистического веса $g_e = 2$) [145]:

$$n_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f_e p^2 dp, \quad (2.4)$$

$$E_e = \frac{2}{\rho} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f_e \epsilon p^2 dp, \quad (2.5)$$

$$P_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{3} \int_0^\infty f_e p v \cdot p^2 dp, \quad v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2}}, \quad (2.6)$$

$$S_e = - \frac{2}{\rho} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} k \int_0^\infty [f_e \ln f_e + (1 - f_e) \ln (1 - f_e)] p^2 dp, \quad (2.7)$$

После преобразования интегралов и введения безразмерных величин

$$x = \frac{pc}{kT}, \quad \alpha = \frac{m_e c^2}{kT} = \frac{5,93013 \cdot 10^9 \text{ К}}{T}, \quad \beta = \frac{\mu_{te}}{kT} \quad (2.8)$$

получим

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 I_{n-}, \quad E_e = \frac{1}{\pi^2 \rho} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 kT I_{E-}, \\ P_e &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 kT I_{P-}, \\ S_e &= \frac{k}{\pi^2 \rho} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \left(I_{E-} - \beta I_{n-} + \frac{1}{3} I_{P-} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} I_{n-} &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \beta)}, \quad I_{P-} = \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} [1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \beta)]}, \\ I_{E-} &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} x^2 dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \beta)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Когда $kT \geq 0,1 m_e c^2$, в термодинамическом равновесии необходимо учитывать позитроны. Аннигиляция пары $e^- e^+$ приводит к рождению фотонов, химический потенциал которых в равновесии равен нулю, $\mu_\Phi = 0$. Из условия равновесия аннигиляции $\mu_{te} + \mu_{te^+} = \mu_\Phi = 0$ следует равенство

$$\mu_{te^+} = -\mu_{te}. \quad (2.11)$$

Термодинамические функции для позитронов получаются из (2.9), где следует заменить β на $-\beta$ и использовать интегралы I_{i+} , $i = n, E, P$, получаемые из I_{i-} в (2.10) заменой β на $-\beta$. Нуклоны и ядра часто можно считать невырожденными и нерелятивистскими, поэтому для них, вместе

излучением, имеем

$$E_{N,r} = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu_N m_u} + \frac{aT^4}{\rho}, \quad (2.12)$$

$$P_{N,r} = \frac{\rho kT}{\mu_N m_u} + \frac{aT^4}{3}, \quad (2.13)$$

$$S_{N,r} = \frac{k}{\rho} \sum_i n_i \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[\left(\frac{m_i kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_i}{n_i} \right] \right\} + \frac{4}{3} \frac{aT^3}{\rho}. \quad (2.14)$$

Здесь рассмотрено полностью ионизованное вещество. Если ядерные реакции не идут и весовые доли элементов неизменны ($x_i = \text{const}$), то аналогично (1.18) имеем

$$S_N = \frac{k}{\mu_N m_u} \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + \text{const}. \quad (2.15)$$

В (2.12)–(2.15) использована величина

$$\mu_N = \left(\sum_i \frac{x_i}{A_i} \right)^{-1}, \quad (2.16)$$

равная среднему числу нуклонов в ядре. Для получения полных выражений термодинамических функций P , E и S необходимо просуммировать соответствующие выражения для электронов, позитронов, ядер и излучения. Заряд ядер связан с избытком электронов над позитронами. Имеем

$$\frac{\rho}{\mu_Z m_u} = n_{e^-} - n_{e^+}, \quad \mu_Z = \left(\sum_i \frac{Z_i x_i}{A_i} \right)^{-1} - \text{число нуклонов на один электрон}. \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) с учетом (2.9), (2.10) служит для нахождения зависимости $\mu_{te}(\rho, T)$. Для случая полной ионизации при $y_{ii} = 1$, $i = Z$ имеем из (1.6), (2.16) и (2.17)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_Z} \quad (2.18)$$

В данном параграфе отсчет энергии ведется от энергии покоя ядер, которая в отсутствии ядерных превращений остается неизменной.

Рассмотрим предельные случаи формул (2.9).

а) Сильное вырождение. При нулевой температуре электроны заполняют фазовое пространство вплоть до граничного импульса Ферми p_{Fe} . Плотность электронов равна удвоенному (за счет статистического веса) числу ячеек в сферической области фазового пространства радиусом p_{Fe} :

$$n_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_{Fe}^3 = \frac{p_{Fe}^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.19)$$

С учетом (2.17) получаем в отсутствие позитронов

$$p_{Fe} = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{1/3} \hbar = \left(\frac{1,027 \rho}{10^6 \mu_Z} \right)^{1/3} m_e c. \quad (2.20)$$

Кинетическая энергия электрона на границе фазовой области называется энергией Ферми:

$$\epsilon_{Fe} = (m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2)^{1/2} - m_e c^2 = m_e c^2 (\sqrt{1 + y^2} - 1), \quad y = \frac{p_{Fe}}{m_e c}, \quad (2.21)$$

$$\rho = \frac{m_e^3 c^3 \mu_Z m_u}{3 \pi^2 \hbar^3} y^3 = 9,740 \cdot 10^5 \mu_Z \left[\left(\frac{\epsilon_{Fe}}{m_e c^2} + 1 \right)^2 - 1 \right]^{3/2}.$$

Учтя, что $f_e = 1$ при $p < p_{Fe}$ и $f_e = 0$ при $p > p_{Fe}$, получаем из (2.5), (2.6)

$$E_e = \frac{2}{\rho} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{Fe}} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} p^2 dp =$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3 \rho} g(y) = \frac{6,002 \cdot 10^{22}}{\rho} g(y), \quad (2.22)$$

$$P_e = \frac{2}{3} \frac{4\pi c}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{Fe}} (p^2 + m_e^2 c^2)^{-1/2} p^4 dp = \frac{m_e^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3} f(y),$$

где

$$f(y) = y(2y^2 - 3)\sqrt{y^2 + 1} + 3 \operatorname{Arsh} y,$$

$$g(y) = 3y(2y^2 + 1)\sqrt{y^2 + 1} - 3 \operatorname{Arsh} y, \quad (2.23)$$

$$g(y) + f(y) = 8y^3 \sqrt{y^2 + 1}.$$

Температурные поправки при сильном вырождении находятся из разложения общих формул с помощью соотношения [145]

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u) du}{e^{u-u_0} + 1} = \int_0^{u_0} \varphi(u) du + \frac{\pi^2}{6} \varphi'(u_0) + \frac{7\pi^4}{360} \varphi'''(u_0) + \dots, \quad (2.24)$$

которое справедливо при $e^{-u_0} \ll 1$. Обозначая $u = \sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha$, $u_0 = \beta - \alpha$ и пренебрегая вкладом позитронов $\sim e^{-u_0}$, получаем [166] из (2.9) – (2.10)

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \left[y_1^3 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 y_1} \left(y_1^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{7\pi^4}{40\alpha^4 y_1^5} + \dots \right], \quad (2.25)$$

$$E_e = \frac{m_e^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3 \rho} \left[g(y_1) + \frac{4\pi^2}{\alpha^2 y_1} (3y_1^2 + 1) \sqrt{y_1^2 + 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{7\pi^4}{5\alpha^4 y_1^5} (2y_1^4 - y_1^2 + 1) \sqrt{y_1^2 + 1} + \dots \right], \quad (2.26)$$

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{24 \pi^2 \hbar^3} \left[f(y_1) + \frac{4\pi^2}{\alpha^2} y_1 \sqrt{y_1^2 + 1} + \frac{7\pi^4}{15\alpha^4 y_1^3} (2y_1^2 - 1) \sqrt{y_1^2 + 1} + \dots \right]. \quad (2.27)$$

$$S_e = \frac{m_e^2 c}{3 \hbar^3 \rho} k^2 T \left[y_1 \sqrt{y_1^2 + 1} + \frac{7\pi^2}{15\alpha^2 y_1^3} \left(y_1^2 - \frac{1}{2} \right) \sqrt{y_1^2 + 1} + \dots \right]. \quad (2.28)$$

Здесь $y_1 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}/\alpha$, параметр разложения $\alpha y_1 \gg 1$, а функции $\varphi(u)$ после сведения интегралов (2.10) к виду (2.24) равны $\varphi_n = (u + \alpha)\sqrt{u^2 + 2u\alpha}$, $\varphi_E = (u + \alpha)^2\sqrt{u^2 + 2u\alpha}$, $\varphi_P = (u^2 + 2u\alpha)^{3/2}$. Найдем явную зависимость E_e , P_e и S_e от ρ и T , оставляя только члены $\sim \alpha^{-2}$. Используя определение y из (2.20), (2.21) и соотношение (2.25), получаем связь между y , y_1 и α :

$$y = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c}, \quad y^3 = y_1^3 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 y_1} \left(y^2 + \frac{1}{2} \right). \quad (2.29)$$

Учтя малость $(y^3 - y_1^3)$, получим

$$y_1^3 = y^3 - \frac{\pi^2}{\alpha^2 y} \left(y^2 + \frac{1}{2} \right).$$

После подстановки $y_1(y)$ в (2.23), (2.25) – (2.28) имеем

$$g(y_1) = g(y) - \frac{8\pi^2}{\alpha^2 y} \left(y^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{y^2 + 1},$$

$$f(y_1) = f(y) - \frac{8\pi^2}{3\alpha^2} \left(y^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

и явные выражения термодинамических функций

$$E_e = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3 \rho} \left[g(y) + \frac{4\pi^2}{\alpha^2} y \sqrt{y^2 + 1} \right],$$

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3 \rho} \left[f(y) + \frac{4\pi^2}{3\alpha^2} y \frac{y^2 + 2}{\sqrt{y^2 + 1}} \right], \quad (2.30)$$

$$S_e = \frac{m_e^2 c}{3\hbar^3 \rho} k^2 T y \sqrt{y^2 + 1}.$$

В предельных случаях функции f и g равны

$$f(y) \approx \frac{8}{5} y^5 \left(1 - \frac{5}{14} y^2 \right), \quad g(y) \approx 8y^3 + \frac{12}{5} y^5 \left(1 - \frac{5}{28} y^2 \right) \text{ при } y \ll 1, \quad (2.31)$$

и

$$f(y) \approx 2y^4 \left(1 - \frac{1}{y^2} \right), \quad g(y) \approx 6y^4 \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) \text{ при } y \gg 1.$$

Учтя (2.31), в нерелятивистском пределе $y \ll 1$ получаем из (2.30)

$$E_e = \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u} + \frac{m_e^4 c^5}{10\pi^2 \hbar^3 \rho} y^5 \left(1 - \frac{5}{28} y^2 + \frac{5\pi^2}{3\alpha^2 y^4} \right) \quad (2.32)$$

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{15\hbar^3 \pi^2} y^5 \left(1 - \frac{5}{14} y^2 + \frac{5\pi^2}{3\alpha^2 y^4} \right).$$

В ультрарелятивистском пределе $y \gg 1$ соответственно имеем

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{m_e^4 c^5}{4\pi^2 \hbar^3 \rho} y^4 \left(1 + \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2} \right), \\ P_e &= \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} y^4 \left(1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2} \right), \\ S_e &= \frac{m_e^2 c}{3\hbar^3 \rho} k^2 T y^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

б) **Очень малая плотность вещества.** Плотность вещества может быть настолько малой, что концентрация пар превысит концентрацию исходных электронов. В этом случае малым параметром является величина $\beta \ll 1$; при $\beta = 0$ имеет место $n_e = n_{e+}$. Разлагая (2.10) в ряд по β , получим, используя интегрирование по частям,

$$\begin{aligned} I_{n\mp} &= I_2 \pm \beta I_1, \quad I_{p\mp} = I_3 \pm 3\beta I_2 + \frac{3}{2} \beta^2 I_1, \\ I_{E\mp} &= I_4 \pm \beta (\alpha^2 I_0 + 3I_2) + \frac{\beta^2}{2} I_5, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} I_0(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{dx}{1 + \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \\ I_1(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{(2x^2 + \alpha^2) dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} (1 + \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2})}, \\ I_2(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \\ I_3(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} (1 + \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2})}, \\ I_4(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx}{1 + \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \\ I_5(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{(3x^2 + \alpha^2) \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2}}{(1 + \exp \sqrt{x^2 + \alpha^2})^2} dx. \end{aligned} \quad (2.35)$$

При $\alpha = 0$ интегралы (2.35) выражаются [145] через Γ -функцию и ξ -функцию Римана с помощью соотношения

$$F_\nu(0) = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{1 + e^x} = (1 - 2^{1-\nu}) \Gamma(\nu) \xi(\nu), \quad \nu > 0 \quad (2.36)$$

формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \ln 2.$$

учитывая для целых $\nu = n$ значения $\zeta(n)$ из [145] и $\Gamma(n) = (n-1)!$, получаем

$$\begin{aligned} I_0(0) &= \ln 2; \quad I_1(0) = \frac{\pi^2}{6}; \quad I_2(0) = \frac{3}{2} \zeta(3) = 1,80308; \\ I_3(0) &= I_4(0) = \frac{7\pi^4}{120}; \quad I_5(0) = 3I_1(0) = \pi^2/2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

С учетом (2.34)–(2.37) и определения y в (2.29), термодинамические функции с учетом (2.9), (2.17) примут вид

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{y^3 \alpha^3}{\pi^2 A_2}, \quad n_{e\mp} = \frac{15}{\pi^4} I_2(0) \frac{aT^3}{k} A_1 \left(1 \pm \frac{1}{6I_2(0)} \frac{y^3 \alpha^3}{A_1} \right), \\ E_{e-} + E_{e+} &= \frac{7}{4} \frac{aT^4}{\rho} B_0 \left(1 + \frac{30}{7\pi^6} \frac{B_2}{B_0 A_2^2} y^6 \alpha^6 \right), \\ P_{e-} + P_{e+} &= \frac{7}{12} aT^4 A_0 \left(1 + \frac{30}{7\pi^6} \frac{y^6 \alpha^6}{A_0 A_2} \right), \\ S_{e-} + S_{e+} &= \frac{7}{3} \frac{aT^3}{\rho} \frac{3B_0 + A_0}{4} \left(1 + \frac{15}{7\pi^6} \frac{6B_2 - 2A_2}{3B_0 + A_0} \frac{y^6 \alpha^6}{A_2^2} \right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где введены функции

$$\begin{aligned} A_0(\alpha) &= \frac{120}{7\pi^4} I_3(\alpha), \quad A_2(\alpha) = \frac{6}{\pi^2} I_1(\alpha), \\ B_0(\alpha) &= \frac{120}{7\pi^4} I_4(\alpha), \quad B_2(\alpha) = \frac{2}{\pi^2} I_5(\alpha), \\ A_1(\alpha) &= \frac{I_2(\alpha)}{I_2(0)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В случае ультрарелятивистских пар $\alpha \ll 1$ для (2.39) имеют место асимптотические представления [166]

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{15}{7\pi^2} \alpha^2, \quad A_2 = 1 - \frac{3}{2\pi^2} \alpha^2, \\ B_0 &= 1 - \frac{5}{7\pi^2} \alpha^2, \quad B_2 = 1 - \frac{1}{2\pi^2} \alpha^2, \\ A_1 &= 1 - \frac{\ln 2}{2I_2(0)} \alpha^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из (2.38) – (2.40) получаем термодинамические функции вблизи ультрарелятивистских пар в газе малой плотности

$$\begin{aligned} n_{\mp} &= \frac{15}{\pi^4} I_2(0) \frac{aT^3}{k} \left(1 - \frac{\ln 2}{2I_2(0)} \alpha^2 \pm \frac{1}{6I_2(0)} y^3 \alpha^3 \right), \\ E_{e-} + E_{e+} &= \frac{7}{4} \frac{aT^4}{\rho} \left(1 - \frac{5}{7\pi^4} \alpha^2 + \frac{30}{7\pi^6} y^6 \alpha^6 \right), \\ P_{e-} + P_{e+} &= \frac{7}{12} aT^4 \left(1 - \frac{15}{7\pi^4} \alpha^2 + \frac{30}{7\pi^6} y^6 \alpha^6 \right), \\ S_{e-} + S_{e+} &= \frac{7}{3} \frac{aT^3}{\rho} \left(1 - \frac{15}{14\pi^4} \alpha^2 + \frac{15}{7\pi^6} y^6 \alpha^6 \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

В нерелятивистском пределе $\alpha \gg 1$, оставляя два члена при разложении знаменателя в (2.35), имеем [93]

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{360}{7\pi^4} \alpha^2 \left[K_2(\alpha) - \frac{1}{4} K_2(2\alpha) \right], \\ B_0 &= \frac{120}{7\pi^4} \alpha^2 \left[\alpha K_1(\alpha) + 3K_2(\alpha) - \frac{\alpha}{2} K_1(2\alpha) - \frac{3}{4} K_2(2\alpha) \right], \\ A_1 &= \frac{\alpha^2}{I_2(0)} \left[K_2(\alpha) - \frac{1}{2} K_2(2\alpha) \right], \quad A_2 = \frac{6\alpha^2}{\pi^4} [K_2(\alpha) - K_2(2\alpha)], \\ B_2 &= \frac{2\alpha^2}{\pi^2} [\alpha K_1(\alpha) + 3K_2(\alpha) - 2\alpha K_1(2\alpha) - 3K_2(2\alpha)], \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $K_n(\alpha)$ – функции Бесселя мнимого аргумента (Ганкеля), имеющие разложения при $\alpha \gg 1$ [93]:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \left(1 + \frac{3}{8\alpha} - \frac{15}{128\alpha^2} \right), \\ K_2(\alpha) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \left(1 + \frac{15}{8\alpha} + \frac{105}{128\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

В табл. 3 приведены значения функций $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$ для $0 \leq \alpha \leq 10$, полученные численным интегрированием в [167].

в) Слабое вырождение. Слабое вырождение соответствует $f_e \ll 1$ в (2.2). Тогда в интегралах (2.10) можно провести разложение в ряд, воспользовавшись большим значением экспоненты в знаменателе. Оставляя два первых члена разложения, получаем [218, 166, 363, 93]

$$\begin{aligned} I_{n\mp} &= \alpha^2 \left[K_2(\alpha) e^{\pm\beta} - \frac{1}{2} K_2(2\alpha) e^{\pm 2\beta} \right], \\ I_{P\mp} &= 3\alpha^2 \left[K_2(\alpha) e^{\pm\beta} - \frac{1}{4} K_2(2\alpha) e^{\pm 2\beta} \right], \\ I_{E\mp} &= \alpha^3 \left[K_1(\alpha) e^{\pm\beta} + \frac{3}{\alpha} K_2(\alpha) e^{\pm\beta} - \frac{1}{2} K_1(2\alpha) e^{\pm 2\beta} - \frac{3}{4\alpha} K_2(2\alpha) e^{\pm 2\beta} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Таблица 3

Значение функций $A_f(\alpha)$, $B_f(\alpha)$ для $0 \leq \alpha \leq 10$

α	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,50	9,4989 (-1)	9,5476 (-1)	9,6299 (-1)	9,8119 (-1)	9,8342 (-1)	9,8702 (-1)
1,00	8,2749 (-1)	8,4020 (-1)	8,6278 (-1)	9,2303 (-1)	9,3130 (-1)	9,4529 (-1)
1,50	6,7622 (-1)	6,9345 (-1)	7,2532 (-1)	8,3028 (-1)	8,4519 (-1)	8,7168 (-1)
2,00	5,2709 (-1)	5,4480 (-1)	5,7846 (-1)	7,1580 (-1)	7,3497 (-1)	7,7039 (-1)
2,50	3,9653 (-1)	4,1217 (-1)	4,4246 (-1)	5,9438 (-1)	6,1464 (-1)	6,5311 (-1)
3,00	2,9030 (-1)	3,0290 (-1)	3,2762 (-1)	4,7800 (-1)	4,9689 (-1)	5,3345 (-1)
3,50	2,0806 (-1)	2,1764 (-1)	2,3656 (-1)	3,7418 (-1)	3,9040 (-1)	4,2216 (-1)
4,00	1,4661 (-1)	1,5360 (-1)	1,6748 (-1)	2,8635 (-1)	2,9949 (-1)	3,2544 (-1)
4,50	1,0189 (-1)	1,0685 (-1)	1,1675 (-1)	2,1497 (-1)	2,2520 (-1)	2,4549 (-1)
5,00	7,0003 (-2)	7,3461 (-2)	8,0361 (-2)	1,5877 (-1)	1,6650 (-1)	1,8188 (-1)
5,50	4,7634 (-2)	5,0006 (-2)	5,4746 (-2)	1,1563 (-1)	1,2133 (-1)	1,3271 (-1)
6,00	3,2147 (-2)	3,3756 (-2)	3,6973 (-2)	8,3190 (-2)	8,7329 (-2)	9,5597 (-2)
7,00	1,4345 (-2)	1,5066 (-2)	1,6510 (-2)	4,1752 (-2)	4,3848 (-2)	4,8039 (-2)
8,00	6,2613 (-3)	6,5769 (-3)	7,2085 (-3)	2,0259 (-2)	2,1280 (-2)	2,3321 (-2)
9,00	2,6856 (-3)	2,8211 (-3)	3,0922 (-3)	9,5667 (-3)	1,0049 (-2)	1,1014 (-2)
10,0	1,1356 (-3)	1,1929 (-3)	1,3076 (-3)	4,4175 (-3)	4,6404 (-3)	5,0864 (-3)

В данной и последующих таблицах в скобках указан порядок величины

Из (2.17) имеем с нужной точностью, учтя (2.44) и величину y из (2.29),

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \beta &= \frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} \left[1 + \frac{K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} \right], \\ \operatorname{ch} \beta &= \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} + \frac{K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}, \\ \operatorname{ch} 2\beta &= 1 + 2 \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}, \quad \operatorname{sh} 2\beta = \frac{\alpha y^3}{3K_2(\alpha)} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}}, \\ \beta &= \ln \left[\frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} \right] + \frac{K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} \quad *) \end{aligned} \quad (2.45)$$

При выводе (2.45) использовалась малость членов, содержащих $K_2(2\alpha)$, которые учитывают слабое вырождение. С помощью (2.44), (2.45) получаем из (2.9)

$$\begin{aligned} n_{e-} + n_{e+} &= \frac{6\rho}{\mu_Z m_u y^3} \left[\frac{K_2(\alpha)}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} - \frac{K_2(2\alpha)}{2\alpha} \right], \\ E_{e-} + E_{e+} &= \frac{6kT}{\mu_Z m_u y^3} \left\{ \left[K_1(\alpha) + \frac{3}{\alpha} K_2(\alpha) \right] \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} + \right. \\ &+ \left[\frac{3}{2\alpha} K_2(2\alpha) - K_1(2\alpha) + \frac{K_1(\alpha)K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \right] \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)} - \frac{1}{2} K_1(2\alpha) - \\ &\left. - \frac{3}{4\alpha} K_2(2\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} P_{e-} + P_{e+} &= \frac{6\rho kT}{\mu_Z m_u y^3} \left[\frac{K_2(\alpha)}{\alpha} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} + \frac{1}{2\alpha} K_2(2\alpha) \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} \frac{K_2(2\alpha)}{\alpha} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e-} + S_{e+} &= \frac{6k}{\mu_Z m_u y^3} \left\{ \left[K_1(\alpha) + \frac{4}{\alpha} K_2(\alpha) \right] \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} - \right. \\ &- \frac{y^3}{6} \ln \left[\frac{\alpha y^3}{6K_2(\alpha)} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)}} \right] + \left[\frac{K_2(2\alpha)}{\alpha} - K_1(2\alpha) + \right. \\ &\left. + \frac{K_1(\alpha)K_2(2\alpha)}{K_2(\alpha)} \right] \frac{\alpha^2 y^6}{36K_2^2(\alpha)} - \frac{K_1(2\alpha)}{2} - \frac{K_2(2\alpha)}{\alpha} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Формулы (2.46) справедливы для слабо вырожденного газа произвольной плотности, в том числе очень малой, когда число рождающихся пар много больше исходного числа электронов и $\lambda = \alpha^2 y^6 / 36K_2^2(\alpha) \ll 1$. Необходимо

*) Напомним, что $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

также, чтобы газ не был релятивистским, так как при $\alpha \ll 1$ рождающиеся пары заполняют фазовое пространство даже при очень малой плотности. Таким образом, для применимости (2.46) требуется выполнение условия $\alpha \gg 1$, когда справедливо разложение (2.43)*).

При $\lambda \gg 1$ из (2.46) и (2.43), оставляя два члена разложения по $1/\lambda$, получаем термодинамические функции идеального газа с поправками на вырождение, релятивизм и рождение пар (см. также [166])

$$\begin{aligned} n_{e-} + n_{e+} &= \frac{\rho}{\mu_Z m_u} \left\{ 1 + \frac{9\pi}{\alpha^3 y^6} e^{-2\alpha} \left[1 + \frac{15}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{15}{16\alpha} \right) \right] \right\}, \\ E_{e-} + E_{e+} &= \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u} + \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu_Z m_u} \left\{ 1 + \frac{5}{4\alpha} + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{12\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{15}{16\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6\pi}{\alpha^2 y^6} e^{-2\alpha} \left[1 + \frac{21}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{27}{16\alpha} \right) \right] \right\}, \\ P_{e-} + P_{e+} &= \frac{\rho kT}{\mu_Z m_u} \left\{ 1 + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{12\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{45}{16\alpha} \right) + \frac{9\pi}{\alpha^3 y^6} e^{-2\alpha} \left[1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{15}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{12\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{15}{16\alpha} \right) \right] \right\}, \\ S_{e-} + S_{e+} &= \frac{k}{\mu_Z m_u} \left\{ \frac{5}{2} - \ln \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{3/2} y^3}{3} \right) + \frac{15}{4\alpha} + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{24\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{45}{16\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9\pi}{\alpha^2 y^6} e^{-2\alpha} \left[1 + \frac{23}{4\alpha} - \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{35}{16\alpha} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Величина $E_{e+} + E_{e-}$ в (2.47) включает энергию покоя рождающихся пар и их кинетическую энергию без релятивистских поправок, а в $P_{e+} + P_{e-}$ учтены релятивистские поправки к давлению пар. В пределе очень малой плотности $\lambda \ll 1$, оставляя два члена разложения по λ , из (2.46) получаются формулы, совпадающие с нерелятивистским пределом формул (2.38) при учете (2.42).

г) **Нерелятивистский газ.** В этом случае $\alpha \sim \beta \gg 1$ и вкладом позитронов можно пренебречь. Формулы (2.9) и (2.10) при этом сводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu_Z m_u} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} F_{1/2}(\beta - \alpha), \\ E_e &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 \rho} \left(\frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} [kT F_{3/2}(\beta - \alpha) + m_e c^2 F_{1/2}(\beta - \alpha)] = \\ &= \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u} + \frac{kT}{\mu_Z m_u} \frac{F_{3/2}(\beta - \alpha)}{F_{1/2}(\beta - \alpha)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

*Если в (2.46) пренебречь слабым вырождением, то $P_{e-} + P_{e+} = kT(n_{e-} + n_{e+})$.

$$P_e = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2} \left(\frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} kT F_{3/2}(\beta - \alpha) = \frac{2}{3} \frac{\rho kT}{\mu_Z m_u} \frac{F_{3/2}(\beta - \alpha)}{F_{1/2}(\beta - \alpha)},$$

$$S_e = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{k}{\rho} \left(\frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[\frac{5}{3} F_{3/2}(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha) F_{1/2}(\beta - \alpha) \right] =$$

$$= \frac{k}{\mu_Z m_u} \left[\frac{5}{3} \frac{F_{3/2}(\beta - \alpha)}{F_{1/2}(\beta - \alpha)} - (\beta - \alpha) \right],$$

где $F_\nu(\xi)$ — интегралы Ферми

$$F_\nu(\xi) = \int_0^\infty \frac{y^\nu dy}{1 + \exp(y - \xi)}, \quad y = \frac{x^2}{2\alpha} = \frac{p^2}{2m_e kT}, \quad \xi = \beta - \alpha. \quad (2.49)$$

В нерелятивистском пределе кинетическая энергия электронов отделяется от энергии покоя. Если $e^{-\beta+\alpha} \gg 1$, то $f_e \ll 1$ и вырождение несущественно. В этом пределе получаем

$$F_{1/2}(\beta - \alpha) = e^{\beta-\alpha} \Gamma(3/2) [1 - 2^{-3/2} e^{\beta-\alpha}],$$

$$F_{3/2}(\beta - \alpha) = e^{\beta-\alpha} \Gamma(5/2) [1 - 2^{-5/2} e^{\beta-\alpha}]. \quad (2.50)$$

Первые члены в интегралах (2.50) приводят к термодинамическим функциям обычного газа (см. § 1). С учетом поправок из первого соотношения (2.48) и (2.49) имеем

$$e^{\beta-\alpha} = \frac{\rho}{\mu_Z m_u} \pi^{3/2} \sqrt{2} \left(\frac{\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\rho}{\mu_Z m_u} \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(\frac{\hbar^2}{m_e kT} \right)^{3/2} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{3/2} y^3}{3} \left(1 + \frac{\alpha^{3/2} y^3}{6\sqrt{\pi}} \right),$$

что приводит к термодинамическим функциям, следующим из (2.47), если в них пренебречь поправками на релятивизм ($\sim 1/\alpha$) и рождение пар ($\sim e^{-2\alpha}$). В пределе сильно вырожденного газа $\beta - \alpha \gg 1$ для вычисления интегралов Ферми (2.49) воспользуемся формулой (2.24). Оставляя два первых члена разложения, получаем

$$F_{1/2}(\beta - \alpha) = \frac{2}{3} (\beta - \alpha)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(\beta - \alpha)^{1/2}},$$

$$F_{3/2}(\beta - \alpha) = \frac{2}{5} (\beta - \alpha)^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} (\beta - \alpha)^{1/2}. \quad (2.51)$$

Определяя из первого соотношения (2.48)

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e kT} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\mu_Z m_u}{3\pi^2 \rho} \right)^{4/3} \left(\frac{m_e kT}{\hbar^2} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\alpha y^2}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{3\alpha^2 y^4} \right), \quad (2.52)$$

получаем термодинамические функции, следующие из (2.32), если пренебречь в них релятивистскими поправками ($\sim 1/\alpha^2$). Из (2.48) следует, что адиабата нерелятивистского электронного газа имеет вид $T\rho^{-2/3} = \text{const}$, $P\rho^{-5/3} = \text{const}$ вне зависимости от степени вырождения. При этом $E_{e, \text{кин}} = \frac{3}{2} P_e$, где $E_{e, \text{кин}} = E_e - \frac{m_e c^2}{\mu_Z m_u}$. Та же связь ρ , T и P вдоль адиабаты имеет место для любого одноатомного идеального нерелятивистского газа с постоянными μ и μ_Z .

д) Ультрарелятивистский газ. Когда кинетическая энергия электронов много больше их энергии покоя, величиной α в интегралах (2.10) можно пренебречь, что, с учетом определения (2.49) позволит записать их в виде

$$I_{n\pm} = F_2(\pm\beta), \quad I_{P\pm} = I_{E\pm} = F_3(\pm\beta). \quad (2.53)$$

В ультрарелятивистском равновесном газе всегда имеет место $\beta \geq 0$ и вырождение не может быть малым ввиду интенсивного рождения пар.

Интегралы Ферми целого индекса обладают свойствами, позволяющими выразить термодинамические функции ультрарелятивистского газа в виде полиномов по T и β [166]. Из (2.49) легко показать, что

$$\frac{dF_\nu(x)}{dx} = \nu F_{\nu-1}(x), \quad F_0(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{1 + e^{y-x}} = \ln(1 + e^x),^* \quad (2.54)$$

$$F_0(x) - F_0(-x) = x.$$

Интегрируя последовательно первое соотношение (2.54), получаем

$$\begin{aligned} F_1(x) + F_1(-x) &= \frac{x^2}{2} + 2F_1(0), & F_2(x) - F_2(-x) &= \frac{x^3}{3} + 4F_1(0)x, \\ F_3(x) + F_3(-x) &= \frac{x^4}{4} + 6F_1(0)x^2 + 2F_3(0). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Интегралы $F_\nu(0)$ приведены в (2.36), откуда имеем

$$F_1(0) = \pi^2/12; \quad F_2(0) = \frac{3}{2} \zeta(3) = 1.803; \quad F_3(0) = 7\pi^4/120.$$

В итоге получаем значения термодинамических функций для e^-e^+ -пар в виде

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu_Z m_u} &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 (\beta^3 + \pi^2 \beta), \\ E_{e^-} + E_{e^+} &= \frac{1}{4\pi^2 \rho} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left(\beta^4 + 2\pi^2 \beta^2 + \frac{7\pi^4}{15} \right) kT, \\ P_{e^-} + P_{e^+} &= \frac{1}{3} \rho (E_{e^-} + E_{e^+}), \\ S_{e^-} + S_{e^+} &= \frac{k}{3\pi^2 \rho} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left(\pi^2 \beta^2 + \frac{7\pi^4}{15} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

*) Интеграл берется с помощью замены $z = \exp\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

В пределе сильного вырождения $\beta \gg (1, \alpha)$ вклад позитронов пренебрежимо мал, и из первого соотношения (2.56) и (2.29) имеем

$$\beta = \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{kT} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\mu_Z m_u}{3\pi^2 \rho} \right)^{2/3} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^2 \right] = \alpha y \left(1 - \frac{\pi^2}{3\alpha^2 y^2} \right).$$

Это приводит к термодинамическим функциям (2.33) без членов $\sim y^{-2}$, задающих отклонения от ультрарелятивизма. В ультрарелятивистском газе малой плотности при $\beta \rightarrow 0$ имеем

$$\beta = \frac{3\rho}{\mu_Z m_u} \left(\frac{\hbar c}{kT} \right)^3 \left[1 - \frac{1}{\pi^6} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^2 \left(\frac{\hbar c}{kT} \right)^6 \right] = \frac{y^3 \alpha^3}{\pi^2} \left(1 - \frac{y^6 \alpha^6}{\pi^6} \right),$$

что приводит к термодинамическим функциям, следующим из (2.41) без учета отклонений от ультрарелятивизма $\sim \alpha^{-2}$. Из (2.56) следует, что вдоль адиабаты ультрарелятивистского газа выполняются соотношения $T\rho^{-1/3} = \text{const}$, $P\rho^{-4/3} = \text{const}$. Из полученных выше явных выражений термодинамических функций в зависимости от ρ и T легко, с помощью (1.11)–(1.17), найти явные выражения для адиабатических показателей и теплоемкостей во всех предельных случаях. Области применимости асимптотических формул с точностью $\sim 1\%$ изображены на рис. 2. Некоторые асимптотические формулы с большим числом членов разложения

Рис. 2. Области применимости приближенных асимптотических формул

на плоскости $\lg y = \frac{1}{3} (\lg(\rho/\mu_Z) - 6,0116)$, $\lg \alpha = 9,7731 - \lg T$:

А) левее линии ayb применимо приближение вырожденного газа с поправками (2.30),

В) правее линии czd – приближение малой плотности (2.38),

С) внутри области $oefg$ – приближение почти невырожденного почти нерелятивистского газа (2.46),

Д) $ohlm$ – область применимости приближения нерелятивистского газа (2.48),

Е) правее и выше ломаной npr применимо приближение ультрарелятивистского газа (2.56).

В следующих областях применимы различные приближения:

1) $nqby$ – приближения А и Е,

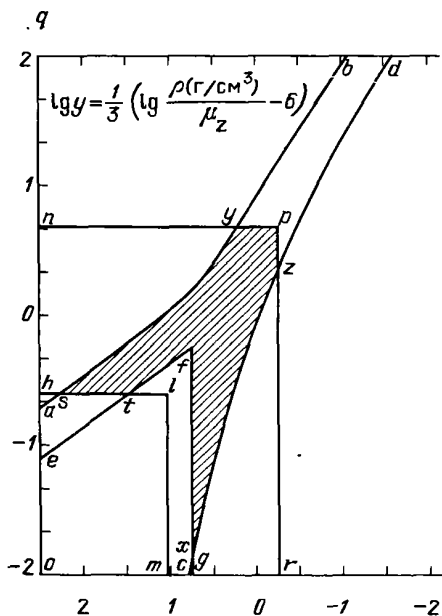
2) правее ломаной rzd – приближения В и Е,

3) cxg – приближения В и С,

4) $oetlm$ – приближения С и Д,

5) ahs – приближения А и Д.

Защищена область, где необходим численный расчет интегралов, входящих в термодинамические функции, например, методом Гаусса



Корни и коэффициенты для вычисления интегралов (2.57) методом Гаусса при $n = 5$, при $p = 0, 1, 2, 3, 4$ (см., например [29])

Корни x_i и коэффициенты A_i	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
x_1	0,26356	0,61703	1,0311	1,4906	1,9859
x_2	1,4134	2,1130	2,8372	3,5813	4,3417
x_3	3,5964	4,6108	5,6203	6,6270	7,6320
x_4	7,0858	8,3991	9,6829	10,944	12,188
x_5	12,641	14,260	15,828	17,357	18,852
A_1	0,52176	0,34801	0,52092	1,2510	4,1856
A_2	0,39867	0,50228	1,0667	3,2386	12,877
A_3	0,075942	0,14092	0,38355	1,3902	6,3260
A_4	3,6118 (-3)	8,7199 (-3)	0,028564	0,11904	0,60475
A_5	2,3370 (-5)	6,8973 (-5)	2,6271 (-4)	1,2328 (-3)	6,8976 (-3)

даны в работе [166], рассчитанные по ним таблицы и интерполяционные коэффициенты приведены в [167], см. также [67a].

е) Анализ общего случая. При отсутствии малых параметров для расчета термодинамических функций нужно вычислять интегралы (2.10) численно. Весьма эффективным является метод, аналогичный методу Гаусса [137], и использованный для этих целей в работе [46]. Подынтегральные выражения в (2.10) представляются в виде $f(x)x^p e^{-x}$, где функция $f(x)$ ограничена на любом конечном интервале и хорошо аппроксимируется каким-нибудь полиномом степени $\leq 2n - 1$ на интервале $(0, N)$ при достаточно большом N . Вычисления проводятся по следующей квадратурной формуле:

$$\int_0^{\infty} f(x) x^p e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (2.57)$$

где x_i — корни полинома Лагерра $L_n^{(p)}$, а коэффициенты A_i определяются системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k = (k+p)!,$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Формула (2.57) является точной, если $f(x)$ — полином степени $\leq 2n - 1$. Это следует из условия ортогональности полиномов Лагерра $L_n^{(p)}$ на промежутке $(0, \infty)$ с весом $x^p e^{-x}$. Значение $p = 2$ можно использовать при вычислении I_n и $p = 3$ для I_E и I_P из (2.10). Значения x_i и A_i для пятиточечной схемы ($n = 5$) приведены в таблице 4 [29] для $p = 0, 1, 2, 3, 4$.

Выражения для адиабатического показателя γ_1 и теплоемкостей в общем случае при постоянном ядерном составе получены в [46]

$$\gamma_1 = \left(\kappa + \frac{N^2}{M} \right) \left[1 + \frac{(\mu_N/\mu_Z)\pi^4}{45(I_{n-} - I_{n+})} + \frac{(\mu_N/\mu_Z)(I_{p-} + I_{p+})}{3(I_{n-} - I_{n+})} \right]^{-1}, \quad (2.58)$$

$$C_v = \frac{k}{\mu_N m_u} M, \quad C_p = \frac{k}{\mu_N m_u} \left(M + \frac{N^2}{\kappa} \right),$$

где

$$M = \frac{3}{2} + \frac{\mu_N/\mu_Z}{I_{n-} - I_{n+}} \left\{ \frac{4\pi^4}{15} + \sum_{+,-} (3I_{E\pm} + I_{P\pm} + \alpha^2 I_{5\pm} + \alpha^2 I_{6\pm}) - \frac{[3(I_{n-} - I_{n+}) + \alpha^2(I_{4-} - I_{4+})]^2}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})} \right\},$$

$$N = 1 + \frac{\mu_N/\mu_Z}{3(I_{n-} - I_{n+})} \left\{ \frac{4\pi^4}{15} + \sum_{+,-} (3I_{E\pm} + I_{P\pm}) - \frac{3(I_{n-} - I_{n+})[3(I_{n-} - I_{n+}) + \alpha^2(I_{4-} - I_{4+})]}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})} \right\}, \quad (2.59)$$

$$\kappa = 1 + \frac{\mu_N}{\mu_Z} \frac{I_{n-} - I_{n+}}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})},$$

$$I_{4\pm} = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} \pm \beta)},$$

$$I_{5\pm} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} dx}{1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} \pm \beta)},$$

$$I_{6\pm} = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} [1 + \exp(\sqrt{x^2 + \alpha^2} \pm \beta)]}.$$

Безразмерный химический потенциал β вдоль изэнтропы удовлетворяет уравнению

$$T \frac{d\beta}{dT} = \frac{M}{N} \frac{I_{n-} - I_{n+}}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})} - \frac{3(I_{n-} - I_{n+}) + \alpha^2(I_{4-} - I_{4+})}{\sum_{+,-} (I_{5\pm} + I_{6\pm})}. \quad (2.60)$$

Зависимости $\gamma_1(T)$, $C_v(T)$, $C_p/C_v(T)$ для чистого железа ($A = 56$, $\mu_N/\mu_Z = Z = 26$), построенные по формулам (2.58)–(2.60) в [46], приведены на рис. 3–5.

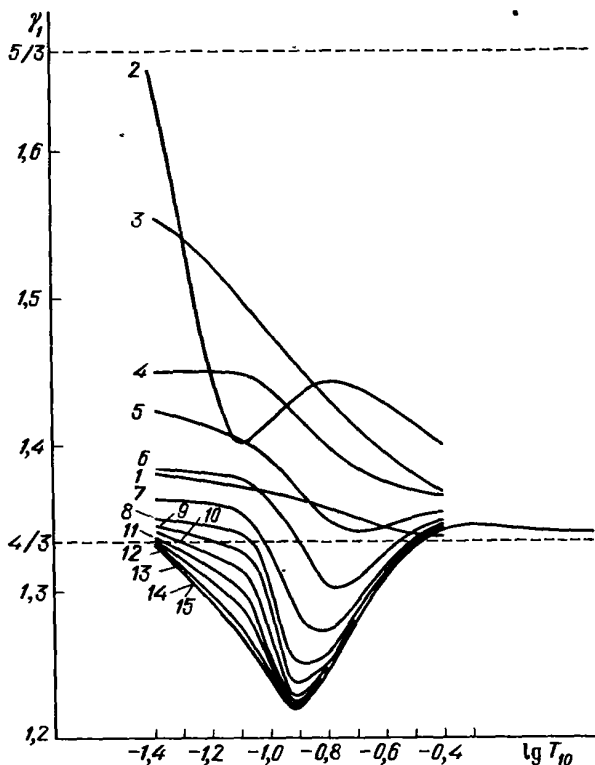


Рис. 3. Зависимость показателя адиабаты γ_1 от температуры T для чистого железа вдоль изэнтроп, построенных на рис. 6

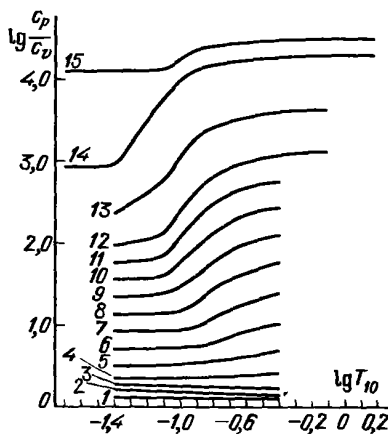
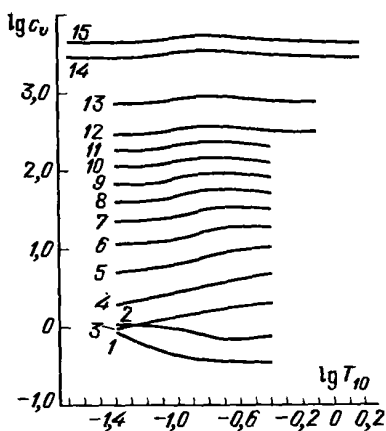


Рис. 4. Зависимость теплоемкости при постоянном объеме c_v от температуры T для чистого железа вдоль изэнтроп, построенных на рис. 6

Рис. 5. Зависимость отношения теплоемкостей c_p/c_v от температуры T для чистого железа вдоль изэнтроп, построенных на рис. 6

Задача. Найти релятивистские поправки к адиабатическому показателю γ_1 в идеальном газе.

Ответ. $\gamma_1 = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_Z} \frac{kT}{m_e c^2} \right)$. При этом использованы формулы (1.11), (2.13), (2.15), (2.18) и (2.47), где опущены поправки на вырождение и рождение пар $\sim \alpha^{3/2} y^3$ и $e^{-2\alpha}$.

§ 3. Уравнение состояния при наличии ядерного равновесия и процессов слабого взаимодействия

Когда температура вещества достигает нескольких миллиардов кельвинов, характерные времена ядерных реакций t_n становятся меньше всех макроскопических времен и устанавливается равновесие относительно ядерного состава. В условиях ядерного равновесия концентрации ядер находятся из соотношения между химическими потенциалами ядер $\mu_{A,Z}$, нейтронов μ_n и протонов μ_p , аналогично условию химического равновесия

$$\mu_{A,Z} = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n. \quad (3.1)$$

Для нерелятивистских и невырожденных ядер имеем [145]

$$\mu_{A,Z} = -kT \ln \left[\left(\frac{m_{A,Z} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{g_{A,Z}}{n_{A,Z}} \right] + m_{A,Z} c^2. \quad (3.2)$$

Равновесная концентрация ядер из (3.1), (3.2) имеет вид

$$n_{A,Z} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \left(\frac{m_{A,Z}}{m_p^Z m_n^{A-Z}} \right)^{3/2} \times \\ \times \frac{g_{A,Z}}{g_p^Z g_n^{A-Z}} \exp \left\{ \frac{[Zm_p + (A-Z)m_n - m_{A,Z}] c^2}{kT} \right\} n_p^Z n_n^{A-Z}. \quad (3.3)$$

В предэкспоненте достаточно положить $m_n = m_p = m_u$, $m_{A,Z} = A m_u$, а числитель в экспоненте есть энергия связи ядра $B_{A,Z}$. Учтя также $g_p = g_n = 2$, получим

$$n_{A,Z} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_p kT} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} \frac{A^{3/2}}{2^A} g_{A,Z} e^{-\frac{B_{A,Z}}{kT}} n_p^Z n_n^{A-Z}.$$

В табл. 5 приведены спины I , энергии связи B наиболее устойчивых ядер, $g_{A,Z} = 2I_{A,Z} + 1$. Благодаря экспоненциально быстрой зависимости скорости ядерных реакций от температуры (см. гл. 4), переход от застывшего ядерного состава к ядерному равновесию занимает узкую зону температур, где характерные времена ядерных реакций сравнимы с макроскопическими (тепловым или гидродинамическим) и где необходимо рассмотрение кинетики ядерных реакций. При данной температуре T и плотности

$$\rho = \sum_i n_{A_i Z_i} m_{A_i Z_i} + n_p m_p + n_n m_n \approx (\sum_i n_{A_i Z_i} + n_p + n_n) m_u \quad (3.4)$$

для нахождения ядерного состава необходимо знать связь между концентрациями n_n и n_p .

Энергии связи и спины ядер стабильных изотопов наиболее обильных элементов [135, 180]

Атомный номер	Элемент (изотоп)	Энергия связи E_B , кэВ	Спин ядра I
1	$^1\text{H}, ^2\text{H}$	0,2225	1/2, 1
2	$^3\text{He}, ^4\text{He}$	7718, 28297	1/2, 0
6	$^{12}\text{C}, ^{13}\text{C}$	92165, 97112	0, 1/2
7	$^{14}\text{N}, ^{15}\text{N}$	104663, 115496	1, 1/2
8	$^{16}\text{O}, ^{17}\text{O}, ^{18}\text{O}$	127624, 131766, 139813	0, 5/2, 0
10	$^{20}\text{Ne}, ^{21}\text{Ne}, ^{22}\text{Ne}$	160651, 167412, 177778	0, 3/2, 0
11	^{23}Na	186570	3/2
12	$^{24}\text{Mg}, ^{25}\text{Mg}, ^{26}\text{Mg}$	198262, 205594, 216688	0, 5/2, 0
13	^{27}Al	224959	5/2
14	$^{28}\text{Si}, ^{29}\text{Si}, ^{30}\text{Si}$	236544, 245018, 255627	0, 1/2, 0
15	^{31}P	262925	1/2
16	$^{32}\text{S}, ^{33}\text{S}, ^{34}\text{S}$	271789, 280432, 291847	0, 3/2, 0
17	$^{35}\text{Cl}, ^{37}\text{Cl}$	298220, 317112	3/2, 3/2
18	$^{36}\text{Ar}, ^{38}\text{Ar}, ^{40}\text{Ar}$	306727, 327354, 343822	0, 0, 0
20	$^{40}\text{Ca}, ^{42}\text{Ca}, ^{43}\text{Ca},$ $^{44}\text{Ca}, ^{46}\text{Ca}, ^{48}\text{Ca}$	342063, 361900, 369832, 380969, 398787, 416014	0, 0, 7/2 0, 0, 0
24	$^{50}\text{Cr}, ^{52}\text{Cr}, ^{53}\text{Cr}, ^{54}\text{Cr}$	435061, 456364, 464304, 474024	0, 0, 3/2, 0
25	^{55}Mn	482091	5/2
26	$^{54}\text{Fe}, ^{56}\text{Fe}, ^{57}\text{Fe}, ^{58}\text{Fe}$	471779, 492280, 499926, 509969	0, 0, 1/2, 0
28	$^{58}\text{Ni}, ^{60}\text{Ni}, ^{61}\text{Ni},$ $^{62}\text{Ni}, ^{64}\text{Ni}$	506484, 526871, 534691, 545288, 561788	0, 0, 3/2 0, 0,

$$B_{A,Z} = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{A,Z})c^2,$$

$$m_n = m_p + m_e + 782,5 \text{ кэВ}$$

Взаимопревращения протонов и нейтронов, как свободных, так и связанных в ядрах, происходят в реакциях слабого взаимодействия (см. гл. 5). Характерное время слабых процессов t_β при высокой температуре значительно больше ядерного t_n и может быть порядка микроскопического, гидродинамического или теплового. Нейтрино, возникающие при слабых взаимодействиях, свободно улетают из звезд. В этих условиях термодинамическое равновесие относительно реакций слабого взаимодействия отсутствует. Исключение составляют горячие нейтронные звезды, которые непрозрачны для нейтрино с энергией $E_{\nu_e} \geq 1$ МэВ. Термодинамические функции равновесного нейтринного $\nu_e, \bar{\nu}_e$ -газа с $kT \gg m_{\nu_e}c^2$ *) анало-

*) Эксперимент ИТЭФ дает $m_{\nu_e} = 30 \pm 16$ эВ [127], из оценок по теории великого объединения $m_{\nu_0} \approx 10^{-1} \div 10^{-6}$ эВ, однако возможность $m_{\nu_0} = 0$ полностью не отвергнута [172]; эксперимент в Цюрихе дает $m_{\nu_0} < 18$ эВ [544a].

гичны электронным (2.56), где $\beta = \mu_{\nu_e}/kT$, а величины $E_{\nu_e}\tilde{\nu}_e$, $P_{\nu_e}\tilde{\nu}_e$, $S_{\nu_e}\tilde{\nu}_e$ в два раза меньше, чем $E_{e\pm}$, $P_{e\pm}$ и $S_{e\pm}$ за счет статистического веса. В левой части первого соотношения (2.56), служащего для нахождения μ_{ν_e} , вместо $\rho/\mu_Z m_u$ должна стоять величина, связанная с концентрацией лептонного заряда Q_{ν_e} : $2(Q_{\nu_e} - n_{e-} - n_{e+}) = 2(n_{\nu_e} - n_{\tilde{\nu}_e})$. После таких замен все формулы п.д § 2 применимы для равновесного нейтринного газа, а связь между n_p и n_n определяется соотношениями между химическими потенциалами

$$\mu_n = \mu_p + \mu_{te} + \mu_{\tilde{\nu}_e}, \quad \mu_{\tilde{\nu}_e} = -\mu_{\nu_e}. \quad (3.5)$$

Второе соотношение (3.5) следует из равновесия реакции $\nu_e + \tilde{\nu}_e \rightarrow e^+ + e^-$ и условия (2.11). Равновесие других типов нейтрино ν_μ и ν_τ описывается аналогично ν_e , хотя оно вряд ли достижимо даже в горячих нейтронных звездах из-за большой массы их лептонов.

В условиях свободного улета нейтрино строгое нахождение связи n_p и n_n состоит в решении уравнений кинетики бета-процессов

$$\frac{dN_n}{dt} = -\frac{dN_p}{dt} = \sum_i (W_{A_i Z_i}^+ - W_{A_i Z_i}^-) n_{A_i Z_i},$$

$$N_n = \sum_i (A_i - Z_i) n_{A_i Z_i} + n_n, \quad (3.6)$$

$$N_p = \sum_i Z_i n_{A_i Z_i} + n_p$$

при известном начальном соотношении между N_n и N_p . В работе [328] параметр N_n/N_p считался независимым при расчетах ядерного равновесия элементов группы железа. В первом соотношении (3.6) при суммировании

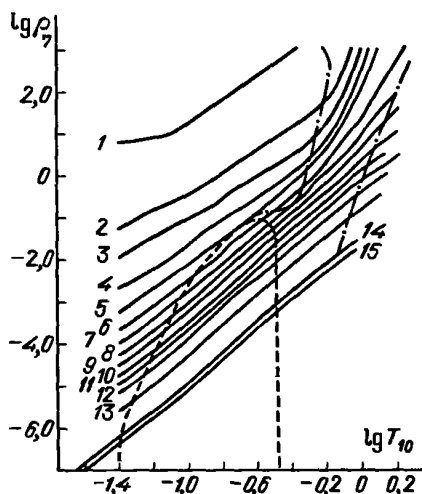


Рис. 6. Изэнтропы вещества на плоскости T, ρ . Для $10^9 < T < 2 \cdot 10^{10}$ K, $10^5 < \rho < 10^{10}$ г/см³ изэнтропы построены для равновесного химического состава по данным работы [114]. Штриховая линия разделяет области $\gamma_1 > 4/3$ и $\gamma_1 < 4/3$ и построена по данным расчетов [46]. Штрихпунктирные линии разделяют области $\gamma_1 > 4/3$ и $\gamma_1 < 4/3$ и построены по данным работы [114] с учетом распада железа. Цифры на рисунке соответствуют следующим изэнтропам: 1 — $S_{10} = 0,003981$, 2 — $S_{10} = 0,01$, 3 — $S_{10} = 0,01585$, 4 — $S_{10} = 0,02512$, 5 — $S_{10} = 0,03981$, 6 — $S_{10} = 0,0631$, 7 — $S_{10} = 0,1$, 8 — $S_{10} = 0,1585$, 9 — $S_{10} = 0,2512$, 10 — $S_{10} = 0,3981$, 11 — $S_{10} = 0,631$, 12 — $S_{10} = 1,0$, 13 — $S_{10} = 2,512$, 14 — $S_{10} = 10$, 15 — $S_{10} = 15,85$, $S_{10} = S/10^{10}$ эрг · г⁻¹ · К⁻¹

нужно учитывать свободные нейтроны и протоны. Скорости бета-реакций (с^{-1}) $W_{A,Z}^+ = W_{A,Z}(\text{e}^+ \text{-распад}) + W_{A,Z}(\text{e}^- \text{-захват})$ и $W_{A,Z}^- = W_{A,Z}(\text{e}^- \text{-распад}) + W_{A,Z}(\text{e}^+ \text{-захват})$ рассмотрены в § 19.

Если в течение времени $t \gg t_\beta$ величины T и ρ в звезде меняются слабо, то достигается кинетическое равновесие по бета-процессам с $dN_n/dt = 0$ в (3.6). В этом случае соотношения (3.6) однозначно определяют состав вещества [117–119, 224]. Для приближенного определения состава в условиях свободного улета нейтрино иногда используется соотношение (3.5) с $\mu_{\nu_e} = 0$. Расчеты в этом приближении сделаны в [114]. В ядерном равновесии учитывались ядра железа ^{56}Fe , включая семь первых возбужденных уровней, ^4He , n и p . Рост температуры ведет сначала к расщеплению ядер железа на ^4He и нуклоны, а затем к чисто нуклонному составу. При большой плотности основную часть свободных нуклонов составляют нейтроны. На рис. 6 из [46] приведены изэнтропы вещества на плоскости ρ, T и указаны области с $\gamma_1 < 4/3$, необходимые для анализа устойчивости (см. гл. 12). В области ядерного равновесия использовались результаты [114].

§ 4. Вещество при очень больших плотностях, нейтронизация, взаимодействие частиц

При очень больших плотностях в условиях сильного вырождения электронов и нуклонов приближенно вещество можно считать холодным с $T = S = 0$ [110].

а) Холодная нейтронизация вдоль состояний минимума энергии (СМЭ). При плотностях $\rho < 8,1 \cdot 10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ вещество в СМЭ состоит из ^{56}Fe , ядра которого максимально стабильны*). Когда ϵ_{Fe} из (2.21) достигает значения ϵ_β при

$$\begin{aligned} \epsilon_\beta(A, Z) &= (m_{A, Z-1} - m_{A, Z})c^2 - m_e c^2 = \\ &= B_{A, Z} - B_{A, Z-1} + (m_n - m_p)c^2 - m_e c^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

захват электрона стабильным ядром (A, Z) становится энергетически выгодным. Ядро $(A, Z-1)$, которое в обычных условиях является β^- радиоактивным, при большой энергии Ферми электронов оказывается устойчивым. Процесс захвата электрона ядром, называемый нейтронизацией, рассчитан впервые в [216].

При нулевой температуре состояние термодинамического равновесия соответствует минимуму полной энергии E_{tot} как функции A и Z при данном числе нуклонов в единице объема. С ростом плотности равновесие смещается в сторону все более переобогащенных нейтронами ядер. При $\rho \geq \rho_{nd}$ энергия связи последнего нейтрона в ядре Q_n близка к нулю

*) Энергия связи на нуклон $B_n = B_{A,Z}/A$, определяемая в соответствии с (3.3), (4.3), максимальна для ^{62}Ni (см. табл. 5). Однако при сравнении стабильности ядер нужно отсчитывать их энергию от какого-то фиксированного состояния, например, протонно-электронного. При этом оказывается, что образование ядер железа ^{56}Fe сопровождается максимальным выделением энергии.

и в равновесии появляются свободные нейтроны. В равновесии плотность, при которой начинают отщепляться нейтроны, равна $\rho_{nd} = 4,3 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ [267].

В отсутствие свободных нейтронов при $\rho < \rho_{nd}$ для энергии единицы объема с учетом энергии покоя имеем [267]

$$E_{\text{tot}}(A, Z, n_b) =$$

$$= n_{A, Z}(m_{A, Z}c^2 + W_L) + E_e(n_e), \quad n_e = Z \cdot n_{A, Z}, \quad n_b = A \cdot n_{A, Z}. \quad (4.2)$$

Массы стабильных ядер определяются с учетом энергии связи из табл. 4. Для ядер, далеких от области стабильности, экспериментальные измерения массы $m_{A, Z}$ отсутствуют. В этом случае используются полужемпирические (теоретические, подправленные имеющимися экспериментальными данными) формулы. Наиболее простая, отражающая все качественные закономерности формула для энергии связи, полученная Вейцеккером, имеет вид [23]

$$B_{A, Z} = 15,568 - 17,226 A^{2/3} - 0,698 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23,279 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{34}{A^{3/4}} \delta \text{ МэВ}. \quad (4.3)$$

Здесь $\delta = 1$ для четных A и Z , $\delta = 0$ для нечетных A и любых Z , $\delta = -1$ для четных A и нечетных Z . В (4.3) учтены статистические и капельные свойства ядер, энергия ядерного взаимодействия с учетом эффектов несимметрии ($A \neq 2Z$) и спаривания нуклонов, кулоновская и поверхностная энергии ядер. Расчет равновесного состава при холодной нейтронизации с использованием формулы Вейцеккера сделан в [77]. В работе [267] для аналогичных расчетов использована более точная, но гораздо более сложная формула Майерса и Святецкого [486]. Энергия холодных электронов дана в (2.22)–(2.23), а величина W_L есть энергия электростатического взаимодействия, возникающая из-за наличия точечных положительных зарядов в однородном фоне отрицательных. Минимум W_L достигается для объемно-центрированной кубической решетки и определяется формулой [267]

$$W_L = -1,819620 Z^2 e^2 / b, \quad n_{A, Z} b^3 = 2. \quad (4.4)$$

Электростатическое взаимодействие уменьшает энергию и давление вещества, так как расстояние между отталкивающимися ядрами в среднем больше, чем между притягивающимися зарядами разного знака [110]. Равновесный состав, соответствующий минимуму E_{tot} из (4.2) при заданной плотности барионов n_b приведен в табл. 6 из работы [267]. Отметим,

что между плотностями ρ_{max} и $\rho_{\text{max}} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right)$ давление почти постоянно (слабо растет за счет давления ядер). Величина $\rho = E_{\text{tot}}/c^2$ учитывает кинетическую энергию и энергию взаимодействия. Давление P и реляти-

Равновесный ядерный состав при плотностях, меньших плотности испарения нейтронов (из [267])

Ядро	B_n , МэВ	Z/A	$\rho_{\max}$, г·см ⁻³	$\mu_{\text{те}}$, МэВ	$\Delta\rho/\rho$, %
⁵⁶ Fe	8,7905	0,4643	8,1(6)	0,95	2,9
⁶² Ni	8,7947	0,4516	2,7(8)	2,6	3,1
⁶⁴ Ni	8,7777	0,4375	1,2(9)	4,2	7,9
⁸⁴ Se	8,6797	0,4048	8,2(9)	7,7	3,5
⁸² Ge	8,5964	0,3902	2,2(10)	10,6	3,8
⁸⁰ Zn	8,4675	0,3750	4,8(10)	13,6	4,1
⁷⁸ Ni	8,2873	0,3590	1,6(11)	20,0	4,6
⁷⁶ Fe	7,9967	0,3421	1,8(11)	20,2	2,2
¹²⁴ Mo	7,8577	0,3387	1,9(11)	20,5	3,1
¹²² Zr	7,6705	0,3279	2,7(11)	22,9	3,3
¹²⁰ Sr	7,4522	0,3166	3,7(11)	25,2	3,5
¹¹⁸ Kr	7,2002	0,3051	(4,3(11))	(26,2)	...

Здесь $B_n = B_A$, Z/A — энергия связи на нуклон, $\rho_{\max}$ — максимальная плотность, при которой существует данный нуклид, $\mu_{\text{те}}$ — химический потенциал электронов при этой плотности, $\Delta\rho/\rho$ — относительное увеличение плотности при переходе к следующему нуклиду. При $\rho_{\max} = 4,3 \cdot 10^{11}$ г·см⁻³ начинается испарение нейтронов

вистский показатель адиабаты Γ определяются формулами [267]

$$P = n_b^2 \left. \frac{\partial(E_{\text{tot}}/n_b)}{\partial n_b} \right|_S, \quad \Gamma = \frac{n_b}{P} \left. \frac{\partial P}{\partial n_b} \right|_S = \frac{\rho + P/c^2}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S. \quad (4.5)$$

В таблице 7 даны результаты расчета термодинамических функций при равновесной нейтронизации. При $\rho < 10^4$ г·см⁻³, когда энергия взаимодействия W_L становится порядка кинетической энергии электронов, значения в табл. 7 взяты из работы [201].

б) Появление свободных нуклонов. СМЭ при субъядерных плотностях с учетом взаимодействия нуклонов. При $\rho > \rho_{\text{нд}}$ все связанные состояния

Таблица 7

Уравнение состояния вещества в равновесии, соответствующем минимуму полной энергии, из [267]

ρ , г·см ⁻³	P , дин·см ⁻²	n_b , см ⁻³	Z	A	Γ
7,86	≤ 1,01 (9)	4,73 (24)	26	56	...
7,90	1,01 (10)	4,76 (24)	26	56	...
8,15	1,01 (11)	4,91 (24)	26	56	...
11,6	1,21 (12)	6,99 (24)	26	56	...
16,4	1,40 (13)	9,90 (24)	26	56	...

Таблица 7 (окончание)

$\rho, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$P, \text{дин} \cdot \text{см}^{-2}$	$n_b, \text{см}^{-3}$	Z	A	Γ
45,1	1,70 (14)	2,72 (25)	26	56	...
212	5,82 (15)	1,27 (26)	26	56	...
1150	1,90 (17)	6,93 (26)	26	56	...
1,044 (4)	9,744 (18)	6,295 (27)	26	56	1,796
2,622 (4)	4,968 (19)	1,581 (28)	26	56	1,744
6,587 (4)	2,431 (20)	3,972 (28)	26	56	1,706
1,654 (5)	1,151 (21)	9,976 (28)	26	56	1,670
4,156 (5)	5,266 (21)	2,506 (29)	26	56	1,631
1,044 (6)	2,318 (22)	6,294 (29)	26	56	1,586
2,622 (6)	9,755 (22)	1,581 (30)	26	56	1,534
6,588 (6)	3,911 (23)	3,972 (30)	26	56	1,482
8,293 (6)	5,259 (23)	5,000 (30)	28	62	1,471
1,655 (7)	1,435 (24)	9,976 (30)	28	62	1,437
3,302 (7)	3,833 (24)	1,990 (31)	28	62	1,408
6,589 (7)	1,006 (25)	3,972 (31)	28	62	1,386
1,315 (8)	2,604 (25)	7,924 (31)	28	62	1,369
2,624 (8)	6,676 (25)	1,581 (32)	28	62	1,357
3,304 (8)	8,738 (25)	1,990 (32)	28	64	1,355
5,237 (8)	1,629 (26)	3,155 (32)	28	64	1,350
8,301 (8)	3,029 (26)	5,000 (32)	28	64	1,346
1,045 (9)	4,129 (26)	6,294 (32)	28	64	1,344
1,316 (9)	5,036 (26)	7,924 (32)	34	84	1,343
1,657 (9)	6,860 (26)	9,976 (32)	34	84	1,342
2,626 (9)	1,272 (27)	1,581 (33)	34	84	1,340
4,164 (9)	2,356 (27)	2,506 (33)	34	84	1,338
6,601 (9)	4,362 (27)	3,972 (33)	34	84	1,337
8,312 (9)	5,662 (27)	5,000 (33)	32	82	1,336
1,046 (10)	7,702 (27)	6,294 (33)	32	82	1,336
1,318 (10)	1,048 (28)	7,924 (33)	32	82	1,336
1,659 (10)	1,425 (28)	9,976 (33)	32	82	1,335
2,090 (10)	1,938 (28)	1,256 (34)	32	82	1,335
2,631 (10)	2,503 (28)	1,581 (34)	30	80	1,335
3,313 (10)	3,404 (28)	1,990 (34)	30	80	1,335
4,172 (10)	4,628 (28)	2,506 (34)	30	80	1,334
5,254 (10)	5,949 (28)	3,155 (34)	28	78	1,334
6,617 (10)	8,089 (28)	3,972 (34)	28	78	1,334
8,332 (10)	1,100 (29)	5,000 (34)	28	78	1,334
1,049 (11)	1,495 (29)	6,294 (34)	28	78	1,334
1,322 (11)	2,033 (29)	7,924 (34)	28	78	1,334
1,664 (11)	2,597 (29)	9,976 (34)	26	76	1,334
1,844 (11)	2,892 (29)	1,105 (35)	42	124	1,334
2,096 (11)	3,290 (29)	1,256 (35)	40	122	1,334
2,640 (11)	4,473 (29)	1,581 (35)	40	122	1,334
3,325 (11)	5,816 (29)	1,990 (35)	38	120	1,334
4,188 (11)	7,538 (29)	2,506 (35)	36	118	1,334
4,299 (11)	7,805 (29)	2,572 (35)	36	118	1,334

нейтронов в ядрах оказываются заполненными и дальнейший рост плотности приводит к появлению свободных нейтронов. После различных попыток расчета уравнения состояния в этой области (см. обзор [266]), корректный подход к решению проблемы был развит в работе [265]. Этот подход основан на следующих принципах.

1. Единое описание энергии взаимодействия нуклонов как внутри, так и вне ядер.

2. Использование выражения для поверхностной энергии ядер, которое учитывает наличие окружающих нейтронов и обращается в нуль при идентичности вещества внутри и снаружи.

3. Учет энергии кулоновского взаимодействия электронов и ядер решетки, а также протонов внутри ядра.

Если n_A, z и n_n — концентрации ядер и свободных нейтронов в пространстве вне ядер, $V_{A, z}$ — объем ядра, а то выражение для полной энергии единицы объема E_{tot} запишется в виде

$$E_{\text{tot}}(A, Z, n_n, n_A, z, V_{A, z}) = \\ = n_{A, z}(W_{A, z} + W_L) + (1 - V_{A, z}n_{A, z})E_n(n_n) + E_e(n_e). \quad (4.6)$$

Для нахождения равновесного состава и уравнения состояния необходимо минимизировать E_{tot} относительно аргументов при постоянной концентрации нуклонов n_b :

$$n_b = An_{A, z} + (1 - V_{A, z}n_{A, z})n_n. \quad (4.7)$$

Входящие в (4.6) кулоновская энергия решетки W_L и энергия холодных электронов определены в (4.4) и (2.22)–(2.23) соответственно. Энергия ядра, представляемого в виде жидкой капли, записывается в виде

$$W_{A, z}(A, Z, V_{A, z}, n_n) = [(1 - x)m_n c^2 + x m_p c^2 + W(k, x)]A + \\ + W_{\text{coul}}(A, Z, V_{A, z}, n_n) + W_{\text{surf}}(A, Z, V_{A, z}, n_n), \quad x = \frac{Z}{A}, \quad (4.8)$$

где $W(k, x)$ — энергия на один барион в однородной ядерной материи с концентрацией $n = k^3/1,5\pi^2 = A/V_{A, z}$, W_{coul} — кулоновская энергия взаимодействия протонов в ядре, W_{surf} — поверхностная энергия ядра. Формула для энергии нейтронного газа E_n получается аналогично (4.8) при $x = 0$.

$$E_n(n_n) = n_n W(k_n, 0) + m_n c^2, \quad n_n = k_n^3/1,5\pi^2. \quad (4.9)$$

Функция $W(k, x)$, входящая в (4.8), (4.9), а также W_{coul} и W_{surf} , входящие в (4.8), вычислены в [266]. Поверхностная энергия в [265] оценивалась довольно грубо из соображений размерности. Более точные выражения для W_{surf} были найдены в работах [313] методом Томаса—Ферми, [256] вариационным методом и [504, 548] методом Хартри—Фока. Величина $-[W(k, x)A + W_{\text{coul}} + W_{\text{surf}}]$ по физическому смыслу есть энергия связи ядра (A, Z) с учетом окружающей плотности нейтронов, которая для нормальных ядер в вакууме аппроксимируется формулой Вейцзекке-

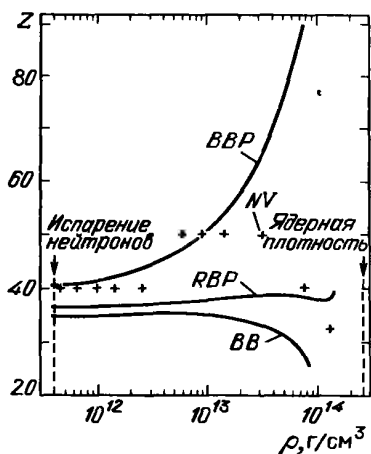
ра (4.3). Минимизация величины E_{tot} относительно своих аргументов при постоянстве n_b из (4.7) сводится к четырем уравнениям, определяющим равновесие по следующим процессам: 1) сжатие и расширение ядра давлением внешних нейтронов, 2) обмен нейтронами между ядром и нейтронным газом, 3) превращение нейтронов и протонов друг в друга внутри ядра, 4) выделение ядра, минимизирующего полную энергию. Решение этих четырех уравнений определяет свойства равновесного вещества, состоящего из ядер и свободных нейтронов. В табл. 8 из [265] приведены результаты

Таблица 8

Характеристики вещества в минимуме полной энергии при наличии свободных нейтронов (из [265])

ρ , г·см ⁻³	P , дин·см ⁻²	n_b , см ⁻³	Z	A	Γ
4,460 (11)	7,890 (29)	2,670 (35)	40	126	0,40
5,228 (11)	8,352 (29)	3,126 (35)	40	128	0,36
6,610 (11)	9,098 (29)	3,951 (35)	40	130	0,40
7,964 (11)	9,831 (29)	4,759 (35)	41	132	0,46
9,728 (11)	1,083 (30)	5,812 (35)	41	135	0,54
1,196 (12)	1,218 (30)	7,143 (35)	42	137	0,63
1,471 (12)	1,399 (30)	8,786 (35)	42	140	0,73
1,805 (12)	1,638 (30)	1,077 (36)	43	142	0,83
2,202 (12)	1,950 (30)	1,314 (36)	43	146	0,93
2,930 (12)	2,592 (30)	1,748 (36)	44	151	1,06
3,833 (12)	3,506 (30)	2,287 (36)	45	156	1,17
4,933 (12)	4,771 (30)	2,942 (36)	46	163	1,25
6,248 (12)	6,481 (30)	3,726 (36)	48	170	1,31
7,801 (12)	8,748 (30)	4,650 (36)	49	178	1,36
9,611 (12)	1,170 (31)	5,728 (36)	50	186	1,39
1,246 (13)	1,695 (31)	7,424 (36)	52	200	1,43
1,496 (13)	2,209 (31)	8,907 (36)	54	211	1,44
1,778 (13)	2,848 (31)	1,059 (37)	56	223	1,46
2,210 (13)	3,931 (31)	1,315 (37)	58	241	1,47
2,988 (13)	6,178 (31)	1,777 (37)	63	275	1,49
3,767 (13)	8,774 (31)	2,239 (37)	67	311	1,51
5,081 (13)	1,386 (32)	3,017 (37)	74	375	1,53
6,193 (13)	1,882 (32)	3,675 (37)	79	435	1,54
7,732 (13)	2,662 (32)	4,585 (37)	88	529	1,56
9,826 (13)	3,897 (32)	5,821 (37)	100	683	1,60
1,262 (14)	5,861 (32)	7,468 (37)	117	947	1,65
1,586 (14)	8,595 (32)	9,371 (37)	143	1390	1,70
2,004 (14)	1,286 (33)	1,182 (38)	201	2500	1,74
2,520 (14)	1,900 (33)	1,484 (38)	...	...	1,81
2,761 (14)	2,242 (33)	1,625 (38)	...	...	1,82
3,085 (14)	2,751 (33)	1,814 (38)	...	...	1,87
3,433 (14)	3,369 (33)	2,017 (38)	...	...	1,92
3,885 (14)	4,286 (33)	2,280 (38)	...	...	1,97
4,636 (14)	6,103 (33)	2,715 (38)	...	...	2,03
5,094 (14)	7,391 (33)	2,979 (38)	...	...	2,05

Рис. 7. Зависимость заряда Z в коре нейтронной звезды от плотности, построенная по расчетам различных авторов: BBP — [265], NV — [504], RBP — [548], BB — [313]



расчетов. С увеличением плотности происходит рост массы и объема ядер, пока они не касаются друг друга при $\rho_{nn} = 2,4 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. В [265] предполагается, что при плотности ρ_{nn} происходит фазовый переход первого рода к однородной ядерной материи.

Уточнение формулы для поверхностной энергии сказалось только на изменении заряда ядра $Z(\rho)$, рост которого замедлился по сравнению с [265]. На рис. 7 из [266] приведены результаты расчета $Z(\rho)$ различными авторами. Уменьшение величины Z при больших плотностях приводит к более плавному изменению Z в процессе фазового перехода к однородной ядерной материи. Несовпадение зависимостей $Z(\rho)$ у авторов [256, 313, 504, 548] отражает как недостаток физических знаний о законах взаимодействий между нуклонами, так и несовершенство существующих математических методов расчета.

в) Плотность, больше ядерной. Однородная ядерная материя (ЯМ), появляющаяся в результате фазового перехода, состоит из нейтронов с небольшой примесью протонов и электронов. Пока плотность ЯМ не превышает $2\rho_0$ ($\rho_0 = 2,8 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ — плотность свободной ЯМ), для расчета уравнения состояния применим метод Бракнера—Бете—Голдстоуна, основанный на теории возмущений [22]. При $\rho > 2\rho_0$ расчеты ведутся с помощью вариационного принципа, разработанного Пандарипанде [537]. При больших плотностях учитывается рождение тяжелых гиперонов [9] и возможное рождение π^- -мезонов (пионная конденсация [158]). Расчеты уравнения состояния ядерной материи при $\rho \geq \rho_0$ выполнены при различных допущениях в [275, 479]. В табл. 9 из [479] приводится уравнение состояния для наиболее реалистического варианта с параметрами потенциала взаимодействия, учитывающими экспериментальные данные из ядерной физики высоких энергий, а также рождение гиперонов. Возможное появление пионной конденсации слабо влияет на уравнение состояния [275]. Следует иметь в виду, что с ростом плотности все более возрастает неопределенность наших знаний о физике сильных взаимодействий и менее точными становятся методы расчета. В связи с этим даже в реалистическом варианте из табл. 9 погрешности могут достигать $\sim 50\%$.

Как отмечалось впервые Я.Б. Зельдовичем [103, 110], требование принципа причинности о том, что скорость звука v_s не должна превышать скорость света c , накладывает ограничение на уравнение состояния $P \leq \epsilon = \rho c^2$. Важность этого ограничения связана с тем, что оно действует при сколь угодно больших плотностях, где о свойствах ядерных взаимодействий известно очень мало.

Реалистические параметры вещества при большой плотности из [479]

$n_b, \text{см}^{-3}$	$\frac{E}{n_b} - m_n c^2, \text{МэВ}$	$\rho, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$P, \text{дин} \cdot \text{см}^{-2}$
1,0 (38)	12,6	1,70 (14)	1,19 (33)
1,5 (38)	16,6	2,55 (14)	2,93 (33)
2,0 (38)	21,2	3,42 (14)	6,00 (33)
2,5 (38)	26,0	4,31 (14)	1,09 (34)
3,0 (38)	32,2	5,21 (14)	1,83 (34)
4,0 (38)	46,9	7,04 (14)	4,09 (34)
5,0 (38)	64,4	8,95 (14)	7,61 (34)
6,0 (38)	83,7	1,09 (15)	1,26 (35)
7,0 (38)	109	1,31 (15)	1,99 (35)
8,0 (38)	134	1,54 (15)	2,85 (35)
9,0 (38)	160	1,76 (15)	3,71 (35)
1,0 (39)	189	2,01 (15)	4,02 (35)
1,1 (39)	215	2,26 (15)	5,02 (35)
1,25 (39)	254	2,66 (15)	6,76 (35)
1,4 (39)	295	3,08 (15)	8,81 (35)
1,5 (39)	324	3,37 (15)	1,03 (36)
1,7 (39)	383	4,00 (15)	1,38 (36)
2,0 (39)	475	5,04 (15)	2,02 (36)
2,5 (39)	639	7,02 (15)	3,40 (36)
3,0 (39)	814	9,36 (15)	5,20 (36)

При $n_b > 1,0$ (39) имеют место асимптотические формулы

$$E = n_b \left(15,05 + 3,03 \left(\frac{n_b}{10^{39}} \right)^{1,33} \right) \cdot 10^{-6} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3},$$

$$P = 403 (n_b / 10^{39})^{2,33} \cdot 10^{33} \text{ дин} \cdot \text{см}^{-3},$$

$$(\rho = E/c^2).$$

г) Учет конечной температуры. Учет температурных эффектов при плотностях, когда существенно ядерное взаимодействие, сделан для $\rho \leq \rho_0$ с помощью обобщения методов, применявшихся при исследовании холодного вещества [465] (см. также [314]). В равновесии рассматривались протоны, нейтроны, ядра гелия, один тип тяжелых ядер, для которых находился минимум полной энергии. Ввиду свободного улета нейтрино и отсутствия равновесия по бета-процессам, задавалось отношение $N_p / (N_n + N_p) = Y_e$. Выражения всех видов энергии, входящих в E_{tot} из (4.6) и из (4.8), записывались с учетом температурных поправок и к E_{tot} добавлялась энергия движения ядер, связанная с конечной температурой, а также энергии ядер гелия. К независимым величинам, которые являются аргументами функции E_{tot} в (4.6), при конечной температуре добавляются

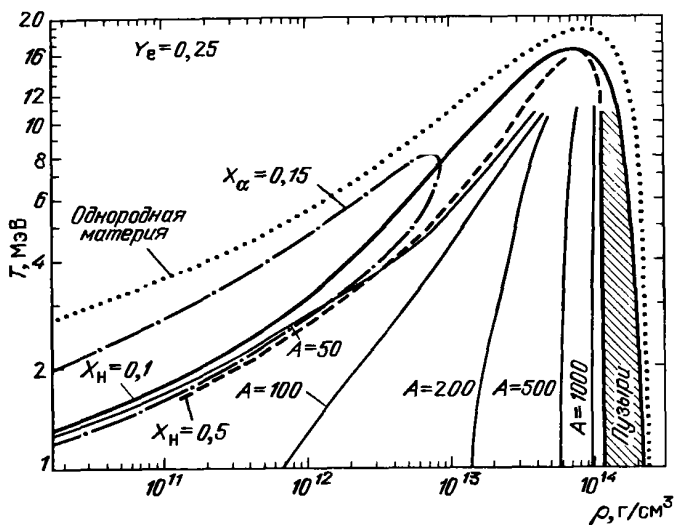


Рис. 8. Химические свойства вещества при высоких температурах и плотностях для $Y_e = 0,25$ из [456]. Сплошная линия ограничивает область, где весовая доля ядер $X_H > 0,1$, а в области внутри штриховой линии $X_H > 0,5$. В области внутри штрих-пунктирной линии весовая доля гелия $X_\alpha > 0,15$. Тонкие сплошные линии задают массы ядер. Заштрихованная область существования пузырей. Пунктирная линия определяет границу устойчивости однородной материи относительно разбиения на две фазы

n_p — концентрация свободных протонов и n_α — концентрация ядер гелия, которая определяется из условия равновесия относительно разбиения на протоны и нейтроны типа (3.3), но с учетом конечного объема (задаваемого) ядер гелия. Для определения n_p добавлялось условие равновесия по обмену протонами между ядрами и протонами в газе. На рис. 8 из [456] представлены химические свойства при больших температурах и плотностях для $Y_e = 0,25$. Интересно, что при больших плотностях $\rho > 10^{14}$ г·см⁻³, когда ядра начинают занимать больше половины объема, вместо ядер, погруженных в менее плотный нуклонный газ, возникают шарики менее плотного вещества (пузыри), погруженные в более плотную ядерную материю. Важный вывод, следующий из данных расчетов, состоит в сохранении ядер до очень высоких температур ~ 20 МэВ $\approx 2 \cdot 10^{11}$ К, что является следствием учета ядерных взаимодействий и влияния окружающего газа на свойства ядер. В [456] отмечалось, что диаграмма на рис. 8 мало чувствительна к изменению Y_e в пределах $0,2 \leq Y_e \leq 0,5$. Учет различных типов тяжелых ядер, одновременно присутствующих в равновесии [346], также слабо влияет на полученные результаты [456]. На рис. 9 и 10 из [456] приведены изэнтропии вещества и зависимость показателя адиабаты $\gamma_1(\rho)$ для этих изэнтроп. Видно, что существование ядер заметно уменьшает γ_1 по сравнению с нуклонным газом при ненулевой энтропии. Как видно из рис. 8, при плотности, больше ядерной, вещество всегда однородно.

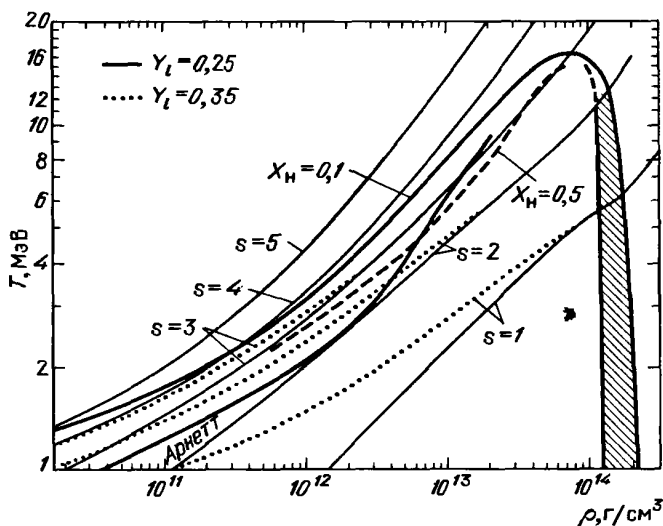


Рис. 9. Адиабаты с указанными значениями безразмерной энтропии s (в единицах k/m_u) для $Y_l = 0,25$ (сплошные линии) и $Y_l = 0,35$ (пунктирные линии), из [456]. Линии $X_H = 0,1$ и $X_H = 0,5$ имеют тот же смысл, что и на рис. 8. При $\rho > 10^{13}$ г/см³ вещество непрозрачно для нейтрино и сохраняется величина Y_l — лептонный заряд на один барион. Указана также траектория центра звезды при коллапсе, полученная Арнеттом [255a]

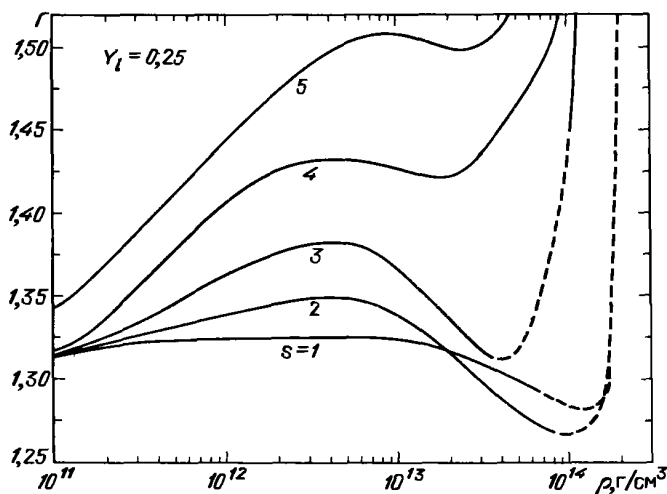


Рис. 10. Зависимость показателя адиабаты $\Gamma = \gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$ от плотности ρ для указанных значений безразмерной энтропии s (см. рис. 9) при $Y_l = 0,25$ из [456]. В области штриховых линий кривые $\Gamma(\rho)$ приведены сглаженными без некоторых несущественных деталей

Энергия Ферми идеального нейтронного газа, определяемая аналогично (2.21), есть

$$\epsilon_{Fn} = m_n c^2 (\sqrt{1 + y_n^2} - 1), \quad y_n = \frac{p_{Fn}}{m_n c} = \left(\frac{\rho_n}{6,2 \cdot 10^{15}} \right)^{1/3},$$

$$p_{Fn} = \left(\frac{3 \pi^2 \rho_n}{m_n} \right)^{1/3} \hbar.$$
(4.10)

При $\rho \approx \rho_n \geq \rho_0$ имеем $y_n \geq 0,36$ и $\epsilon_{Fn} \geq 61$ МэВ. Максимальные температуры, достигаемые при гравитационном коллапсе, обычно не превышают ~ 20 МэВ, поэтому при $\rho \geq \rho_0$ температурные поправки к уравнению состояния несут незначительный вклад.

д) **Неравновесная нейтронизация при увеличении плотности в холодном веществе.** Равновесие по ядерному составу достигается в веществе при высоких температурах, когда открыты все каналы реакций. По мере остывания, большинство каналов реакций закрывается и в холодном веществе достижение СМЭ, строго говоря, невозможно. Вещество при малых температурах всегда находится в неравновесном состоянии, однако степень неравновесности и характер ее зависят от пути, которым вещество пришло к состоянию с данными ρ и T . В [60, 61, 287] рассмотрены два возможных пути: сжатие холодного вещества и остывание вещества при данной плотности с неравновесными составами, возникающими при этом.

Рассмотрим сжатие холодного вещества. Пусть при малых ρ вещество состоит из самого стабильного элемента ^{56}Fe и медленно сжимается при температуре, близкой к нулю. Когда плотность достигает величины $1,24 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\epsilon_{Fe} = 3,81$ МэВ, становится энергетически выгодным захват электрона ядром ($^{56}\text{Fe}^*$). Ввиду меньшей устойчивости нечетно-нечетных ядер, за первым захватом сразу следует второй и идет цепочка реакций



Для второй реакции из (4.11) величина $\epsilon_\beta = 1,6$ МэВ [99]. При $\epsilon_{Fe} = 3,81$ МэВ она проходит неравновесно и сопровождается нагревом ([56], см. гл. 5), которым пренебрегаем ввиду того, что он не влияет на формирование химического состава. После образования ^{56}Cr в ходе дальнейшего сжатия становятся энергетически выгодными превращения $^{56}\text{Cr} \rightarrow ^{56}\text{K} \rightarrow ^{56}\text{Ar}$ и т.д., пока не образуется ядро с энергией отрыва последнего нейтрона, близкой к нулю $Q_n \approx 0$. После этого повышение плотности и захват электронов сопровождаются холодным испарением нейтронов из ядер и уменьшением A наряду с Z . Ввиду различия в свойствах четных и нечетных ядер, часть испаряющихся нейтронов уносит энергию ~ 1 МэВ/нейтрон, идущую на нагрев вещества [78].

*) При этом происходит захват на возбужденное состояние ядра ^{56}Mn с энергией возбуждения 109 кэВ. Захват на основное состояние ^{56}Mn начинается при $\rho = 1,15 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\epsilon_{Fe} = 3,7$ МэВ, но протекает очень медленно, ввиду наличия сильного запрета (см. § 18 и (20.14)).

В процессе неравновесной нейтронизации число ядер, приходящихся на один барион, не меняется. Если A_0 — атомная масса начального ядра, то при данной плотности концентрации ядер и электронов (с учетом электронейтральности) запишутся в виде

$$n_{A,Z} = \frac{\rho}{A_0 m_u}, \quad n_e = \frac{Z \rho}{A_0 m_u}. \quad (4.12)$$

Здесь масса ядра приближенно принята равной $A m_u$, а плотность $\rho = N m_u$, $N = N_n + N_p$ — полная концентрация барионов. До начала испарения нейтронов при $A = A_0$ заряд ядра Z остается постоянным в интервале плотностей, где выполняется неравенство

$$\epsilon_p(A_0, Z+2) < \epsilon_{Fe}(n_e) < \epsilon_p(A_0, Z). \quad (4.13)$$

Когда первое соотношение в (4.13) обращается в равенство, начинается очередная захват электрона при постоянных ϵ_{Fe} и P_e в интервале плотностей $\rho_{Z+2} < \rho < \rho_Z$:

$$\epsilon_{Fe}(n_e) = \epsilon_p(A_0, Z+2) = \text{const}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\rho_Z}{\rho_{Z+2}} = \frac{Z+2}{Z}.$$

Свойства вещества при холодной нейтронизации до начала испарения нейтронов приведены в табл. 10, где использовались ядерные данные из [379]. После начала испарения нейтронов концентрация их определяется соотношением

$$n_n = \frac{\rho}{m_u} \left(1 - \frac{A}{A_0}\right), \quad m_n \approx m_p \approx m_u. \quad (4.15)$$

Испарение нейтрона из ядра при наличии свободных нейтронов допустимо, если энергия вылетающих нейтронов превышает их энергию Ферми (4.10). Условие испарения после очередного захвата электрона в условиях (4.14) запишется в виде

$$Q_n(A, Z) = B_{A,Z} - B_{A-1,Z} \leq -\epsilon_{Fn}(n_n). \quad (4.16)$$

Ввиду колебания функции $Q_n(A, Z)$ в зависимости от четности A и Z , протекает сразу цепочка реакций

$$(A, Z) + e^- \rightarrow (A, Z-1) + \nu_e \rightarrow (A-k_1, Z-1) + k_1 n + \nu_e, \quad (4.17)$$

$$(A-k_1, Z-1) + e^- \rightarrow (A-k_1, Z-2) + \nu_e \rightarrow (A-k_1-k_2, Z-2) + k_2 n + \nu_e,$$

где $k_1 \approx k_2 = 3 \div 4$ для различных ядер [560]. Расчет неравновесной нейтронизации с испарением нейтронов по системе уравнений (4.12)–(4.16) проводился в [78] с энергией связи по формуле Вейцеккера, а в [560] с учетом ядерного взаимодействия нуклонов и вычислении энергии связи по методике работы [265] при дополнительном учете влияния ядерных оболочек. Результаты этих расчетов приведены в табл. 10.

В [560] отмечена важность пикноядерных реакций в ходе холодной неравновесной нейтронизации ввиду того, что скорость этих реакций быстро

Свойства вещества при холодной неравновесной нейтронизации ядер железа

$\rho, 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$A; Z$	$\epsilon_{Fe}, \text{ МэВ}$	$\epsilon_{Fn}, \text{ МэВ}$	$P, 10^{10} \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}$	$P_n, 10^{10} \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}$
0,012	56; 24	3,81	0	5,5 (-4)	0
0,14	56; 22	8,83	0	0,014	0
0,57	56; 20	14,0	0	0,080	0
1,6	56; 18	19,3	0	0,28	0
3,098	54; 18	23,84	0,069	0,569	3 (-4) (6,5)
3,9	56; 16	25,2	0	0,73	0
5,01	56; 16	26,98	0	0,933	
6,17	54; 16	28,85	0,09	1,20	
6,233	48; 16	29,52	0,232	1,25	0,0059 (5,7)
7,24	46; 14	29,19	0,26	1,29	
7,664	42; 14	29,66	0,468	1,41	0,0344 (3,6)
9,689	36; 12	30,47	0,693	1,75	0,0921 (4,1)
10,1	56; 14	31,78	0	1,97	0
10,23	40; 12	31,00	0,44	1,66	
12,1	48; 12	32,06	0,43	2,07	0,029
12,88	35; 10	31,60	0,58	1,86	
14,13	32; 9	31,47	0,65	1,86	
14,88	30; 10	31,36	0,987	2,12	0,422 (4,5)
15,0	40; 10	32,35	0,79	2,25	0,13
16,8	36; 9	32,50	0,99	2,38	0,23
17,43	24; 8	32,47	1,41	2,48	0,537 (5,2)
19,2	32; 8	32,64	1,22	2,59	0,39
22,2	28; 7	32,78	1,49	2,88	0,65
25,65	18; 6	33,47	2,04	3,57	1,36 (6,0)
26,3	24; 6	32,92	1,82	3,35	1,07
44,12	12; 4	35,38	2,52	6,06	3,31 (7,8)

P — полное давление, P_n — давление нейтронов; слева в столбцах даны результаты из [78], справа — из [560], где P_n не приводится. В середине даны результаты расчета с использованием таблиц [379, 135] до начала испарения нейтронов и формулы (4,20). В последнем столбце в скобках дана температура T (10^9 K) при образовании данного состава за счет неравновесных β -захватов из [78].

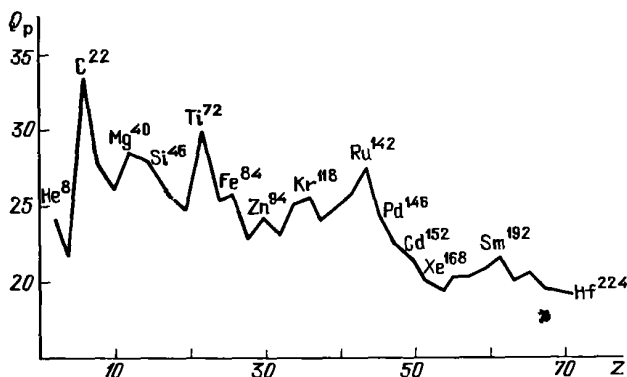


Рис. 11. Энергия отрыва протона Q_p в зависимости от Z для ядер, лежащих на границе существования с $Q_n = 0$. Зависимость построена согласно количественным оценкам П.Э. Немировского

растет с ростом плотности (см. гл. 4). При $\rho = 1,4 \cdot 10^{12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ядра с $(A, Z) = (32, 9)$, образующиеся из ядер ${}^{56}\text{Fe}$, сливаются и после захвата двух электронов и испарения восьми нейтронов, образуются ядра с $(A, Z) = (56, 16)$. В [560] не рассматривался тепловой эффект этой и последующих реакций слияния. Холодная неравновесная нейтронизация доведена до $\rho = 5,13 \cdot 10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ с образованием ядра $(99, 19)$ (ср. с ядром $(375, 74)$ из табл. 8 или $Z = 30 \div 40$ из рис. 7 для равновесного состава при той же плотности). Не исключено, что выделение тепла при пикноядерных реакциях с последующим быстрым неравновесным захватом электронов и испарением нейтронов может достаточно повысить температуру для установления ядерного состава, близкого к равновесному.

Энергия отрыва последнего протона

$$Q_p(A, Z) = B_{A, Z} - B_{A-1, Z-1} = \epsilon_p(A, Z) + Q_n(A, Z-1) - (m_n - m_p)c^2 + m_e c^2 \quad (4.18)$$

на границе $Q_n = 0$ исследовалась П.Э. Немировским, оценки которого приведены на рис. 11. Грубо эта зависимость аппроксимируется формулой [61]

$$Q_p = \left(33 - \frac{Z}{7}\right) \text{ МэВ}, \quad A = 4Z \text{ при } Q_n = 0, \quad Z \geq 6. \quad (4.19)$$

Пренебрегая энергией Ферми свободных нейтронов и считая, что нейтронизация с испарением нейтронов идет вдоль линии $Q_n = 0$, получим из (4.14) с учетом (2.21), (4.12) и (4.19) соотношение для определения $Z(\rho)$, $A(\rho)$:

$$\left[1 + \left(\frac{Z\rho}{10^6 A_0}\right)^{2/3}\right]^{1/2} = 1,96 \left(33 - \frac{Z}{7}\right) + 2,53; \quad A = 4Z. \quad (4.20)$$

Здесь учтено, что $m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$, $(m_n - m_p) c^2 = 1,293 \text{ МэВ}$. Расчеты с использованием (4.20) также приведены в табл. 10, откуда видно, что различие в давлении $P(\rho)$ для всех трех способов не превышает 20%. В то

же время это давление более чем в полтора раза превышает равновесное давление при той же плотности (табл. 7).

е) Неравновесный состав при остывании горячего плотного вещества.

Когда температура в остывающем веществе станет меньше $(4-5) \cdot 10^9$ К, реакции между заряженными частицами резко замедляются и концентрация ядер замораживается. В этих условиях возможно протекание реакций с нейтронами, фотоотщепление и захват нейтронов, e^- распады при $\epsilon_\beta > \epsilon_{Fe}$ и e^- -захваты при $\epsilon_\beta < \epsilon_{Fe}$. В условиях кинетического равновесия по бета-процессам (3.6) с $dN_n/dt = 0$, в веществе имеется большой избыток свободных нейтронов [224]. При конечной температуре ядра могут присоединять нейтроны и отщеплять их, если

$$-\epsilon_{Fn} < Q_n < Q_{nb} \approx 20 \text{ кТэВ} - \epsilon_{Fn}. \quad (4.21)$$

В условиях избытка нейтронов $x_n > 0,5$ процесс формирования неравновесного химического состава при быстром остывании вещества представлен на рис. 12 из [61, 287]. Плоскость (A, Z) для ядер разбита на три области:

I область с $Q_n > Q_{nb}$,

II область с $-\epsilon_{Fn} < Q_n < Q_{nb}$, $\epsilon_\beta > \epsilon_{Fe}$.

III область с $-\epsilon_{Fn} < Q_n < Q_{nb}$, $\epsilon_\beta < \epsilon_{Fe}$.

При высокой концентрации нейтронов существующие ядра быстро перейдут из области I в области II и III из-за нейтронного захвата. В областях II и III имеется равновесие по отношению к захвату и отщеплению нейтронов. В области II бета-распады приводят к росту Z и ядра переходят в область

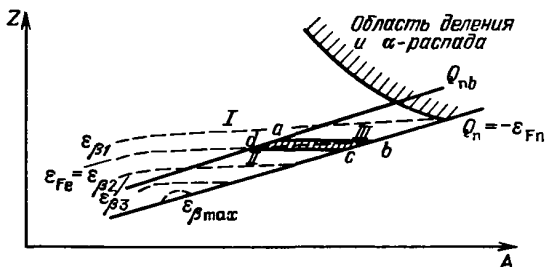
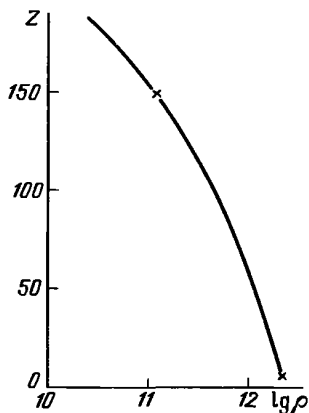


Рис. 12. Образование химического состава при остывании на стадии ограниченного равновесия. Линия $Q_n = -\epsilon_{Fn}$ отделяет область существования ядер. Линия Q_{nb} разделяет область I, где невозможно фотоотщепление нейтронов, и области II и III. Штриховые линии — уровни постоянного ϵ_β . $\epsilon_{\beta 1} < \epsilon_{\beta 2} < \dots < \epsilon_{\beta, \text{max}}$. В области I $Q_n > Q_{nb}$, в области II $Q_n < Q_{nb}$, $\epsilon_{Fe} < \epsilon_\beta$, в области III $Q_n < Q_{nb}$, $\epsilon_{Fe} > \epsilon_\beta$. Линия со штриховкой справа отделяет область деления и альфа-распада. Заштрихованная область $abcd$ определяет границы значений (A, Z) при ограниченном равновесии с данными $Q_{nb}(T)$ и $\epsilon_{Fe}(\rho)$

Рис. 13. Зависимость $Z(\rho)$ из (4.22) для неравновесного состава, образующегося при остывании плотного вещества, для $x_n = 1/2$. Крестиками указаны примерные границы неравновесности



выше линии cd . В области III бета-захваты уменьшают Z и переводят ядра в область ниже линии ab . Таким образом, в условиях ограниченного равновесия при $\epsilon_{Fe} \gg Q_{nb} \gg kT$, когда температурные эффекты не влияют на бета-процессы, ядерный состав определяется узкой областью $avcd$ на плоскости (A, Z) (рис. 12). Выход за пределы этой области не происходит из-за отсутствия допустимых бета-процессов и фотоотщеплений нейтронов. При $T \leq 5 \cdot 10^8$ К остается только одно ядро на границе (4.16).

Если пренебречь ϵ_{Fe} и учесть (4.18) и (4.19), то ядерный состав можно приближенно найти из соотношений, аналогичных (4.20),

$$A = 4Z, \quad Z = 7 \left\{ 33 - 0,511 \left[\left(\frac{\rho}{\mu_Z 10^6} \right)^{2/3} + 1 \right]^{1/2} + 1,293 \right\}. \quad (4.22)$$

Зависимость $Z(\rho)$ при $x_n = 1/2$ приведена на рис. 13. При $\rho = \rho_2 = 2,24 \cdot 10^{12}$ г·см⁻³ образуется ядро с $Z = 6$, обладающее $\epsilon_{\beta, \max}$, а при $\rho = \rho_1 = 1,2 \cdot 10^{11}$ г·см⁻³ образуется ядро с $Z = 150$, для которого $Z^2/A = Z/4 = 37,5$ и [164] время деления, зависящее от Z^2/A , есть $\tau_f = 3 \cdot 10^7$ лет. При $\rho < \rho_1$ величина Z^2/A растет, а время деления уменьшается. Ядерное деление, а также альфа-распад приводят к росту числа зародышевых ядер. Таким образом, при $\rho > \rho_2$ или $\rho < \rho_1$ химический состав может приблизиться к равновесному в состоянии СМЭ. Существенная неравновесность при остывании возможна только при $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Отличие неравновесности, образующейся при остывании, от той, которая образуется при холодной нейтронизации, имеется, в основном, при меньших плотностях, где для горячего случая получаются очень большие Z , см. табл. 10 и рис. 13. В то же время в обоих вариантах имеются принципиальные отличия от СМЭ, где $Z(\rho)$ увеличивается с ростом плотности, в то время как в обоих неравновесных составах $Z(\rho)$ быстро падает с ростом плотности.

ж) Термодинамические свойства вещества при учете кулоновского взаимодействия. Кулоновские взаимодействия в обычном веществе являются основными, определяющими агрегатное состояние, степени ионизации и поправки к термодинамическим функциям. В разреженных газах взаимодействия в основном локализованы внутри атомов и неполностью ободраных ионов. При нахождении степени ионизации по формуле Саха (1.8) происходит приближенный учет этого взаимодействия.

Основным параметром, характеризующим степень ионизации в разреженных газах, является величина $\lambda_{ij} = I_{ij}/kT$ (см. § 1). При уменьшении температуры и росте λ_{ij} газ становится нейтральным, а затем, когда тепловая энергия станет меньше энергии взаимодействия между атомами, превратится сначала в жидкое, а затем в твердое кристаллическое тело с упорядоченной структурой, обладающей минимумом энергии*). При сжатии вещества среднее расстояние между атомами $l = n_A^{-1/3} = Z^{1/3} n_e^{-1/3}$ уменьшается**) и при $\rho = \rho_{11}$ становится порядка размера атома $a_Z = Z^{-1/3} a_0$ в

*) Исключение составляет гелий-3 и 4, которые при нормальном давлении остаются жидкими при абсолютном нуле из-за квантовых эффектов [145].

**) Здесь в n_e включены и связанные электроны.

модели Томаса—Ферми (ТФ) [555], $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ — Боровский радиус. При $\rho = \rho_{i1}$ начинается ионизация давлением. Вещество становится полностью ионизованным при $\rho = \rho_{i2}$, когда межэлектронные расстояния становятся порядка радиуса ближайшей к ядру электронной орбиты $a_{Z0} = a_0 Z^{-1}$ [71]. Плотность ρ_{i1} находится с учетом (2.21) из соотношения

$$\frac{l}{a_Z} = \frac{Z^{2/3}}{n_e^{1/3} a_0} = (3\pi^2)^{1/3} \frac{Z^{2/3} \alpha}{y} = 1, \quad n_e = \frac{y^3}{3\pi^2} \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3}, \quad (4.23)$$

$$\rho_{i1} = \mu_Z m_u \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3} Z^2 \alpha^3 = 3\pi^2 \cdot 10^6 \mu_Z Z^2 \alpha^3 = 11,4 \mu_Z Z^2,$$

$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Аналогично для плотности ρ_{i2} имеем

$$\frac{Z}{n_e^{1/3} a_0} = (3\pi^2)^{1/3} \frac{Z \alpha}{y} = \theta_{i2}, \quad \theta_{i2} \geq 1 \quad (4.24)$$

$$\rho_{i2} = \frac{\mu_Z m_u}{\theta_{i2}^3} \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3} Z^3 \alpha^3 = \frac{3\pi^2}{\theta_{i2}^3} \cdot 10^6 \mu_Z Z^3 \alpha^3 = \frac{11,4}{\theta_{i2}^3} \mu_Z Z^3.$$

Отметим, что при $Z < \frac{\theta_{i2}}{\alpha(3\pi^2)^{1/3}} \approx 44\theta_{i2}$ полная ионизация давлением происходит при нерелятивистских электронах. Для железа ^{56}Fe имеем $\rho_{i1} = 1,7 \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\rho_{i2} = 4,4 \cdot 10^5 \theta_{i2}^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.

Рассмотрим фазовые превращения и кулоновские поправки к термодинамическим функциям в плотном, полностью ионизованном веществе.

В виду малости параметра $\beta_Z = \frac{Z^{2/3}}{n_e^{1/3} a_0} \left(\approx \frac{E_c}{Z \epsilon_{\text{Fe}}} \right)$ поправки при $T = 0$

можно находить методом последовательных приближений [3,555]. Основную поправку к кинетической энергии электронов дает электростатическое взаимодействие ионов в решетке и свободных электронов между собой, а также обменное взаимодействие электронов. В первом приближении электроны можно считать расположенными однородно. Энергия электростатического взаимодействия E_c наиболее просто рассчитывается в приближении Вигнера—Зейца (WS), где учитывается только взаимодействие ионов и электронов внутри сферической ячейки радиуса l_{WS}

$$\frac{4\pi}{3} l_{WS}^3 = n_{A,Z}^{-1}, \quad l_{WS} = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} l. \quad (4.25)$$

Энергия на одно ядро E_c в данном приближении есть [3,555]

$$\begin{aligned} E_c &= - \int_0^{l_{WS}} \frac{Ze}{r} dq_e + \int_0^{l_{WS}} \frac{q_e dq_e}{r} = - \frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{l_{WS}} = \\ &= - \frac{9}{10} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} Z^{5/3} \alpha m_e c^2 y, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $q_e = \frac{4\pi}{3} e n_e r^3$ — суммарный электрический заряд электронов внутри радиуса r , учтено также соотношение $l_{WS} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c} \frac{Z^{1/3}}{y}$ *).

В [555] учитывается поправка следующего порядка за счет неоднородности электронной плотности внутри ячейки в ТФ приближении. Эта поправка состоит из поправки к энергии Ферми E_{TF} и корреляционной поправки к электростатической энергии E_{cor} :

$$E_{TF} = - \frac{162}{175} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3} \sqrt{1+y^2} Z^{7/3} \alpha^2 m_e c^2, \quad *$$

$$E_{cor} = \left[0,031 \ln \left(\frac{e^2 m_e}{\hbar^2} l_{WS} \right) - 0,048 \right] Z \alpha^2 m_e c^2. \quad (4.27)$$

Последний член становится существенным при уменьшении плотности. Энергия обменного взаимодействия в общем случае есть [555]

$$E_{ex} = - \frac{3Z}{4\pi} \alpha m_e c^2 y \varphi(y),$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{4y^4} \left[\frac{9}{4} + 3 \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2} \right) \ln \beta - 6(\ln \beta)^2 - \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} \left(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) \right], \quad \beta = y + \sqrt{1+y^2}; \quad (4.28)$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \ll 1 \\ -1/2 & \text{при } y \gg 1. \end{cases} \quad (4.29)$$

В нерелятивистском пределе E_{ex} приведена в [3]. Таким образом, основные поправки к кинетической энергии холодного газа (2.22) за счет кулоновского взаимодействия для единицы массы равны с учетом (2.19)

$$E_q = \frac{1}{Am_u} (E_c + E_{TF} + E_{cor} + E_{ex}) =$$

$$= \left\{ - \frac{3}{10\pi^2} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3} \alpha Z^{2/3} y - \frac{54}{175\pi^2} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3} \alpha^2 Z^{4/3} \sqrt{1+y^2} + \right.$$

$$+ \frac{0,031\alpha^2}{3\pi^2} \ln \left[\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\alpha Z^{1/3}}{y} \right] - \frac{0,016}{\pi^2} \alpha^2 -$$

$$\left. - \frac{\alpha}{4\pi^3} y \varphi(y) \right\} \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \frac{y^3}{\rho}. \quad (4.29)$$

* Точное значение электростатической энергии на ядро W_L из (4.4) в 1,00454 раза меньше, чем E_c из (4.26).

Из термодинамического соотношения $P = \rho^2 \frac{dE}{d\rho}, \frac{dy}{d\rho} = \frac{1}{3} \frac{y}{\rho}$ находим

поправку к давлению

$$P_q = P_c + P_{TF} + P_{cor} + P_{ex} =$$

$$= -\frac{m_e^4 c^3}{\hbar^3} y^3 \left[\frac{1}{10\pi^2} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} \alpha Z^{2/3} y + \frac{18}{175\pi^2} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \alpha^2 Z^{4/3} \times \right. \\ \left. \times \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{0,031}{9\pi^2} \alpha^2 + \frac{\alpha}{4\pi^3} \frac{\chi(y)}{y^3} \right], \quad (4.30)$$

где

$$\chi(y) = \frac{y^4}{3} \frac{d}{dy} [y\varphi(y)] = \frac{1}{32} \left(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4} \right) + \frac{1}{4} \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) - \frac{9}{16} - \\ - \frac{3}{4} \left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2} \right) \ln \beta + \frac{3}{2} (\ln \beta)^2 - \frac{y}{3} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right) \left[\frac{1}{8} \left(\beta^3 - \frac{1}{\beta^3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left(\beta - \frac{1}{\beta^3} \right) - \frac{3}{2} \left(\beta + \frac{1}{\beta^3} \right) \ln \beta + \frac{3}{\beta} \ln \beta \right], \\ \chi(y) = \begin{cases} y^4/3 & \text{при } y \ll 1 \\ -y^4/6 & \text{при } y \gg 1. \end{cases}$$

Отсюда в предельных случаях имеем с учетом (2.32) и (2.33)

$$\frac{P_{qr}}{P_e} = -\frac{6}{5} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} \alpha Z^{2/3} - \frac{216}{175} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \alpha^2 Z^{4/3} - \frac{0,124}{3} \frac{\alpha^2}{y} + \\ + \alpha/2\pi = -4,56 \cdot 10^{-3} Z^{2/3} - 1,78 \cdot 10^{-5} Z^{4/3} - \\ - \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{y} + 1,16 \cdot 10^{-3} \quad (4.31)$$

для $y \gg 1$ [555].

$$\frac{P_{qnr}}{P_e} = -\frac{3}{2} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/3} \alpha \frac{Z^{2/3}}{y} - \frac{54}{35} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \alpha^2 Z^{4/3} - \frac{0,155 \alpha^2}{3y^2} - \\ - \frac{5\alpha}{4\pi y} = -5,7 \cdot 10^{-3} \frac{Z^2}{y} - 2,23 \cdot 10^{-5} Z^{4/3} - \frac{2,75 \cdot 10^{-6}}{y^2} - \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{y} \quad (4.32)$$

для $y \ll 1$. Формулы (4.30), (4.32) применимы только для значений y , при которых $P_q/P_e \ll 1$. С уменьшением плотности кулоновское взаимодействие качественно меняет вид уравнения состояния. В [647] приведено приближенное аналитическое соотношение для уравнения состояния:

$$\rho = \rho_0(\xi + \varphi)^3, \quad \xi^5 \equiv P/P_0, \quad (4.33)$$

где

$$\rho_0 = \frac{32}{3} \pi^{-3} A Z m_u a_0^{-3} = 3,88 Z A \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (4.34)$$

$$P_0 = Z^{10/3} \frac{2^8 (2\pi)^{1/3}}{15\pi^4} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{m_e c^2}{a_0^3} = 9,52 \cdot 10^{13} Z^{10/3} \text{дин} \cdot \text{см}^{-2}$$

$$\varphi = \frac{1}{20} 3^{1/3} + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \pi^{-2} Z^{-2} \right)^{1/3}, \quad a_0 = \hbar^2 / m_e e^2,$$

при $\rho \gg \rho_0$, $\zeta \gg \varphi$ уравнение состояния (4.33) сводится к (39.3).

В силу квантовых свойств вещества ионы в решетке при абсолютном нуле совершают колебания с частотой, определяемой взаимодействием с электронами. В WS приближении возвращающая сила, действующая на ион со стороны электронов в ячейке при отклонении от равновесия, есть

$$F(r) = - \frac{Z e q_e}{r^2} = - \frac{4\pi}{3} Z e^2 n_e r,$$

что приводит к частоте гармонических колебаний [125, 555]

$$\omega_i^2 = \frac{F(r)}{A m_u r} = \frac{4\pi}{3} \frac{Z e^2 n_e}{A m_u} = \frac{4}{9\pi} \frac{Z y^3}{A m_u} \alpha \frac{m_e^3 c^4}{\hbar^2}. \quad (4.35)$$

Нулевую энергию трехмерного осциллятора $E_{zp} = \frac{3}{2} \hbar \omega_i$ следует сравнивать с E_c из (4.26). Имеем

$$f = \frac{E_{zp}}{E_c} = \frac{5}{3} \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{1/6} \left(\frac{m_e}{m_u} \right)^{1/2} \left(\frac{y}{\alpha A Z^{7/3}} \right)^{1/2} = \left(0,11 \frac{y}{A Z^{7/3}} \right)^{1/2} \quad (4.36)$$

При $f \geq 1$ кулоновский кристалл разрушается уже при нулевой температуре за счет квантовых колебаний. При этом необходимы слишком большие плотности $\rho > 7,5 \cdot 10^8 \mu_Z A^3 Z^7$, так что в холодных звездах нулевые колебания не разрушают кристаллической структуры.

Более реальным является разрушение кристалла тепловыми движениями ионов [485, 620]. Плавление кристалла происходит при $T = T_m$, когда кинетическая энергия колебаний kT составляет $\sim 1/150$ от кулоновской энергии WS ячейки [544, 245, 578]*). Имеем с учетом (4.26)

$$kT_m = 0,003 \alpha m_e c^2 Z^{5/3} y, \quad (4.37)$$

$$T_m = 1,3 \cdot 10^5 Z^{5/3} \left(\frac{\rho}{\mu_Z 10^6} \right)^{1/3} \text{ К.}$$

*) В работе [578] с помощью расчетов по методу Монте-Карло получено $\Gamma = Z^2 e^2 / (k T l_{WS}) = 178 = \Gamma_m$ в точке плавления кристалла, l_{WS} дано в (4.25).

Термодинамические свойства кристаллических тел хорошо известны [145]. При малых температурах возбуждаются только степени свободы, соответствующие длинным волнам (малым частотам). Эти моды колебаний (фононы) обладают свойствами, аналогичными фотонному газу. Напротив, при больших температурах возбуждаются все возможные моды колебаний. При этом энергия колебаний кристалла в два раза больше кинетической энергии вещества в газовом состоянии при той же температуре. В общем случае для тепловой энергии ионной решетки на единицу массы справедлива интерполяционная формула Дебая [145]

$$E_{iT} = \frac{3kT}{Am_u} \mathcal{D}\left(\frac{\theta}{T}\right),$$

$$\mathcal{D}(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{z^3 dz}{e^z - 1} - \text{функция Дебая,} \quad (4.38)$$

$$\theta = 0,775 \frac{\hbar \omega_i}{k} = \frac{3,5 \cdot 10^3 \sqrt{\rho}}{\mu_z} \text{ К,}$$

θ — дебаевская температура кулоновской решетки [145, 620]. Здесь ω_i — частота ионных колебаний в кристалле (4.35). В предельных случаях функция $\mathcal{D}(x)$ равна [145] *)

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} \frac{\pi^4}{5x^3} - 3e^{-x} & \text{при } x \gg 1, \\ 1 - \frac{3}{8}x + \frac{x^2}{20} & \text{при } x \ll 1. \end{cases} \quad (4.39)$$

Энтропия единицы массы и давление, связанные с ионным кристаллом, равны [145]

$$S_{iT} = \frac{k}{Am_u} \left[-3 \ln(1 - e^{-\frac{\theta}{T}}) + 4 \mathcal{D}\left(\frac{\theta}{T}\right) \right],$$

$$P_{iT} = \frac{3}{2} \frac{\rho k T}{Am_u} \mathcal{D}\left(\frac{\theta}{T}\right) = \frac{\rho E_{iT}}{2}. \quad (4.40)$$

В предельных случаях

$$S_{iT} = \begin{cases} \frac{3k}{Am_u} \left(\ln \frac{\theta}{T} + \frac{4}{3} \right) & \text{при } T \gg \theta, \\ \frac{4}{5} \frac{\pi^4}{Am_u} \frac{k T^3}{\theta^3} & \text{при } T \ll \theta. \end{cases} \quad (4.41)$$

*) В [227] в пределе $\theta \gg T$ энергия принималась в 4/3 раза большей, чем в (4.38), (4.39).

В зависимости от соотношения между температурами T , T_m и θ имеем следующие состояния ионизованного вещества:

$T < \theta < T_m$	$\theta < T < T_m$	$\theta < T_m < T$	$T_m < \theta < T$	$T < T_m < \theta$	$T_m < T < \theta$
Квантовый (вырожденный) кристалл	Классический ионный кристалл	Классическая жидкость (неидеальная плазма)			Квантовая жидкость

Плавнение ионного кристалла при $T > T_m > \theta$ сопровождается выделением тепла, а при дальнейшем росте температуры происходит переход к идеальному газу с $E_{iT} = \frac{3}{2} kT/Am_u$. Согласно [544, 245, 578] приближение идеального газа становится применимым при

$$T_g \approx 150 T_m \approx 2 \cdot 10^7 Z^{5/3} (\rho/\mu_Z \cdot 10^6)^{1/3} \text{ К.} \quad (4.42)$$

В промежутке $T_m < T < 150 T_m$ можно использовать интерполяцию. Вопрос о теплоте плавления не вполне ясен. В [485] приводятся аргументы в пользу очень малой теплоты плавления при постоянных T и ρ . В [620] из других соображений предполагается, что фазовый переход относится к первому роду и теплота плавления решетки при постоянных T и ρ есть

$$\delta U_{\text{сoul}} \approx -\frac{3}{4} kT_m. \quad (4.43)$$

Строгого решения этой проблемы не сделано.

Наиболее сложен для количественного описания промежуточный интервал плотностей $\rho_{i1} < \rho < \rho_{i2}$, где степень ионизации определяется как тепловой энергией, так и давлением. В ТФ приближении процесс ионизации холодного вещества давлением исследован в [126]. Оболочечные поправки приводят к скачкам давления при каждой последующей ионизации, при плотностях

$$\rho_n = \left(\frac{\kappa}{\pi n} \right)^6 \mu_Z m_u \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3} Z^4 \alpha^3, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.44)$$

$$\kappa = 3 \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/6} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1,56.$$

Зависимость немонотонной поправки к давлению от плотности задается формулой [126]

$$\delta P = -12 \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{1/6} \kappa \frac{Z^{5/3} v^{4/3}}{\ln(Z^3 v)} [S_0] \frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} \alpha^5, \quad (4.45)$$

где

$$v = \frac{Am_u}{\rho} \alpha^3 \frac{m_e^3 c^4}{\hbar^3}, \quad S_0 = \kappa Z^{1/2} v^{1/6} - \pi/2, \quad (4.46)$$

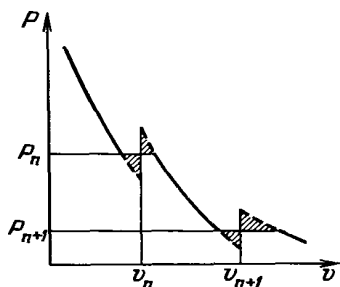
$[f(S_0)] = f(S_0)$ при $-\pi/2 < S_0 < \frac{\pi}{2}$ с периодическим продолжением вне

этой области. Скачки давления (4.45), возникающие при $\rho = \rho_n$ и $v = v_n = \frac{1}{Z^3} \left(\frac{\pi n}{\kappa} \right)^6$, соответствуют фазовым переходам первого рода. В окрестности $\rho = \rho_n$ давление электронов постоянно, причем величина P_n находится по правилу Максвелла (равенство площадей, рис. 14). Оболочечные эффекты исчезают, согласно (4.44), при

$$\rho > \rho_1 = 0,015 \mu_Z m_u \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3} \alpha^3 Z^4, \quad (4.47)$$

когда все уровни энергии уходят в непрерывный спектр. По физическому

Рис. 14. Схематическая зависимость давления от удельного объема при учете оболочечных эффектов. Постоянные уровни давления P_n находятся из равенства заштрихованных площадей



смыслу $\rho_1 \leq \rho_{i2}$ из (4.24). Если принять, что при $\rho_1 = \rho_{i2}$ электроны становятся релятивистскими с $y = 1$, то получаем $\theta_{i2} = 1,11$ и условие $Z \leq 49$ для применимости нерелятивистского ТФ-рассмотрения процесса ионизации [126].

Термодинамические свойства смеси водорода и гелия при конечной температуре с учетом взаимодействия и ионизации давлением изучались в [403]. Учитывались соединения H_2 , H , H^+ , H^- , He , He^+ , He^{++} . Для данной температуры T и полного числа ионов N_i в объеме V вычисляется свободная энергия F в виде

$$F = F_0 + F_c, \quad (4.48)$$

где F_0 соответствует идеальному газу, а F_c отражает кулоновское взаимодействие. Давление P , энтропия S и энергия системы E находятся из соотношений

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N_i},$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N_i}, \quad (4.49)$$

$$E = F + TS.$$

Кулоновское взаимодействие учитывается здесь также в виде поправок к идеальному газу

$$P = P_0 + P_c, \quad S = S_0 + S_c, \quad E = E_0 + E_c. \quad (4.50)$$

На основе ТФ теории с дебай-хьюккелевским потенциалом вокруг ядра (ТФДХ) имеем [403]

$$F_c = -\frac{kTV}{12\pi} \kappa_{\mathcal{D}}^3, \quad (4.51)$$

$$\kappa_{\mathcal{D}}^2 = \frac{4\pi e^2}{kT} (n_i + n_e \theta_e), \quad n_i = \frac{N_i}{V}, \quad n_e = \frac{N_e}{V},$$

$$\theta_e = F'_{1/2}(\eta)/F_{1/2}(\eta),$$

где $F_\alpha(\eta)$ — функции Ферми из (2.49), ηkT — химический потенциал свободных электронов, $\kappa_{\mathcal{D}}^{-1}$ — дебаевский радиус (см. также (8.47)), и предполагается, что все ионы имеют одинаковый средний заряд $Z = 1$. Для рассмотренной смеси с $x_H = 0,739$, $x_{He} = 0,261$ величина Z меняется от единицы до 1,0811 при изменении состава от полностью нейтрального до полностью ионизованного, n_e — концентрация свободных электронов. С учетом (4.51), поправки к термодинамическим функциям равны

$$P_c = -F_c \left(\frac{1}{V} + \frac{3}{\kappa_{\mathcal{D}}} \frac{\partial \kappa_{\mathcal{D}}}{\partial V} \right),$$

$$S_c = -F_c \left(\frac{1}{T} + \frac{3}{\kappa_{\mathcal{D}}} \frac{\partial \kappa_{\mathcal{D}}}{\partial T} \right), \quad (4.52)$$

$$E_c = \frac{kT^2}{4\pi} V \kappa_{\mathcal{D}}^2 \frac{\partial \kappa_{\mathcal{D}}}{\partial T}.$$

Результаты ТФДХ рассмотрения верны при

$$\Gamma_e = \frac{e^2}{kT} \left(\frac{4\pi}{3} n_e \right)^{1/3} \ll 1. \quad (4.53)$$

В [403] ТФДХ теория применяется при $\Gamma_e < 0,1$, при $\Gamma_e > 1$ используются результаты расчетов Монте-Карло, а при $0,1 < \Gamma_e < 1$ результаты обоих методов интерполируются.

Для определения степени ионизации используется уравнение Саха, в котором учитывается, в дополнение к (1.8), конечная степень вырождения свободных электронов, влияющая на их химический потенциал. Сдвиг уровней ионов и молекул при учете экранирующего ДХ потенциала приводит к уменьшению числа связанных состояний и уменьшению их глубины. Их учет в формуле Саха отражает ионизацию давлением. В целом, учет ионизации давлением сводится к сложной самосогласованной проблеме, в которой концентрация свободных электронов n_e и ионов n_i определяет ДХ радиус и потенциал, а те, в свою очередь, определяют концентрацию посредством сдвига уровней, входящих в уравнение Саха. Задача осложняется отсутствием аналитических решений для уравнения Шредингера с ДХ потенциалом [240], поэтому необходимы численные расчеты. Результаты таких расчетов, выполненных в [403], представлены на рис. 15 и 16. Таблицы уравнения состояния с учетом кулоновского взаимодействия, рассчитанные аналогичным способом, даны в [358].

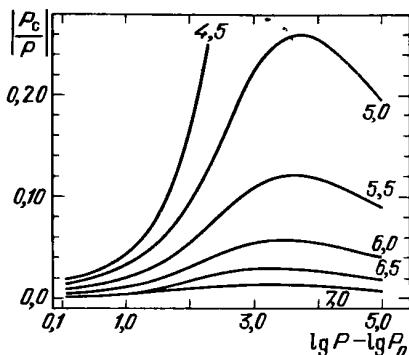
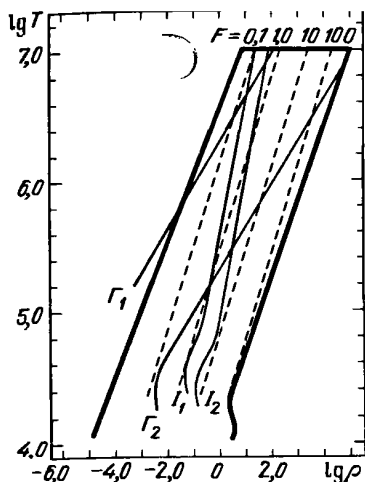


Рис. 15. Область на плоскости $(\lg \rho, \lg T)$, где рассчитывались термодинамические функции [403]. Слева от линии $\Gamma_e = \Gamma_1 = 0,1$ расчеты велись по ТФДХ теории, справа от линии $\Gamma_e = \Gamma_2 = 1,0$ по методу Монте-Карло (см. (4.53)). Слева от линии I_1 водород и гелий частично ионизованы, между линиями I_1 и I_2 водород ионизован полностью, а гелий частично, а справа от линии I_2 оба ионизованы полностью, штрихами указаны линии постоянного значения $F = 4F_1 p_2(\eta)/\sqrt{\pi}$, характеризующие вырождение, в невырожденной плазме $F \ll 1$.

Рис. 16. Отношение кулоновской поправки к давлению к полному давлению при $T = \text{const}$. На каждой кривой указана величина $\lg T$, для которой $\lg P_0 = 2,74118 \lg T - 4,58825$

Задача. Сделать гладкую интерполяцию уравнения состояния холодного вещества нейтронных звезд.

Решение [14]. Гладкая с первой производной интерполяция уравнения состояния $P(\rho)$ из табл. 9 [479] определяется следующими формулами (ρ — полная плотность массы-энергии с учетом взаимодействия):

$$P = \begin{cases} P^{(1)} = b_1 \rho^{5/3} / (1 + c_1 \rho^{1/3}), & \rho \leq \rho_1 \\ P^{(k)} = a \cdot 10^{b_k (\lg \rho - 8,419)^{c_k}}, & \rho_{k-1} \leq \rho \leq \rho_k, \end{cases} \quad (1)$$

$$k = 2, 3 \dots 6.$$

$$\begin{aligned} a &= 10^{26,1673}, & c_1 &= 10^{-2,257}, & \rho_1 &= 10^{9,419}, \\ b_1 &= 10^{12,40483}, & c_2 &= 1,1598, & \rho_2 &= 10^{11,5519}, \\ b_2 &= 1, & c_3 &= 0,356293, & \rho_3 &= 10^{12,26939}, \\ b_3 &= 2,5032, & c_4 &= 1,2972138, & \rho_4 &= 10^{14,302}, \\ b_4 &= 0,70401515, & c_5 &= 2,117802, & \rho_5 &= 10^{15,0388}, \\ b_5 &= 0,16445926, & c_6 &= 1,237985, & \rho_6 &\geq \rho_5, \\ b_6 &= 0,86746415, \end{aligned}$$

Непрерывность производных $dP/d\rho$ в точках $\rho = \rho_k$ из (1) достигается с помощью сглаживания в виде

$$P(\rho) = \begin{cases} P^{(k)}, & \rho \in [\rho_{k-1} + \xi_{k-1}, \rho_k - \xi_k], \quad k = 1, 2, \dots, 6, \\ \theta_k P^{(k)} + (1 - \theta_k) P^{(k+1)}, & \rho \in [\rho_k - \xi_k, \rho_k + \xi_k], \\ \rho_0 + \xi_0 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\theta_k = \theta_k(\rho) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2\xi_k} (\rho - \rho_k) \right),$$

$$\xi_k = 0,01 \rho_k.$$

ГЛАВА 2

ЛУЧИСТЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Звезда излучает с поверхности энергию, производимую в ее центральных частях за счет ядерных реакций или гравитационного сжатия. Свободный пробег фотонов обычно гораздо больше, чем у частиц. Фотоны определяют лучистую теплопроводность, которая является основным механизмом передачи энергии в звезде в отсутствие конвекции. В очень плотных звездах (белых карликах, нейтронных звездах), где вещество является вырожденным, плотность лучистой энергии относительно мала, а свободный пробег частиц вырожденного газа велик. Поэтому в белых карликах наиболее важна теплопроводность электронов, а в нейтронных звездах важна и теплопроводность нейтронов. *)

Потери энергии звездой происходят за счет выхода фотонов в прозрачные слои и свободного их улета на бесконечность. В переходной области с оптической толщиной $\tau = \int_{r_f}^{\infty} \sigma n dr \leq 1$ (σ — сечение взаимодействия фотона с частицей вещества, n — концентрация частиц, r_f — радиус фотосферы) формируется спектр излучения звезды. Наиболее общее описание излучения в звездах, как в прозрачных, так и в непрозрачных областях, дает уравнение переноса, которое является кинетическим уравнением для фотонов.

§ 5. Уравнение переноса энергии

Все фотоны движутся со скоростью света c и не подвержены действию внешних сил. Мы не рассматриваем здесь сильных гравитационных полей, приводящих, согласно общей теории относительности (ОТО) к красному смещению и к искривлению траекторий фотонов. Функция распределения фотонов f_ν ($\text{см}^{-3} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1}$) зависит от времени t , координат x_i , энергии фотона $h\nu$ и направления его движения, определяемого единичным

*) Нейтринные потери энергии, доминирующие при очень высоких температурах, рассмотрены в § 19.

вектором l_i [159, 215]. Число фотонов dn_ν в элементе объема dV в интервале частот $d\nu$, двигающихся внутри телесного угла $d\Omega$ равно

$$dn_\nu = f_\nu(t, x_i, \nu, l_i) dV d\nu d\Omega. \quad (5.1)$$

Так как свободные фотоны движутся прямолинейно с одинаковой скоростью c , количество энергии dE_ν , проходящее за время dt внутри интервала $d\nu d\Omega$ через площадку $d\sigma$, равно энергии фотонов внутри объема

$$dV = (l_i \cdot d\sigma_i) c dt, \quad (5.2)$$

$d\sigma_i$ — вектор нормали к площадке длиной $d\sigma$ (рис. 17). Имеем

$$dE_\nu = h\nu dn_\nu = f_\nu d\nu d\Omega h\nu dV = f_\nu ch\nu d\nu d\Omega dt (l_i d\sigma_i). \quad (5.3)$$

В теории переноса излучения вместо функции f_ν , характеризующей концентрацию квантов (5.1), используют спектральную интенсивность излучения I_ν ($\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$),

$$I_\nu = ch\nu f_\nu, \quad (5.4)$$

связанную с потоком энергии (5.3). Интенсивность излучения является более естественным способом описания постоянно движущихся фотонов, чем их концентрация.

Проходя слой вещества толщиной ds , интенсивность I_ν уменьшается за счет поглощения:

$$dI_\nu|_a = -\alpha_\nu \rho I_\nu ds \quad (5.5)$$

и возрастает за счет собственного излучения среды:

$$dI_\nu|_e = j_\nu \rho ds. \quad (5.6)$$

Здесь α_ν ($\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$) — спектральный коэффициент поглощения, а j_ν ($\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$) — коэффициент излучения, отнесенный к единице массы вещества. Часть излучения, потерянная падающим пучком,

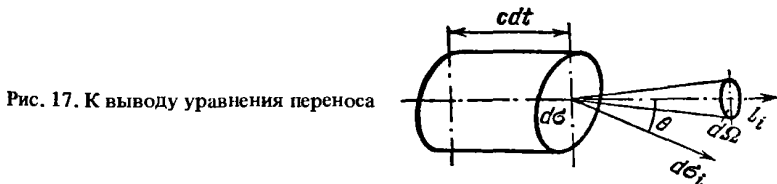


Рис. 17. К выводу уравнения переноса

перераспределится по другим направлениям. Если при этом частота сохраняется, то такой процесс называется когерентным рассеянием. Изменение интенсивности за счет рассеяния есть

$$dI|_s = \left[-\sigma_\nu I_\nu + \int \sigma_{\nu l} (l'_i \cdot l_i) I_\nu(l'_i) \frac{d\Omega'}{4\pi} \right] \rho ds. \quad (5.7)$$

Здесь первый член означает уменьшение интенсивности за счет рассеяния из данного направления l_i , а второй — увеличение интенсивности в направлении l_i за счет прибавки фотонов, рассеянных из направлений l'_i . Сечение зависит от угла между l_i и l'_i , т.е. от $\cos \theta = l_i \cdot l'_i$. Усредненный по направле-

нию коэффициент рассеяния σ_ν (см²/г) есть

$$\sigma_\nu = \int_0^\pi \sigma_{\nu l}(\cos \tilde{\theta}) \frac{\sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta}}{2} \left(= \int \sigma_{\nu l} \cdot \frac{d\Omega'}{4\pi} = \int \sigma_{\nu l} \frac{d\Omega}{4\pi} \right), \quad (5.8)$$

а нормировка $\sigma_{\nu l}$ выбрана так, что для изотропного рассеяния $\sigma_{\nu l} = \sigma_\nu$. Приравнявая конвективную часть изменения интенсивности

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} \right) ds$$

к сумме (5.5) – (5.7), получаем уравнение переноса [219]

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = -\alpha_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho - \sigma_\nu \rho I_\nu + \rho \int_{\Omega'} \sigma_{\nu l}(\cos \tilde{\theta}) I_\nu(l'_i) \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (5.9)$$

Здесь $\partial I_\nu / \partial s$ – производная по направлению распространения луча. В декартовой системе

$$\partial I_\nu / \partial s = l_i \frac{\partial I_\nu}{\partial x_i}. \quad (5.10)$$

В случае плоской симметрии $I_\nu(z, \theta, \nu, t)$, $\frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \frac{\partial I_\nu}{\partial y} = 0$, $l_z = \cos \theta$, θ – угол между осью z и направлением луча, левая часть (5.9) есть

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (5.11)$$

В сферически-симметричном случае $I_\nu(r, \theta, \nu, t)$, θ – меняющийся вдоль пути угол между радиусом-вектором точки и направлением луча $\partial r / \partial s = \cos \theta$, $\partial \theta / \partial s = -\sin \theta / r$ (рис. 18). При этом левая часть (5.9) принимает вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta}. \quad (5.12)$$

В локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) величины j_ν и α_ν связаны законом Кирхгофа *)

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T), \quad (5.13)$$

где

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{зрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}) \quad (5.14)$$

– интенсивность равновесного планковского излучения [145].

) Для учета вынужденного излучения α_ν в (5.9) нужно заменить (см. § 21) на $\alpha_\nu^ = \alpha_\nu(1 - e^{-h\nu/kT})$ (5.13а).

Угловая зависимость сечения рассеяния задается углом $\tilde{\theta}$, $l_i l_i' = \cos \tilde{\theta}$, который выражается через углы исходного (θ , φ) и рассеянного (θ' , φ') луча с помощью соотношения [219]

$$\begin{aligned} \cos^2 \tilde{\theta} = & \cos^2 \theta \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \cos^2 (\varphi - \varphi') + \\ & + 2 \cos \theta \cos \theta' \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Когда частота при рассеянии меняется, то оно называется некогерентным.

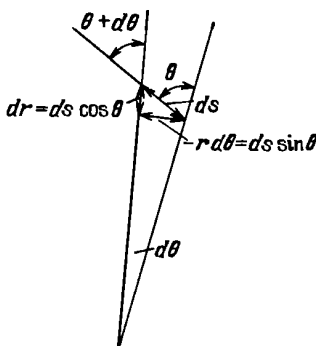


Рис. 18. Перенос излучения в сферической геометрии

В этом случае два последних члена в (5.9) следует заменить на

$$\begin{aligned} \rho \int \left[\frac{\nu}{\nu'} K(\tilde{\theta}, \nu' \rightarrow \nu) I_{\nu}' \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_{\nu} \right) - K(\tilde{\theta}, \nu \rightarrow \nu') \times \right. \\ \left. \times I_{\nu} \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I_{\nu}' \right) \right] d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\int K(\tilde{\theta}, \nu \rightarrow \nu') d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} = \sigma_{\nu},$$

где учтены вынужденные процессы рассеяния (см. § 21). Часто вместо реальных угловых зависимостей при рассеянии (см. § 7) используют приближение изотропного рассеяния, для которого последний член в (5.9) после интегрирования по $d\varphi'$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \rho \sigma_{\nu} \int_0^{\pi} I_{\nu}(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (5.17)$$

§ 6. Эддингтоновское приближение.

Лучистая теплопроводность

Свободный пробег фотона внутри звезды обычно много меньше ее размера, поэтому перенос излучения там достаточно рассмотреть в приближении лучистой теплопроводности. Параметры фотосферы, где $\tau \lesssim 1$, входят как граничные условия для уравнений, описывающих строение звезды (см. гл. 6). При этом используются только усредненные свойства поля излучения. Для получения граничных условий часто пользуются прибли-

жением Эддингтона [197], которое позволяет единым способом описать как прозрачные, так и непрозрачные области. Точные решения уравнения переноса изучаются в теории звездных атмосфер, где получают теоретические спектры для сопоставления с наблюдаемыми [159, 197, 219].

а) Моменты уравнения переноса. Приближенное описание поля излучения основано на рассмотрении усредненных по углу и частоте характеристик. Для этого рассмотрим моменты уравнения переноса (5.9). Интегрируя (5.9) по $d\Omega dv$ с учетом (5.10) в декартовой системе координат и при наличии ЛТЕ (5.13), (5.14), получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu dv - \alpha_P B(T) \right]. \quad (6.1)$$

Аналогичное интегрирование с весом l_i дает

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F_i}{\partial t} + c \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = -\kappa \rho F_i. \quad (6.2)$$

Здесь S_ν (зрг $\cdot$ см $^{-3} \cdot$ Гц $^{-1}$) и S (зрг $\cdot$ см $^{-3}$) — спектральная и полная плотность лучистой энергии:

$$S_\nu = \frac{1}{c} \int_\Omega I_\nu d\Omega, \quad S = \int_0^\infty S_\nu dv; \quad (6.3)$$

F_i — плотность потока лучистой энергии (зрг $\cdot$ см $^{-2} \cdot$ с $^{-1}$):

$$F_i = \int_{\Omega, \nu} I_\nu l_i d\Omega dv; \quad (6.4)$$

$B(T)$ — плотность энергии равновесного излучения (зрг $\cdot$ см $^{-3}$):

$$B(T) = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} B_\nu(T) d\Omega dv = \frac{8\pi (kT)^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = aT^4, \quad (6.5)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} [145], \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} \text{ (см. § 1)}.$$

Члены с рассеянием в правой части (5.9) выпадают после интегрирования из (6.1) в силу (5.8), из которого следует равенство

$$\sigma_\nu \int_\Omega I_\nu(l_i) d\Omega = \int_\Omega d\Omega \int_{\Omega'} \frac{d\Omega'}{4\pi} \sigma(\cos \tilde{\theta}) I_\nu(l'_i). \quad (6.6)$$

Величина P_{ik} — тензор давлений поля излучения (зрг $\cdot$ см $^{-3}$) есть

$$P_{ik} = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} I_\nu l_i l_k d\Omega dv. \quad (6.7)$$

Член с излучением выпал из (6.2) в силу равенства $\int_\Omega \cos \theta d\Omega = 0$, а последний член в (5.9) обращается в нуль только для четных функций $\sigma(x)$, для которых $\int_\Omega \sigma_\nu l(\cos \theta) \cos \theta d\Omega = 0$. В случае релятивистских электронов [21] этот член остается после интегрирования и его следует добавить к (6.2).

Ввиду того что поток излучения определяется частотами, на которых поглощение и рассеяние минимально, в (6.2) используется Росселандово усреднение α_ν и σ_ν по частоте [229]:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu}, \quad (6.8)$$

где $B_\nu(T)$ дано в (5.14), а $\kappa_\nu = \alpha_\nu + \sigma_\nu$. В (6.1) более правильно использовать значение $\langle \alpha_\nu \rangle = \alpha_P$, усредненное по Планку [197],

$$\alpha_P = \frac{4\pi \int_0^\infty \alpha_\nu B_\nu(T) d\nu}{cB(T)}. \quad (6.9)$$

б) Плоская атмосфера. В этом случае в силу плоской симметрии в (6.1), (6.2) остаются следующие компоненты F_i и P_{ik} :

$$F = F_z = \int_{\Omega, \nu} I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu, \quad (6.10)$$

$$P = P_{zz} = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} I_\nu \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (6.11)$$

Имеем тогда вместо (6.1) и (6.2) в стационарном случае

$$\frac{dF}{dz} = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu - \alpha_P B(T) \right], \quad (6.12)$$

$$c \frac{dP}{dz} = -\kappa \rho F. \quad (6.13)$$

В атмосфере звезды принимается условие лучистого равновесия, эквивалентное условию постоянства потока F в (6.12):

$$F = \text{const} = L/4\pi R^2, \quad L - \text{светимость}, \quad (6.14)$$

$$\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu = \alpha_P B(T), \quad R - \text{радиус звезды}.$$

В эддингтоновском приближении принимается

$$P = \frac{1}{3} S, \quad (6.15)$$

как в случае равновесного излучения. Это условие получается, если из (6.11) вынести за знак интеграла среднее значение $\langle \cos^2 \theta \rangle =$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \cos^2 \theta d\Omega = 1/3. \text{ Для серой атмосферы } \alpha_\nu = \alpha_P = \kappa = \text{const} \text{ имеем}$$

$$S = B(T) = aT^4. \quad (6.16)$$

Вводя оптическую толщину

$$\tau = \int_z^{\infty} \kappa \rho dz, \quad (6.17)$$

находим решение (6.13) в виде

$$\frac{dS}{d\tau} = 3 \frac{F}{c}, \quad S = 3 \frac{F}{c} \tau + \text{const.} \quad (6.18)$$

Для нахождения постоянной в (6.18) следует учесть, что при $\tau \rightarrow 0$ остаются только кванты, летящие в направлении углов $0 \leq \theta \leq \pi/2$. В этом интервале $\langle \cos \theta \rangle = 1/2$, и Эддингтоном принято

$$F = \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{\pi/2} I_{\nu} \cos \theta d\Omega \approx \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_0^{\pi/2} I_{\nu} d\Omega = \frac{cS(0)}{2}. \quad (6.19)$$

Тогда в (6.18) имеем $\text{const} = 2 \frac{F}{c}$ и

$$S = 2 \frac{F}{c} \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (6.20)$$

Если учесть (6.16) и ввести $\frac{ac T_{\text{ef}}^4}{4} = F$, то решение (6.20) примет вид

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{\text{ef}}^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (6.21)$$

Фотосфера определяется условием $T = T_{\text{ef}}$ и расположена при $\tau = 2/3 = 0,667$, $T(0) = \frac{1}{2^{1/4}} T_{\text{ef}} = 0,841 T_{\text{ef}}$. Чандрасекхар [219] показал, что вместо (6.19) точнее использовать граничное условие

$$F = \frac{cS(0)}{\sqrt{3}}. \quad (6.22)$$

Тогда

$$\text{const} = \frac{\sqrt{3} F}{c}, \quad S = 3 \frac{F}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \tau \right), \quad T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{ef}}^4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \tau \right). \quad (6.23)$$

Фотосфера расположена здесь при $\tau = 4/3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,756$,

$$T(0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^{1/4} T_{\text{ef}} = 0,811 T_{\text{ef}}.$$

в) Сферически-симметричный случай. В этом случае для ненулевых компонент имеем

$$F = F_r = \int_{\Omega, \nu} I_{\nu} \cos \theta d\Omega d\nu, \quad (6.24)$$

$$P = P_{rr} = \frac{1}{c} \int_{\Omega, \nu} I_{\nu} \cos^2 \theta d\Omega d\nu, \quad (6.25)$$

но, в отличие от (6.10)–(6.11) угол θ здесь отсчитывается от направления радиуса-вектора в данной точке и меняется при нерадиальном движении. Используя левую часть уравнения переноса в виде (5.12), в стационарном случае получаем следующие уравнения моментов:

$$\frac{dF}{dr} + 2 \frac{F}{r} = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu - \alpha_P B(T) \right], \quad (6.26)$$

$$\frac{dP}{dr} - \frac{S - 3P}{r} = -\kappa \rho \frac{F}{c}. \quad (6.27)$$

В сферически-симметричном случае $F \sim 1/r^2$, $S \sim 1/r^2$ при $\tau \rightarrow 0$, поэтому вместо (6.15) используется переменный фактор Эддингтона [159]

$$P = fS, \quad f = \begin{cases} 1/3 & \text{при } \tau \rightarrow \infty, \\ 1 & \text{при } \tau \rightarrow 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

В случае лучистого равновесия

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (6.29)$$

При $\tau \rightarrow 0$ и больших радиусах излучение сильно дилутировано, $\cos \theta \approx 1$ и вместо (6.19) имеем

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = cS(\tau \rightarrow 0). \quad (6.30)$$

С учетом (6.28)–(6.30) решение (6.27) при $\tau \rightarrow 0$ имеет вид

$$S = \frac{L}{4\pi r^2 c} (\tau + 1). \quad (6.31)$$

При больших τ внутри звезд излучение всегда близко к равновесному и выполняются соотношения (6.15) и (6.16). Тогда из (6.27) имеем в приближении лучистой теплопроводности

$$L(r) = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} 4\pi r^2. \quad (6.32)$$

Подставив (6.16) в (6.31) и дифференцируя, имеем при $\tau \rightarrow 0$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{2} T_0 R_0^{1/2} r^{-3/2}, \quad T_0^4 = \frac{L}{4\pi ac R_0^2}. \quad (6.33)$$

Интерполируя (6.32) и (6.33), получаем приближенное уравнение, определяющее зависимость $T(r)$ при любых τ [520]:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi ac T^3 r^2} - \frac{f}{2} T_0 R_0^{1/2} r^{-3/2}, \quad (6.34)$$

$$f = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \tau & \text{при } \tau < 2/3 \\ 0 & \text{при } \tau \geq 2/3 \end{cases}.$$

Расчеты показывают [520], что распределение температуры в атмосфере звезды слабо чувствительно к выбору R_0 и T_0 , соответствующих $\tau = 0$.

Вместо переменного эддингтоновского фактора (6.28) три момента S , F и P в сферическом случае можно связать между собой, используя два свободных параметра [18]:

$$P = \mu_0^2 S, \quad 3P - S = 2 \frac{F}{c} (\Lambda - \mu_0). \quad (6.35)$$

Тогда вместо (6.27) получаем уравнение

$$\mu_0^2 \frac{dS}{dr} + 2(\Lambda - \mu_0) \frac{F}{cr} + \kappa \rho \frac{F}{c} = 0. \quad (6.36)$$

В [18] принималось, как и в эддингтоновском приближении $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а для Λ рассматривалось два варианта:

$$\Lambda = 2\mu_0 \quad \text{и} \quad \Lambda = \mu_0 + \mu_0^2. \quad (6.37)$$

Оба варианта (6.37) при малых τ дают более точное решение, чем эддингтоновское приближение $\Lambda = \mu_0$. При больших τ условие (6.37) дает существенно большую погрешность, чем $\Lambda = \mu_0$, поэтому можно рассматривать интерполяционную зависимость вида

$$\Lambda = \mu_0 + \frac{\mu_0^2}{1 + (\kappa r \rho)^2}.$$

Еще один вариант приближения Эддингтона для сферически-симметричного случая приведен в [614, 615].

§ 7. Непрозрачность: поглощение, рассеяние и электронная теплопроводность.

Росселандово среднее

При движении сквозь вещество фотон с энергией $h\nu \ll m_e c^2$ может либо рассеяться, либо поглотиться и передать энергию электрону тремя следующими способами:

- 1) увеличить скорость свободного электрона,
- 2) перевести электрон из связанного состояния в свободное,
- 3) перевести электрон из одного связанного состояния в другое с большей энергией возбуждения.

Для переноса тепла может оказаться важным рассеяние и электронная теплопроводность. Приближенное исследование процессов поглощения, выявляющее их качественные особенности, провести сравнительно просто, однако количественные результаты получаются при этом слишком грубыми. Исследование этих процессов, в особенности связанных-связанных переходов, с достаточной точностью, когда учитываются необходимые состояния ионизации и возбуждения различных элементов и переходы между ними в рамках квантовой механики, требуют весьма трудоемких расчетов на вычислительной машине. Рассмотрим приближенную теорию этих процессов.

а) Свободно-свободные переходы. Расчет коэффициента поглощения проще сделать, воспользовавшись принципом детального равновесия, связывающего сечения прямых и обратных процессов. При единичной концентрации электронов и водородоподобных ионов с зарядом Z , связь сечения тормозного излучения σ_{eff} и свободно-свободного поглощения σ_{aff} фотона с энергией $h\nu$ задается формулой [215]

$$\sigma_{eff}/\sigma_{aff} = 8\pi v^2/hc^2 v, \quad (7.1)$$

где v — скорость электрона до поглощения фотона или после его испускания. В классическом приближении сечение тормозного излучения фотона с частотой $\nu \gg m v^3/2\pi Z e^2$ для нерелятивистских электронов есть [215, 143]

$$\sigma_{eff} = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 h^2 \nu v^2}. \quad (7.2)$$

Вводя близкий к единице фактор Гаунта для свободно-свободных переходов g_{ff} , учитывающий квантовые поправки к классической формуле, получаем для σ_{aff}

$$\sigma_{aff} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c h \nu v^3} g_{ff}. \quad (7.3)$$

Помимо спонтанного излучения, определяемого (5.13), имеет место вынужденное излучение, которое в силу своей когерентности в условиях ЛТЕ эквивалентно уменьшению сечения поглощения (7.3) на множитель $(1 - e^{-h\nu/kT})$, так что [229]

$$\sigma_{aff}^* = \sigma_{aff}(1 - e^{-h\nu/kT}). \quad (7.4)$$

Интегрируя по скоростям электронов с помощью функции Ферми (2.2) и (2.8) и суммируя по различным ионам, получаем коэффициент поглощения α_{ff}^* для свободно-свободных переходов

$$\alpha_{ff}^* = \sum_{A,Z} \frac{X_{A,Z}}{A m_u} \left[\frac{8\pi m_e^3}{h^3} \int_0^\infty \frac{\sigma_{aff}^* v^2 dv}{1 + \exp\left(\frac{m v^2}{2kT} + \alpha - \beta\right)} \right], \quad (7.5)$$

α_{ff}^* имеет тот же смысл, что и α_v^* в (5.13а). Здесь $X_{A,Z}$ — концентрация ионов с числом барионов в ядре A и зарядом Ze . Для невырожденных электронов с концентрацией n_e имеем, используя (2.48)–(2.50),

$$\beta - \alpha = \ln \left[\frac{n_e}{2} \left(\frac{2\pi h^2}{m_e kT} \right)^{3/2} \right]. \quad (7.6)$$

Тогда усреднение в квадратных скобках (7.5) сведется к умножению α_{ff}^* на

$$\nu n_e \left(\frac{1}{v} \right) = \nu n_e \sqrt{\frac{2m_e}{\pi kT}}, \quad (7.7)$$

а фактор Гаунта нужно взять усредненным по Максвеллу [128]. В общем случае связь β с n_e дана в (2.48), а интеграл (7.5) сводится к (2.49), если g_{ff} заменить средним значением.

б) Связанно-свободные переходы. Несмотря на существенно квантовый характер этих переходов, Краммерсу (1923) удалось получить квазиклассическую формулу, используя принцип соответствия, согласно которому при возрастании квантового числа n должен происходить непрерывный переход от дискретного спектра к непрерывному. Разность энергий между двумя соседними уровнями дискретного спектра в водородоподобном ионе есть [215, 144]

$$\Delta E = \frac{2\pi^2 m_e Z^2 e^4}{h^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \approx \frac{4\pi^2 m_e Z^2 e^4}{n^3 h^2}. \quad (7.8)$$

Учитывая, что состояние с главным квантовым числом n и определенной ориентацией спина имеет статистический вес n^2 , можно записать принцип соответствия для сечений излучения фотона с энергией $h\nu$ в свободнo-связанном и свободнo-свободном переходах σ_{efb} и σ_{eff} в виде [215]

$$\frac{n^2}{\Delta E} \sigma_{efb} = \sigma_{eff}. \quad (7.9)$$

С учетом (7.2) получаем сечение рекомбинации на уровень, соответствующий n , в виде

$$\sigma_{efb} = \frac{128\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 e^{10}}{n^5 m_e c^3 h^4 \nu v^2}. \quad (7.10)$$

Из принципа детального равновесия для сечений рекомбинации σ_{efb} и фотоэффекта при заданной поляризации σ_{abf} , получаем [215]

$$\frac{\sigma_{efb}}{\sigma_{abf}} = \frac{2h^2 v^2}{m_e^2 v^2 c^2}. \quad (7.11)$$

Окончательно имеем сечение на один электрон для связанно-свободного поглощения с данного уровня n в виде

$$\sigma_{abf} = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 e^{10} m_e}{n^5 c h^6 \nu^3} g_{bf},$$

$$\sigma_{abf}^* = \sigma_{abf} (1 - e^{-h\nu/kT}), \quad (7.12)$$

$$h\nu > E_b = \frac{2\pi^2 m_e Z^2 e^4}{h^2 n^2}.$$

Здесь g_{bf} — фактор Гаунта для связанно-свободных переходов, E_b — энергия ионизации, а в σ_{abf}^* учтено влияние вынужденного излучения. Для учета вырождения электронов сечение в (7.12) нужно умножить на [128]

$$q_{bf} = 1 - f_e(E_f) = [1 + \exp(\beta - \alpha - E_f/kT)]^{-1}, \quad (7.13)$$

где $E_f = h\nu - E_b$ — энергия вылетевшего электрона, f_e определена в (2.2). Множитель q_{bf} определяет долю незаполненных состояний континуума для вылетающих электронов.

Коэффициент поглощения α_{ν}^{bf} получается после суммирования (7.12) по электронам на разных уровнях энергии и различным ионам:

$$\alpha_{\nu}^{bf} = \sum_{A, Z, n} \sigma_{abf}^{*} q_{bf} \frac{X_{A, Z}}{A m_u} N_{A, Z, n}. \quad (7.14)$$

Здесь $N_{A, Z, n}$ — число электронов на уровне n у иона с массовым числом A и зарядом $Z e$.

в) **Формулы Краммерса.** Рассмотрим отдельно росселандовы средние (6.8) для свободно-свободных и связанно-свободных переходов. Вкладом тяжелых элементов в свободно-свободные переходы пренебрежем, так как он мал по сравнению с их вкладом в связанно-свободные переходы, а водород и гелий считаем полностью ионизованными. Подставляя в (6.8) α_{ν}^{ff} из (7.5) вместо κ_{ν} , получаем для невырожденных электронов

$$\begin{aligned} \kappa_{ff} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^6 h^2 (x_H + x_{He})}{m_e^{3/2} c m_u (kT)^{7/2}} \frac{n_e}{196,5} = \\ &= 3,68 \cdot 10^{22} \frac{\rho}{T^{7/2}} (x_H + x_{He})(1 + x_H) \bar{g}_{ff}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Здесь учтено, что $Z_H^2/A_H = Z_{He}^2/A_{He} = 1$, $n_e \approx \frac{\rho}{2m_u} (1 + x_H)$, а из (6.8) получено $\bar{\nu}^3 = 196,5 (kT/h)^3$.

Если степень ионизации высока, то, применяя формулу Саха (1.8) к каждому уровню, получим для $y_{i,j} \approx 1$, $g_{i,j-1}/g_{i,j} = n^2$, [229]

$$N_{A, Z, n} = n_e n^2 \frac{h^3}{2(2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{E_b/kT}. \quad (7.16)$$

Подставляя (7.12), (7.16) в (7.14), приближенно получим

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu}^{bf} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^6 h^2}{m_e^{3/2} c m_u (kT)^{7/2}} \frac{Z^2}{A} n_e g_{bf} \times \\ &\times \left[\frac{1}{n} \frac{E_b}{kT} e^{E_b/kT} \left(\frac{kT}{h\nu} \right)^3 \right] x_Z. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Здесь вклад дают только тяжелые элементы, E_b определено в (7.12), а x_Z — весовая концентрация тяжелых элементов, для которых Z^2/A принято одинаковым. Полагая $Z^2/A = 6$, $n_e = \frac{\rho}{2m_u} (1 + x_H)$ и подставляя (7.17) в (6.8) вместо κ_{ν} , получаем после усреднения

$$\kappa_{bf} = 4,34 \cdot 10^{25} \frac{\rho}{T^{7/2}} x_Z (1 + x_H) \frac{\bar{g}_{bf}}{t}. \quad (7.18)$$

Здесь $\frac{1}{t}$ — среднее значение сомножителей в квадратных скобках (7.17).

Величина $t/\bar{g}_{bf}$ меняется примерно от единицы до десяти. При низких температурах и уменьшении степени ионизации формула (7.16) становится неверной и (7.18) дает завышенный результат. Этот факт можно учесть за счет увеличения t . Формулы (7.15) и (7.18) называются формулами Краммерса.

г) Связанно-связанные переходы. Поглощение в линиях может быть существенным, если в нем участвует достаточно широкая область спектра. Поэтому помимо количества линий важно знать их ширины.

Естественная ширина линии γ_n с частотой ν_0 определяется взаимодействием с нулевыми колебаниями вакуума, а сечение поглощения определяется формулой классического осциллятора вблизи ν_0 для резонансного поглощения [128], следующей из (7.23) при $\nu \approx \nu_{ij} = \nu_0$:

$$\sigma_R = \frac{e^2}{m_e c} f_{ij} \frac{\gamma_n / 4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma_n / 4\pi)^2} \quad (7.19)$$

Здесь f_{ij} — сила осциллятора, дающая поправку на квантово-механические эффекты. Доплеровское уширение связано с движением атомов и сечение поглощения имеет вид [128]

$$\sigma_D = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{ij} \left(\frac{A m_u c^2}{2\pi k T} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu_0} \exp \left[- \frac{A m_u c^2}{2kT} \left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \right]. \quad (7.20)$$

Ударная ширина линии связана с конечным временем жизни возбужденного атома, определяемым столкновением с окружающими частицами. Сечение описывается формулой (7.19), где вместо γ_n следует использовать γ_c [128]:

$$\gamma_c = \frac{4\pi k}{h} \quad 5,3 \cdot 10^8 \frac{\rho y}{T^{1/2}} \frac{n^4 + n'^4}{Z^{*2} \sum_j x_j \mu_j} \quad (7.21)$$

Здесь n и n' — начальное и конечное главные квантовые числа, Z^* — эффективный заряд ядра, y — среднее число свободных электронов на атом, μ_j — молекулярные массы компонент, x_j — молярные доли их в смеси, а T измеряется в кельвинах.

Штарковское, или статическое уширение связано со сдвигом уровней переменным в пространстве электрическим полем и движением атома в этом переменном поле. Учет вынужденного излучения в линиях производится аналогично (7.4). Подробный учет поглощения в линиях сделан при численном расчете таблиц непрозрачности в работах [128, 129, 334].

д) Рассеяние на электронах. Томсоновский коэффициент рассеяния на нерелятивистских свободных электронах не зависит от частоты и имеет вид [219, 143]

$$\sigma_{Ti} = \frac{2\pi}{\mu_i m_u} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \tilde{\theta}), \quad (7.22)$$

$$\sigma_T = \int_{\tilde{\Omega}} \sigma_{Ti} \frac{d\tilde{\Omega}}{4\pi} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{1}{\mu_i m_u} (\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}), \quad \int_{\tilde{\Omega}} (1 + \cos^2 \tilde{\theta}) \frac{d\tilde{\Omega}}{4\pi} = 4/3,$$

где $\tilde{\theta}$ – угол рассеяния, $\mu_i (= \mu_Z$ из (2.17) для полностью ионизованной плазмы) – количество нуклонов на один свободный электрон. Релеевский коэффициент рассеяния на связанных электронах дает то же угловое распределение (7.22). Для произвольного колеблющегося электрона коэффициент рассеяния есть*)

$$\sigma_{sev} = \frac{2}{\mu_a m_u} \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{f_{ij} \nu^2 \left(\frac{\nu}{\nu_{ij}}\right)^2 \frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu^2 - \nu_{ij}^2)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 \nu^2},$$

$$\sigma_{sevl} = \frac{3}{4} \sigma_{sev} (1 + \cos^2 \tilde{\theta}),$$
(7.23)

где ν_{ij} – частота перехода между уровнями (для связанного электрона) с силой осциллятора f_{ij} и временем жизни $1/\gamma$, μ_a – количество нуклонов на одну рассеивающую частицу. При $\nu, \gamma \ll \nu_{ij}$ имеем релеевское рассеяние с $\sigma_R \sim \nu^4$. Для свободного электрона, колеблющегося с частотой ν_0 , затухание определяется реакцией излучения [143] и $\gamma = 8\pi^2 e^2 \nu_0^2 / 3 m_e c^2$. Коэффициент рассеяния фотона с частотой ν таким осциллятором получается из (7.23) при $\nu_{ij} = \nu_0, f_{ij} = 1, \mu_a = \mu_i$. При $\nu \gg \nu_0$ этот коэффициент становится томсоновским. Величина

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2,$$
(7.24)

входящая в (7.22), (7.23), называется томсоновским сечением рассеяния.

Полное сечение релятивистского рассеяния фотона на электроны есть [21]

$$\sigma_{er} = 2\pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{1}{x} \left[\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x^2)} \right] =$$

$$= 2\pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \times \begin{cases} \frac{4}{3} (1-x) & \text{при } x \ll 1, \\ \frac{1}{x} [\ln(x+1) + 1/2] & \text{при } x \gg 1. \end{cases}$$
(7.25)

В произвольной системе отсчета

$$x = \frac{(\bar{p} + \bar{k})^2}{m_e^2 c^2} - 1, \quad \bar{p} \text{ и } \bar{k} - 4\text{-импульсы электрона и фотона перед столкновением.}$$
(7.26)

В системе центра масс имеем

$$x = 2t_\nu(t_\nu + \sqrt{t_\nu^2 + 1}), \quad t_\nu = \frac{h\nu}{m_e c^2}.$$
(7.27)

*) Коэффициент рассеяния равен сечению, умноженному на $(\mu_a m_u)^{-1}$.

Угол рассеяния однозначно связан с энергией рассеянного фотона, так что

$$\bar{p} \bar{k} - \bar{p} \bar{k}' - \bar{k} \bar{k}' = 0, \quad (7.28)$$

где $\bar{k}'$ — 4-импульс рассеянного фотона. В лабораторной системе

$$m(\nu - \nu') - \nu\nu'(1 - \cos \theta) = 0,$$

а в системе центра инерции рассеяние является когерентным с $\nu = \nu'$. Другие угловые характеристики рассеяния на релятивистских электронах приведены в [21]. Коэффициенты σ_ν и $\sigma_{\nu\nu'}$, входящие в (5.9) и (5.16), зависят от электронных импульсов и должны браться усредненными по электронному распределению.

При слабом вырождении непрозрачность, связанную с релятивистским рассеянием, приближенно можно получить, приняв $t_\nu = t_0 = \beta_0 \frac{kT}{m_e c^2}$ в (7.25) и (7.27), как при выводе (7.18). Получаем

$$\begin{aligned} \kappa_{se}^r &\approx \sigma_{ser}(x_0) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{f(x_0)}{m_u \mu_i} = \frac{0,40}{\mu_i} f(x_0), \\ f(x_0) &= \frac{3}{4} \left[\left(1 - \frac{4}{x_0} - \frac{8}{x_0^2} \right) \ln(1 + x_0) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x_0} - \frac{1}{2(1 + x_0)^2} \right] \frac{1}{x_0} = \\ &= \begin{cases} 1 - x_0 & \text{при } x_0 \ll 1 \\ \frac{3}{4x_0} \left[\ln(1 + x_0) + \frac{1}{2} \right] & \text{при } x_0 \gg 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$x_0 = 2\beta_0 \frac{kT}{m_e c^2} \left(\beta_0 \frac{kT}{m_e c^2} + \sqrt{\left(\beta_0 \frac{kT}{m_e c^2} \right)^2 + 1} \right).$$

При отсутствии позитронов и полной ионизации имеем $\mu_i = \mu_Z = \frac{2}{1 + x_H}$

Когда рождаются пары, то позитроны рассеивают фотоны так же, как электроны, поэтому

$$\mu_i = \frac{2}{1 + x_H + \frac{4n_+ m_u}{\rho}}, \quad (7.30)$$

где n_+ определяется с учетом (2.9), (2.17). Поправка на вынужденное рассеяние типа (7.4) в нерелятивистском случае когерентного рассеяния отсутствует (см. (5.16)) [215, 129]. Отметим, что слабое вырождение возможно лишь при $kT < m_e c^2$ (см. § 2, п. в).

Расчеты непрозрачности, связанной с электронным рассеянием, при учете вырождения и вынужденных процессов для $kT < \frac{m_e c^2}{2}$ сделаны

в [315]. Они аппроксимируются формулой [532] с точностью лучше 10%

$$\kappa_{se}^r \approx \sigma_T (1 + 2,7 \cdot 10^{11} \rho T^{-2})^{-1} \left[1 + \left(\frac{T}{4,5 \cdot 10^8} \right)^{0,86} \right]^{-1}, \quad (7.31)$$

$$kT < \frac{1}{2} m_e c^2, \quad -10 \leq \beta - \alpha \leq 4,$$

где σ_T дано в (7.22), а $\beta - \alpha$ в (2.8), (2.17). При $\beta_0 = 4$ формула (7.29) дает точность не менее 20% по сравнению с точными расчетами [559], сделанными для $kT < 0,24 m_e c^2$.

е) Электронная теплопроводность. Перенос тепла электронами становится важным при достаточно низких температурах, когда наступает вырождение электронов и их свободный пробег быстро растет. Расчет коэффициента теплопроводности λ_e вырожденных электронов сделан в § 8, п. в и г на основе решения уравнения Больцмана. Непрозрачность, связанная с λ_e , есть

$$\kappa_e = \frac{4 a c T^3}{3 \lambda_e \rho}. \quad (7.32)$$

Общая непрозрачность κ_T есть

$$\frac{1}{\kappa_{tot}} = \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa_e} \quad (\text{см. (7.36)}). \quad (7.33)$$

Вклад λ_e в непрозрачность учитывался в [128, 129] при расчете таблиц непрозрачности.

ж) Другие источники непрозрачности. При низких температурах во внешних слоях холодных звезд может быть существенным поглощение отрицательными ионами и молекулами. Из ионов основным является ион водорода H^- с энергией связи 0,75 эВ, что соответствует длине волны 16500 Å. Большинство отрицательных ионов имеют потенциалы ионизации ~ 1 эВ. Из молекул при расчетах таблиц непрозрачности [250] учитывались молекулы, включающие H, C, N, O и другие обильные элементы.

Важную роль в непрозрачности при низких температурах может играть образование пыли, подробнее см. § 26.

При очень высоких температурах, возникающих при коллапсе при $T \gtrsim 10^9$ К, происходит образование электронно-позитронных пар, а также фотовозбуждение и фоторасщепление ядер. Сечение рождения пары при столкновении фотона с энергией $h\nu$ с покоящимся ионом по порядку величины есть [21]

$$\sigma_{\gamma Z \pm} \sim \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{Z^2}{137} \left(\ln \frac{h\nu}{2m_e c^2} \right)^{1 + 4 \frac{m_e c^2}{h\nu}}. \quad (7.34)$$

Это сечение мало по сравнению с сечением рассеяния (7.25) вплоть до больших энергий $\sim 10 m_e c^2$. Сечение двухквантового рождения пар для летящих навстречу фотонов

$$\sigma_{\gamma\gamma \pm} \sim \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{(m_e c^2)^2}{h\nu_1 h\nu_2} \ln \frac{h\nu_1 h\nu_2}{(m_e c^2)^2} \quad (7.35)$$

Таблица 11

Непрозрачность κ ($\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$) для химического состава $x_H = 0,70$, $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,02$

T, K	Плотность, $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$					
	1,00 (+05)	1,00 (+06)	1,00 (+07)	1,00 (+08)	1,00 (+09)	1,00 (+10)
1,00 (+9)	1,08 (-1)	5,55 (-2)	8,86 (-3)	1,92 (-5)	1,92 (-7)	1,92 (-9)
5,00 (+8)	1,48 (-1)	3,12 (-2)	2,45 (-3)	4,81 (-6)	4,81 (-8)	
2,00 (+8)	1,67 (-1)	1,35 (-1)	7,68 (-5)	7,70 (-7)		
1,00 (+8)	1,23 (-1)	3,63 (-3)	1,92 (-5)			
5,00 (+7)	5,31 (-2)	4,80 (-4)				

Таблица 11 (продолжение)

Т, К	Плотность, г · см ⁻³							
	1,00 (-2)	1,00 (-1)	1,00	1,00 (+1)	1,00 (+2)	1,00 (+3)	1,00 (+4)	
1,0 (+9)	1,13 (-1)	1,13 (-1)	1,13 (-1)	1,13 (-1)	1,13 (-1)	1,13 (-1)	1,13 (-1)	
5,0 (+8)					1,65 (-1)	1,64 (-1)	1,64 (-1)	
2,0 (+8)				2,34 (-1)	2,34 (-1)	2,34 (-1)	2,35 (-1)	
1,0 (+8)			2,76 (-1)	2,76 (-1)	2,79 (-1)	2,96 (-1)	3,50 (-1)	
6,0 (+7)	2,98 (-1)		2,99 (-1)	3,01 (-1)	3,18 (-1)	3,87 (-1)		
5,0 (+7)		2,98 (-1)	3,04 (-1)	3,05 (-1)	3,09 (-1)	4,31 (-1)	6,27 (-1)	
2,0 (+7)	3,25 (-1)	3,28 (-1)	3,57 (-1)	4,81 (-1)	7,83 (-1)	1,48	5,68 (-1)	
1,0 (+7)	3,40 (-1)	3,70 (-1)	5,41 (-1)	1,08	2,54	4,82	1,90 (-1)	
5,0 (+6)	4,03 (-1)	8,40 (-1)	2,54	5,55	1,39 (+1)	3,52		
2,0 (+6)	2,54	1,94 (+1)	5,37 (+1)	7,88 (+1)	3,71 (+1)			
1,0 (+6)	1,85 (+1)	8,26 (+1)	1,92 (+2)	2,67 (+2)				
5,0 (+5)	1,38 (+2)	2,61 (+2)	6,34 (+2)	2,36 (+2)				
3,0 (+5)	6,43 (+2)	8,50 (+2)						
2,0 (+5)	3,02 (+3)	2,51 (+3)						
1,6 (+5)	7,86 (+3)	4,93 (+3)						
1,3 (+5)	1,75 (+4)	8,09 (+3)						
1,0 (+5)	3,27 (+4)	9,61 (+3)						
7,0 (+4)	5,24 (+4)							
5,0 (+4)	6,29 (+4)							
3,0 (+4)	5,13 (+4)							
2,0 (+4)	7,53 (+3)							
1,5 (+4)	2,80 (+4)							

Таблица 11 (продолжение)

Т, К	Плотность, г · см ⁻³									
	3,00 (-7)	1,00 (-6)	3,00 (-6)	1,00 (-5)	5,00 (-5)	1,00 (-4)	5,00 (-4)	1,00 (-3)	5,00 (-3)	1,00 (-3)
5,00 (+6)										3,43 (-1)
2,00 (+6)									4,92 (-1)	6,21 (-1)
1,00 (+6)									1,34	2,39
5,00 (+5)									1,90 (+1)	3,46 (+1)
3,00 (+5)									1,47 (+2)	2,41 (+2)
2,00 (+5)									8,65 (+2)	1,25 (+3)
1,60 (+5)									2,07 (+3)	3,19 (+3)
1,30 (+5)									4,97 (+3)	8,47 (+3)
1,00 (+5)									1,29 (+4)	1,94 (+4)
9,00 (+4)									1,72 (+4)	2,51 (+4)
8,00 (+4)									2,37 (+4)	3,32 (+4)
7,00 (+4)									3,10 (+4)	4,40 (+4)
6,00 (+4)									4,93 (+4)	7,13 (+4)
5,60 (+4)									6,39 (+4)	9,08 (+4)
5,20 (+4)									8,44 (+4)	1,17 (+5)
4,95 (+4)									1,01 (+5)	1,40 (+5)
4,70 (+4)									1,20 (+5)	1,67 (+5)
4,45 (+4)									1,42 (+5)	1,98 (+5)
4,20 (+4)									1,65 (+5)	2,33 (+5)
3,95 (+4)									1,84 (+5)	2,65 (+5)
3,70 (+4)									1,96 (+5)	2,89 (+5)
3,50 (+4)									1,98 (+5)	2,95 (+5)
3,20 (+4)									1,86 (+5)	2,76 (+5)
2,80 (+4)									1,35 (+5)	2,00 (+5)
2,50 (+4)									9,92 (+4)	1,33 (+5)
2,25 (+4)									6,90 (+4)	8,53 (+4)
2,00 (+4)									4,32 (+4)	5,32 (+4)
1,80 (+4)									2,78 (+4)	3,44 (+4)

Таблица 11 (продолжение)

Т, К	Плотность, г · см ⁻³									
	3,00 (-7)	1,00 (-6)	3,00 (-6)	1,00 (-5)	5,00 (-5)	1,00 (-4)	5,00 (-4)	1,00 (-3)		
1,60 (+4)	1,18 (+3)	2,34 (+3)	3,84 (+3)	5,53 (+3)	8,55 (+3)	1,03 (+4)	1,65 (+4)	2,08 (+4)		
1,45 (+4)	1,07 (+3)	1,71 (+3)	2,44 (+3)	3,58 (+3)	5,17 (+3)	6,21 (+3)	1,03 (+4)	1,31 (+4)		
1,30 (+4)	6,85 (+2)	9,81 (+2)	1,31 (+3)	1,76 (+3)	2,77 (+3)	3,42 (+3)	5,85 (+3)	7,56 (+3)		
1,20 (+4)	4,09 (+2)	5,59 (+2)	7,52 (+2)	1,04 (+3)	1,69 (+3)	2,15 (+3)	3,73 (+3)			
1,10 (+4)	2,02 (+2)	2,76 (+2)	3,77 (+2)	5,55 (+2)	9,52 (+2)	1,24 (+3)	2,21 (+3)			
1,00 (+4)	8,22 (+1)	1,15 (+2)	1,67 (+2)	2,58 (+2)	4,91 (+2)	6,53 (+2)	1,19 (+3)			
9,30 (+3)	3,95 (+1)	5,79 (+1)	8,59 (+1)	1,42 (+2)	2,84 (+2)	3,90 (+2)	7,08 (+2)			
8,70 (+3)	1,98 (+1)	3,00 (+1)	4,58 (+1)	7,82 (+1)	1,67 (+2)	2,34 (+2)	4,30 (+2)			
8,00 (+3)	8,22	1,33 (+1)	2,15 (+1)	3,73 (+1)	8,40 (+1)	1,19 (+2)	2,17 (+2)			
7,50 (+3)	4,14	7,07	1,16 (+1)	2,15 (+1)	4,86 (+1)					
7,00 (+3)	2,03	3,59	6,31	1,16 (+1)	2,78 (+1)					
6,50 (+3)	9,30 (-1)	1,77	3,25	6,63	1,64 (+1)					
6,00 (+3)	4,21 (-1)	8,90 (-1)	1,81	4,02	1,02 (+1)					
5,50 (+3)	2,29 (-1)	5,58 (-1)	1,20	2,61	5,85					
5,00 (+3)	1,69 (-1)	3,92 (-1)	7,62 (-1)	1,46	2,91					
4,00 (+3)	4,01 (-2)	7,59 (-2)	1,30 (-1)	2,20 (-1)	4,20 (-1)					
3,00 (+3)	3,33 (-3)	6,16 (-3)	9,81 (-3)	1,50 (-2)	2,39 (-2)					

Таблица 11 (окончание)

Т, К	Плотность, г · см ⁻³										
	1,0 (-12)	1,0 (-11)	1,0 (-10)	3,0 (-10)	1,0 (-9)	3,0 (-9)	1,0 (-8)	3,0 (-8)	1,0 (-7)		
1,80 (+4)		3,83 (-1)	7,22 (-1)	1,34	3,52	9,93	3,19 (+1)	9,77 (+1)	3,62 (+2)		
1,60 (+4)		4,08 (-1)	9,38 (-1)	1,93	5,23	1,53 (+1)	5,15 (+1)	1,55 (+2)	4,96 (+2)		
1,45 (+4)		4,41 (-1)	1,16	2,60	7,55	2,27 (+1)	7,66 (+1)	2,14 (+2)	5,57 (+2)		
1,30 (+4)		4,84 (-1)	1,59	4,06	1,26 (+1)	3,65 (+1)	1,08 (+2)	2,36 (+2)	4,39 (+2)		
1,20 (+4)		5,29 (-1)	2,22	5,86	1,79 (+1)	4,55 (+1)	1,06 (+2)	1,91 (+2)	2,96 (+2)		
1,1 (+4)		6,29 (-1)	3,13	8,08	2,11 (+1)	4,43 (+1)	7,71 (+1)	1,12 (+2)	1,56 (+2)		
1,00 (+4)	3,51 (-1)	7,69 (-1)	3,95	8,44	1,63 (+1)	2,60 (+1)	3,62 (+1)	4,73 (+1)	6,22 (+1)		
9,30 (+3)	3,74 (-1)	8,83 (-1)	3,62	6,04	9,14	1,24 (+1)	1,64 (+1)	2,13 (+1)	2,93 (+1)		
8,70 (+3)	3,96 (-1)	8,85 (-1)	2,30	3,14	4,25	5,41	7,37	9,69	1,37 (+1)		
8,00 (+3)	3,99 (-1)	6,51 (-1)	9,67 (-1)	1,16	1,48	1,77	2,57	3,55	5,36		
7,50 (+3)	3,41 (-1)	3,53 (-1)	3,87 (-1)	4,42 (-1)	5,63 (-1)	7,56 (-1)	1,09	1,66	2,64		
7,00 (+3)	2,19 (-1)	1,52 (-1)	1,37 (-1)	1,59 (-1)	2,12 (-1)	2,99 (-1)	4,68 (-1)	7,46 (-1)	1,25		
6,5 (+3)	9,86 (-2)	5,22 (-2)	4,44 (-2)	5,37 (-2)	7,67 (-2)	1,15 (-1)	1,90 (-1)	3,12 (-1)	5,43 (-1)		
6,00 (+3)	3,34 (-2)	1,53 (-2)	1,33 (-2)	1,71 (-2)	2,65 (-2)	4,23 (-2)	7,29 (-2)	1,24 (-1)	2,29 (-1)		
5,50 (+3)	9,22 (-3)	3,99 (-3)	3,74 (-3)	5,13 (-3)	8,48 (-3)	1,42 (-2)	2,67 (-2)	4,97 (-2)	1,07 (-1)		
5,00 (+3)	2,25 (-3)	1,08 (-3)	1,15 (-3)	1,65 (-3)	2,83 (-3)	5,18 (-3)	1,16 (-2)	2,71 (-2)	7,26 (-2)		
4,00 (+3)	1,10 (-4)	9,68 (-5)	2,18 (-4)	4,53 (-4)	1,10 (-3)	2,43 (-3)	5,51 (-3)	1,08 (-2)	2,17 (-2)		
3,00 (+3)	4,02 (-5)	4,06 (-5)	5,59 (-5)	7,34 (-5)	1,12 (-4)	1,92 (-4)	4,02 (-4)	8,14 (-4)	1,74 (-3)		

Непрозрачность κ ($\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$) при низких температурах для химического состава $x_{\text{H}} = 0,700$, $x_{\text{He}} = 0,28$, $x_{\text{Z}} = 0,020$

$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$
$\lg T = 4,00$			$\lg T = 3,95$			$\lg T = 3,90$			$\lg T = 3,85$			$\lg T = 3,80$		
2,00	-9,81	0,80	0,90	-10,86	0,39	0,70	-11,01	-0,04	0,50	-11,16	-0,65	0,30	-11,31	-1,35
2,50	-9,31	1,02	1,40	-10,36	0,41	1,20	-10,51	-0,07	1,00	-10,66	-0,74	0,60	-10,81	-1,48
3,00	-8,81	1,22	1,90	-9,86	0,52	1,70	-10,01	-0,05	1,50	-10,16	-0,78	1,10	-10,31	-1,54
3,50	-8,31	1,36	2,40	-9,36	0,64	2,20	-9,51	-0,00	2,00	-9,66	-0,75	1,60	-9,81	-1,51
4,00	-7,81	1,46	2,90	-8,86	0,74	2,70	-9,01	0,07	2,50	-9,16	-0,67	2,10	-9,31	-1,40
4,50	-7,31	1,55	3,40	-8,36	0,83	3,20	-8,51	0,16	3,00	-8,66	-0,55	2,60	-8,81	-1,24
5,00	-6,81	1,64	3,90	-7,86	0,92	3,70	-8,01	0,27	3,50	-8,16	-0,39	3,10	-8,31	-1,05
5,50	-6,31	1,74	4,40	-7,36	1,02	4,20	-7,51	0,41	4,00	-7,66	-0,22	3,60	-7,81	-0,81
6,00	-5,81	1,86	4,90	-6,86	1,13	4,70	-7,01	0,56	4,50	-7,16	-0,03	4,10	-7,31	-0,56
6,50	-5,31	1,99	5,40	-6,36	1,26	5,20	-6,51	0,73	5,00	-6,66	0,17	4,60	-6,81	-0,31
7,00	-4,81	2,15	5,90	-5,86	1,41	5,70	-6,01	0,91	5,50	-6,16	0,38	5,10	-6,31	-0,06
7,50	-4,31	2,33	6,40	-5,36	1,58	6,20	-5,51	1,11	6,00	-5,66	0,61	5,60	-5,81	0,14
8,00	-3,81	2,52	6,90	-4,86	1,77	6,70	-5,01	1,32	6,50	-5,16	0,86	6,10	-5,31	0,39
8,50	-3,30	2,72	7,40	-4,36	1,97	7,20	-4,51	1,55	7,00	-4,66	1,12	6,60	-4,81	0,64
9,00	-2,79	2,89	7,90	-3,86	2,19	7,70	-4,01	1,78	7,50	-4,15	1,38	7,10	-4,31	0,89
9,50	-2,25	2,99	8,40	-3,35	2,39	8,20	-3,49	2,00	8,00	-3,64	1,63	7,60	-3,79	1,14
$\lg T = 3,80$			$\lg T = 3,75$			$\lg T = 3,70$			$\lg T = 3,65$			$\lg T = 3,60$		
0,30	-11,31	-1,35	0,10	-11,46	-2,06	-0,10	-11,61	-2,73	-0,30	-11,76	-3,38	-0,50	-11,91	-4,04
0,80	-10,81	-1,48	0,60	-10,96	-2,20	0,40	-11,11	-2,87	0,20	-11,26	-3,50	-0,40	-11,41	-4,16
1,30	-10,31	-1,54	1,10	-10,46	-2,27	0,90	-10,61	-2,93	0,70	-10,76	-3,54	-0,30	-10,91	-4,28
1,80	-9,81	-1,51	1,60	-9,96	-2,23	1,40	-10,11	-2,90	1,20	-10,26	-3,48	-0,20	-10,41	-4,39
2,30	-9,31	-1,40	2,10	-9,46	-2,10	1,90	-9,61	-2,76	1,70	-9,76	-3,29	-0,10	-10,01	-4,50
2,80	-8,81	-1,24	2,60	-8,96	-1,92	2,40	9,11	2,55	2,20	-9,26	-2,99	-0,00	-9,51	-4,61
3,30	-8,31	-1,05	3,10	8,46	1,70	2,90	8,61	-2,29	2,70	-8,76	-2,60	0,10	-9,01	-4,72

$\lg T = 3.60$			$\lg T = 3.55$			$\lg T = 3.50$			$\lg T = 3.45$		
3.80	-7.81	-0.85	3.60	-7.96	-1.46	3.40	-8.11	-1.98	3.20	-8.26	-2.17
4.30	-7.31	-0.62	4.10	-7.46	-1.20	3.90	-7.61	-1.61	3.70	-7.76	-1.76
4.80	-6.81	-0.39	4.60	-6.96	-0.90	4.40	-7.11	-1.20	4.20	-7.26	-1.38
5.30	-6.31	-0.14	5.10	-6.46	-0.57	4.90	-6.61	-0.80	4.70	-6.76	-1.04
5.80	-5.81	0.14	5.60	-5.96	-0.21	5.40	-6.11	-0.43	5.20	-6.26	-0.73
6.30	-5.31	0.44	6.10	-5.46	0.15	5.90	-5.61	-0.09	5.70	-5.75	-0.44
6.80	-4.81	0.75	6.60	-4.95	0.49	6.40	-5.09	0.20	6.20	-5.22	-0.18
7.30	-4.30	1.06	7.10	-4.44	0.79	6.90	-4.56	0.46	6.70	-4.68	0.06
7.80	-3.77	1.32	7.60	-3.90	1.02	7.40	-4.02	0.66	7.20	-4.12	0.26
-0.50	-11.91	-3.91	-0.70	-12.06	-4.04	-0.90	-12.21	-3.97	-1.50	-12.76	-4.20
0.0	-11.41	-3.93	-0.20	-11.56	-3.93	-0.40	-11.71	-3.93	-1.00	-12.26	-4.26
0.5	-10.91	-3.86	0.30	-11.06	-3.77	0.10	-11.21	-3.89	-0.50	-11.76	-4.30
1.00	-10.41	-3.67	0.80	-10.56	-3.57	0.60	-10.71	-3.85	0.0	-11.26	-4.33
1.50	-9.91	-3.37	1.30	-10.06	-3.36	1.10	-10.21	-3.78	0.50	-10.76	-4.33
2.00	-9.41	-3.00	1.80	-9.56	-3.15	1.60	-9.71	-3.68	1.00	-10.26	-4.23
2.50	-8.91	-2.64	2.30	-9.06	-2.94	2.10	-9.21	-3.49	1.50	-9.76	-3.90
3.00	-8.41	-2.30	2.80	-8.56	-2.72	2.60	-8.71	-3.18	2.00	-9.26	-3.34
3.50	-7.91	-2.00	3.30	-8.06	-2.47	3.10	-8.21	-2.74	2.50	-8.75	-2.74
4.00	-7.41	-1.71	3.80	-7.56	-2.18	3.60	-7.69	-2.22	3.00	-8.23	-2.18
4.50	-6.91	-1.43	4.30	-7.05	-1.82	4.10	-7.16	-1.69	3.50	-7.68	-1.75
5.00	-6.40	-1.15	4.80	-6.52	-1.39	4.60	-6.61	-1.31	4.00	-7.13	-1.50
5.50	-5.87	-0.85	5.30	-5.98	-1.01	5.10	-6.06	-1.09	4.50	-6.58	-1.37
6.00	-5.33	-0.55	5.80	-5.42	-0.74	5.60	-5.52	-0.97	5.00	-6.05	-1.30
6.50	-4.78	-0.30	6.30	-4.88	-0.58	6.10	-4.99	-0.89	5.50	-5.53	-1.26
7.00	-4.23	-0.12	6.80	-4.34	-0.47	6.60	-4.47	-0.83	6.00	-5.01	-1.22

Таблица 12 (окончание)

$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$	$\lg P$	$\lg \rho$	$\lg \kappa$
$\lg T = 3,40$											
-2,10	-13,31	-4,53	-2,70	-13,86	-4,77	-3,30	-14,41	-4,80	-3,90	-14,96	-4,64
-1,60	-12,81	-4,58	-2,20	-13,36	-4,75	-2,80	-13,91	-4,69	-3,40	-14,46	-4,27
-1,10	-12,31	-4,61	-1,70	-12,86	-4,69	-2,30	-13,41	-4,46	-2,90	-13,96	-3,63
-0,60	-11,81	-4,60	-1,20	-12,36	-4,52	-1,80	-12,91	-3,99	-2,40	-13,45	-2,99
-0,10	-11,31	-4,50	-0,70	-11,86	-4,14	-1,30	-12,40	-3,37	-1,90	-12,92	-2,43
0,40	-10,81	-4,16	-0,20	-11,36	-3,55	-0,80	-11,89	-2,79	-1,40	-12,38	-2,07
0,90	-10,31	-3,57	0,30	-10,85	-2,98	-0,30	-11,36	-2,29	-0,90	-11,82	-1,94
1,40	-9,80	-2,97	0,80	-10,33	-2,44	0,20	-10,81	-1,98	-0,40	-11,28	-1,90
1,90	-9,28	-2,43	1,30	-9,78	-2,03	0,70	-10,26	-1,86	0,10	-10,74	-1,89
2,40	-8,74	-1,99	1,80	-9,23	-1,83	1,20	-9,72	-1,83	0,60	-10,22	-1,89
2,90	-8,19	-1,74	2,30	-8,68	-1,75	1,70	-9,19	-1,81	1,10	-9,71	-1,64
3,40	-7,64	-1,63	2,80	-8,15	-1,73	2,20	-8,67	-1,81	1,60	-9,21	-1,26
3,90	-7,10	-1,58	3,30	-7,63	-1,71	2,70	-8,16	-1,80	2,10	-8,70	-0,93
4,40	-6,58	-1,55	3,80	-7,11	-1,70	3,20	-7,65	-1,80	2,60	-8,20	-0,60
4,90	-6,06	-1,54	4,30	-6,61	-1,70	3,70	-7,15	-1,39	3,10	-7,70	-0,24
5,40	-5,56	-1,52	4,80	-6,10	-1,69	4,20	-6,65	-1,06	3,60	-7,20	0,12
$\lg T = 3,35$											
$\lg T = 3,30$											
$\lg T = 3,25$											
$\lg T = 3,20$											
$\lg T = 3,15$											
$\lg T = 3,10$											
$\lg T = 3,05$											
-4,50	-15,51	-3,85	-5,10	-16,01	-2,89	-5,70	-16,47	-0,22	-6,30	-16,91	-0,03
-4,00	-15,00	-3,14	-4,60	-15,45	-1,90	-5,20	-15,89	0	-5,80	-16,40	-0,03
-3,50	-14,47	-2,46	-4,10	-14,90	-1,40	-4,70	-15,37	0	-5,30	-15,90	-0,03
-3,00	-13,93	-2,11	-3,60	-14,36	-1,05	-4,20	-14,86	0	-4,80	-15,40	-0,03
-2,50	-13,37	-2,01	-3,10	-13,83	-0,72	-3,70	-14,35	0	-4,30	-14,90	-0,03
-2,00	-12,83	-1,98	-2,60	-13,32	-0,37	-3,20	-13,85	0	-3,80	-14,40	-0,03
-1,50	-12,29	-1,64	-2,10	-12,81	0,01	-2,70	-13,35	0	-3,30	-13,90	-0,03
-1,00	-11,77	-1,27	-1,60	-12,30	0,03	-2,20	-12,85	0	-2,80	-13,40	-0,03

-0.50	-11.26	-0.94	-1.10	-11.80	0.03	-1.70	-12.35	0	-2.30	-12.90	-0.03
0.0	-10.75	-0.60	-0.60	-11.30	0.03	-1.20	-11.85	0	-1.80	-12.40	-0.03
0.50	-10.25	-0.25	-0.10	-10.80	0.03	-0.70	-11.35	0	-1.30	-11.90	-0.03
1.00	-9.75	0.07	0.40	-10.30	0.03	-0.20	-10.85	0	-0.80	-11.40	-0.03
1.50	-9.25	0.07	0.90	-9.80	0.03	0.30	-10.35	0	-0.30	-10.90	-0.03
2.00	-8.75	0.07	1.40	-9.30	0.03	0.80	-9.85	0	0.20	-10.40	-0.03
2.50	-8.25	0.07	1.90	-8.80	0.03	1.30	-9.35	0	0.70	-9.90	-0.03
3.00	-7.75	0.07	2.40	-8.30	0.03	1.80	-8.85	0	1.20	-9.40	-0.03

	$\lg T = 3.00$	$\lg T = 2.95$	$\lg T = 2.90$	$\lg T = 2.85$				
-6.90	-17.45	-7.50	-8.10	-18.55	-0.04	-8.70	-19.10	-0.02
-6.40	-16.95	-7.00	-7.60	-18.05	-0.04	-8.20	-18.60	-0.02
-5.90	-16.45	-6.50	-7.10	-17.55	-0.04	-7.70	-18.10	-0.02
-5.40	-15.95	-6.00	-6.60	-17.05	-0.04	-7.20	-17.60	-0.02
-4.90	-15.45	-5.50	-6.10	-16.55	-0.04	-6.70	-17.10	-0.02
-4.40	-14.95	-5.00	-5.60	-16.05	-0.04	-6.20	-16.60	-0.02
-3.90	-14.45	-4.50	-5.10	-15.55	-0.04	-5.70	-16.10	-0.02
-3.40	-13.95	-4.00	-4.60	-15.05	-0.04	-5.20	-15.60	-0.02
-2.90	-13.45	-3.50	-4.10	-14.55	-0.04	-4.70	-15.10	-0.02
-2.40	-12.95	-3.00	-3.60	-14.05	-0.04	-4.20	-14.60	-0.02
-1.90	-12.45	-2.50	-3.10	-13.55	-0.04	-3.70	-14.10	-0.02
-1.40	-11.95	-2.00	-2.60	-13.05	-0.04	-3.20	-13.60	-0.02
-0.90	-11.45	-1.50	-2.10	-12.55	-0.04	-2.70	-13.10	-0.02
-0.40	-10.95	-1.00	-1.60	-12.05	-0.04	-2.20	-12.60	-0.02
0.10	-10.45	-0.50	-1.10	-11.55	-0.04	-1.70	-12.10	-0.02
0.60	-9.95	0.0	-0.60	-11.05	-0.04	-1.20	-11.60	-0.02

может быть больше $\sigma_{\gamma Z \pm}$, однако, как показано в [559], благодаря рождению пар рассеяние на них всегда преобладает над (7.35), а также над фотон-фотонным рассеянием. Сечение взаимодействия с ядрами всегда меньше, чем $\sigma_{e\pm}$, поэтому все эти процессы при высоких температурах не дают заметного вклада в непрозрачность в астрофизических условиях.

з) Таблицы непрозрачности. Формулы Краммерса (7.15), (7.18) являются слишком грубыми, поэтому в последние годы в расчетах эволюции используются таблицы непрозрачности, в которых вычисление κ по формуле (6.8) проводится численно. При этом для различных смесей элементов учитываются [128, 129, 334]:

свободно-свободные переходы (7.5),

связанно-свободные переходы (7.14),

связанно-связанные переходы (п. г.),

рассеяние на электронах (п. д) с учетом релятивистских поправок [559], а также релеевское рассеяние на молекулах водорода H_2 , учет отрицательных ионов H^- и He^- , а также молекул H_2 , H_2^+ .

Для численного расчета электронной концентрации и концентраций ионов с учетом вырождения и ионизации давлением использовались методы, изложенные в § 1 и § 4 с дополнительными уточнениями [128]. Полная непрозрачность κ есть сумма непрозрачностей по различным механизмам взаимодействия с излучением, включая рассеяние:

$$\kappa = \sum_i \kappa_i. \quad (7.36)$$

Вклад электронной теплопроводности учитывался по формуле (7.33).

В табл. 11 приведены значения непрозрачности из [334] для состава, близкого к солнечному $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,28$. В этих последних расчетах не учтена электронная теплопроводность. При тех параметрах ρ и T , где λ_e существенна, приведены величины полной непрозрачности из более ранних расчетов [129]. Отметим, что существовавшее долгое время расхождение между таблицами Кокса и расчетами Карсона устранено [319] после обнаружения ошибки в расчетах Карсона. В табл. 12 для того же состава даны таблицы непрозрачности при низких температурах [250], в которых дополнительно учитывается большое число молекул и поглощение на кремниевой пыли. Основной вклад в непрозрачность при низких температурах дают водяной пар, окись титана и пыль.

§ 8. Теплопроводность вещества при больших плотностях и температурах

В белых карликах и оболочках нейтронных звезд перенос тепла определяется вырожденными электронами, которые могут быть релятивистскими, а внутри нейтронных звезд важен тепловой поток, обусловленный вырожденными нейтронами. Расчет коэффициента теплопроводности в газе проводится в кинетической теории на основе решения уравнения Больцмана [222].

а) Решение уравнения Больцмана для нерелятивистского газа. Для вырожденного газа впервые такое решение получено в работе [611]. Пусть в веществе присутствует смесь легких ферми-частиц и тяжелого невырож-

денного газа. Уравнение Больцмана для легкого газа в сопутствующей системе координат имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} + \left(F_i - \frac{dc_{0i}}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{\partial f}{\partial v_i} v_k \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_k} = J, \quad (8.1)$$

$$J = J_{nn} + J_{nN} = B \int [f'f'_1(1-f)(1-f_1) - ff_1(1-f')(1-f'_1)] \times \\ \times g_{nn} W_{nn}(\theta, g_{nn}) d\Omega dc_{1i} + \int [f'f'_N(1-f) - ff_N(1-f')] \times \\ \times g_{nN} W_{nN}(\theta, g_{nN}) d\Omega dc_{Ni}.$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial r_i}$; f, f_N — функции распределения легких и тяжелых частиц, штрихами обозначены функции распределения частиц после столкновений, $v_i = c_i - c_{0i}$, $v_{iN} = c_{Ni} - c_{0i}$ — хаотические скорости легких и тяжелых частиц, c, c_{Ni} — скорости легких и тяжелых частиц в неподвижной системе, θ — угол между направлениями относительных скоростей до ($\tilde{g}_i$) и после ($\tilde{g}'_i$) столкновения, имеющих один и тот же модуль g_{nn} или g_{nN} , $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, $W(\theta, g)$ — дифференциальное сечение столкновений частиц с относительной скоростью g , отклоняющейся на угол θ и лежащей после столкновения в телесном угле $d\Omega$, $c_{0i} = \frac{1}{\rho} (\rho_n \langle c_i \rangle + \rho_N \langle c_{Ni} \rangle)$ — среднемассовая скорость, $\rho = \rho_n + \rho_N$ — плотность вещества, F_i — ускорение, создаваемое внешними силами. Средние значения величин $\langle \varphi_i \rangle$, $\langle \varphi_{Ni} \rangle$ определяются как

$$\langle \varphi_i \rangle = \frac{B}{n_n} \int f \varphi_i dc_i, \quad B = \frac{2m^3}{h^3}, \quad \langle \varphi_{Ni} \rangle = \frac{1}{n_N} \int f_N \varphi_{Ni} dc_{Ni}. \quad (8.2)$$

Функции f и f_N нормированы так, что

$$n_n = B \int f dc_i, \quad n_N = \int f_N dc_{Ni}, \quad \rho = n_n m_n, \quad \rho_N = n_N m_N, \quad (8.3)$$

m и m_N — массы легких и тяжелых частиц.

При малых отклонениях от равновесного распределения Ферми решение уравнения Больцмана ищется в виде

$$f = f_0 [1 + \chi(1 - f_0)], \\ f_0 = \{1 + \exp[(mv^2 - 2\mu)/2kT]\}^{-1}. \quad (8.4)$$

Здесь μ — химический потенциал ферми-газа. Наличие анизотропии, связанной с градиентами температуры и давлений компонент, приводит к поправке к равновесной функции распределения, которая ищется в виде

$$\chi = -A_i \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} - n_n \mathcal{D}_i d_i \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}, \\ d_i = \frac{\rho_N}{\rho} \frac{\partial \ln P_n}{\partial r_i} - \frac{\rho_n}{P_n} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_N}{\partial r_i}. \quad (8.5)$$

Здесь

$$P_n = \frac{1}{3} n_n m \langle v^2 \rangle - \text{давление ферми-газа,}$$

$$P_N - \text{давление остальных компонентов смеси,} \quad (8.6)$$

$$G_n \equiv G_n(x_0) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + \exp(x - x_0)} = \frac{F_{n-1}(x_0)}{\Gamma(n)},$$

$$x = \frac{mv^2}{2kT}, \quad x_0 = \frac{\mu}{kT},$$

где $F_i(x_0)$ определены ранее в (2.49). Будем считать, что функция распределения тяжелых невырожденных частиц обладает следующими свойствами:

$$f_N = f_{N0}(1 + \chi_N),$$

$$\chi_N = -A_{Ni} \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} - n_n \mathcal{D}_{Ni} d_i \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}, \quad (8.7)$$

$$\int f_{N0} dv_{Ni} = n_N, \quad \int v_{Ni} v_{Nk} f_{N0} dv_{Ni} = n_N \delta_{ik} \frac{kT}{m_N}.$$

При этом изотропная функция распределения f_{N0} может отличаться от максвелловской. Подставляя (8.4)–(8.6) в уравнение Больцмана (8.1) и используя уравнения переноса для исключения временных производных, получаем уравнения [53] для A_i и $\mathcal{D}_i$

$$f_0(1 - f_0) \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) v_i = I_{nn}(A_i) + I_{nN}(A_i), \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{n_n} f_0(1 - f_0) v_i = I_{nn}(\mathcal{D}_i) + I_{nN}(\mathcal{D}_i),$$

где $I_{nn}(R)$ и $I_{nN}(R)$ – линеаризованные интегралы столкновений (8.1). Отметим, что при классическом рассмотрении столкновения в (8.1) следует произвести замену

$$gW(\theta, g)d\Omega \Rightarrow gb db d\varphi. \quad (8.9)$$

б) Теплопроводность нейтронного газа. Пусть легкие частицы являются нейтронами, а тяжелые – ядрами. Так как нейтроны могут составлять существенную долю массы, нужно учитывать их вклад в плотность. Нейтронный газ, близкий к идеальному, погруженный в кристаллическую решетку ядер, может существовать в неравновесном слое в оболочках нейтронных звезд (см. § 4, пп.д, е). Если ядра много тяжелее нейтронов, то детали функции f_N несут незначительный вклад. Теплопроводность нейтронного газа рассчитывалась в [607], а в смеси с ядрами [53].

Следуя [53], решение уравнений (8.8) ищем в виде разложения в ряд по системе ортогональных с весом $f_0(1 - f_0)x^{3/2}$ полиномов $Q(x)$, анало-

гичных полиномам Сонина [222] в невырожденном случае,

$$A_i = [a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x)] v_i, \quad \mathcal{D}_i = [d_0 Q_0(x) + d_1 Q_1(x)] v_i, \\ Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} - x, \\ x = u^2, \quad u_i = \left(\frac{m_n}{2kT} \right)^{1/2} v_i. \quad (8.10)$$

В A_{Ni} , $\mathcal{D}_{Ni}$ из (8.7) учтем только первые члены разложения, определяемые из условия, что поправки к равновесным функциям не дают вклада в среднемассовую скорость

$$A_{Ni} = a_{0N} Q_0 v_{Ni}, \quad n_n a_0 + n_N a_{0N} = 0, \\ \mathcal{D}_{Ni} = d_{0N} Q_0 v_{Ni}, \quad n_n d_0 + n_N d_{0N} = 0, \\ u_{Ni} = (m_N / 2kT)^{1/2} v_{Ni}. \quad (8.11)$$

Используя определение теплового потока, связанного с нейтронами, а также диффузионной скорости $\langle v_i \rangle$, с учетом (8.4), (8.7), (8.10) получаем [53]

$$q_i = \frac{1}{2} n_n m_n \langle v^2 v_i \rangle = - \frac{5}{2} m_n n_n \left(\frac{kT}{m_n} \right)^2 \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left\{ \left[a_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - a_1 \left(\frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) \right] \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} + \right. \\ \left. + n_n \left[d_0 - d_1 \left(\frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) \right] \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} d_i \right\}, \quad (8.12)$$

$$\langle v_i \rangle = - \frac{kT}{m_n} \left(a_0 \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} + d_0 n_n \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} d_i \right), \quad \langle v_{Ni} \rangle = - \frac{\rho_n}{\rho_N} \langle v_i \rangle. \quad (8.13)$$

Если положить $\langle v_i \rangle = 0$ в (8.13), то из (8.12) получается тепловой поток, обусловленный теплопроводностью в виде

$$q_i = -\lambda_n \frac{\partial T}{\partial r_i} = - \frac{5}{2} m_n n_n \left(\frac{kT}{m_n} \right)^2 \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left(\frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right) \times \\ \times \left(\frac{a_0 d_1}{d_0} - a_1 \right) \frac{\partial \ln T}{\partial r_i}. \quad (8.14)$$

Умножая (8.8) на $BQ_0(x)$ и $BQ_1(x)$ и интегрируя по dv_i , получаем систему уравнений для коэффициентов a_k , d_k :

$$0 = b_{00} a_0 + b_{01} a_1, \\ - \frac{15}{4} n_n \left(\frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}^2}{G_{3/2}^2} \right) = b_{10} a_0 + (a_{11} + b_{11}) a_1, \quad (8.15)$$

$$\frac{3}{2} = b_{00} d_0 + b_{01} d_1, \quad 0 = b_{10} d_0 + (a_{11} + b_{11}) d_1, \quad (8.16)$$

где

$$a_{11} = B^2 \int f_0 f_{01} (1 - f'_0) (1 - f'_{01}) Q_1(x) u_i [Q_1(x) u_i + Q_1(x_1) u_{1i} - Q_1(x') u'_i - Q_1(x'_1) u'_{1i}] g_{nn} W_{nn}(\theta, g_{nn}) d\Omega dv_i dv_{1i}, \quad (8.17)$$

$$b_{j1} = B \int f_0 f_{N0} (1 - f'_0) Q_j(x) u_i [Q_1(x) u_i - Q_1(x') u'_i] \times \\ \times g_{nN} W_{nN}(\theta, g_{nN}) d\Omega dv_i dv_{Ni}, \quad j = 0, 1. \quad (8.18)$$

С учетом (8.11) имеем

$$b_{j0} = B \int f_0 f_{N0} (1 - f'_0) Q_j(x) u_i \left[u_i - u'_i - \frac{n_n}{n_N} \left(\frac{m_n}{m_N} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times (u_{Ni} - u'_{Ni}) \right] g_{nN} W_{nN}(\theta, g_{nN}) d\Omega dv_i dv_{Ni}. \quad (8.19)$$

Сохранение импульса при столкновении дает соотношение

$$u_i - u'_i = - \left(\frac{m_N}{m_n} \right)^{1/2} (u_{Ni} - u'_{Ni}). \quad (8.20)$$

Считая $m_N \gg m_n$, получаем

$$|u_i| = |u'_i|, \quad u_i(u_i - u'_i) = u^2(1 - \cos \theta), \\ g_{nN} = |v_i| = v. \quad (8.21)$$

С учетом (8.10), (8.21) коэффициенты b_{jk} из (8.18), (8.19) вычисляются в явном виде [53]. Коэффициенты a_{11} из (8.17) в явном виде удастся получить только для предельных случаев слабого и сильного вырождения. Можно также предложить простую интерполяционную формулу между этими случаями. Подставляя в (8.14) решения (8.15) и (8.16), получаем коэффициент теплопроводности нейтронного газа в виде [53]

$$\lambda_n = \frac{75}{64\pi^2} \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\frac{kT}{m_n} \right)^{1/2} \frac{n_n^2}{n_N} \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{kTm_n} \right)^{3/2} \frac{G_{5/2}^2}{G_{3/2}^2} \left(\frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \right)^2 \left[\frac{25}{4} \frac{G_{5/2}^2}{G_{3/2}^2} \tilde{\Omega}_{nN}(1) - 5 \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \tilde{\Omega}_{nN}(2) + \right. \\ \left. + \tilde{\Omega}_{nN}(3) + \frac{32}{21} \pi^4 \frac{n_n}{n_N} I \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right]^{-1}, \quad (8.22)$$

где

$$\tilde{\Omega}_{nN}(r) = \int_0^\infty dx \int_0^\pi d\theta f_0(1 - f_0) x^{r+1} (1 - \cos \theta) W_{nN}(\theta, x) \sin \theta, \\ I = \int_0^1 \frac{y^3 W_{nn}(y) dy}{(1 - y^2)^{1/2}}, \quad y = \frac{g}{(2x_0)^{1/2}}, \quad g = \frac{1}{2} \left(\frac{m_n}{kT} \right)^{1/2} g_{nn}, \quad (8.23)$$

$$W_{nn}(\theta, g) = \sum_{l=0}^{\infty} W_{nn}^{(l)}(g) P_l(\cos \theta), \quad W_{nn}(g) = \sum_{l=0}^{\infty} W_{nn}^{(l)}(g) [P_l(0)]^2,$$

$$\epsilon = \frac{21\sqrt{2}}{8\pi^{13/2}} \left(\frac{2\pi^2 \hbar^2}{kTm_n} \right)^{3/2} n_n \frac{\sqrt{\pi} \Omega_{nn}^{(2)}(2)}{8I} \begin{cases} \gg 1 & \text{при } e^{x_0} \gg 1 \\ \ll 1 & \text{при } e^{x_0} \ll 1 \end{cases},$$

$$\Omega_{nn}^{(i)}(r) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-g^2} g^{2r+3} dg \int_0^\pi (1 - \cos^i \theta) W_{nn}(\theta, g) \sin \theta d\theta.$$

В случае сильного вырождения нейтронов получаем

$$\lambda_n^{\text{выр}} = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{k^2 T}{\hbar} \frac{n_n^{2/3}}{n_N} \frac{1}{\bar{W}_{nN}(x_0)} \times \\ \times \left[1 + \frac{64}{21\pi} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{m_n^2}{\hbar^4} \frac{(kT)^2}{n_n^{1/3} n_N} \frac{I}{\bar{W}_{nN}(x_0)} \right]^{-1}, \quad (8.24)$$

где

$$\bar{W}_{nN}(x_0) = W_{nN}^{(0)}(x_0) - \frac{1}{3} W_{nN}^{(1)}(x_0), \quad W_{nN}(\theta, x) = \sum_{i=0}^\infty W_{nN}^{(i)}(x) P_i(\cos \theta), \quad (8.25)$$

$$n_n = \frac{8\pi}{3} (kTm_n/2\pi^2 \hbar^2)^{3/2} x_0^{3/2}.$$

Для чисто нейтронного газа имеем .

$$\lambda_{nn} = \begin{cases} \frac{75}{64} k \left(\frac{kT}{m_n} \right)^{1/2} \frac{1}{\Omega_{nn}^{(2)}(2)} & \text{без вырождения [222],} \\ \frac{7\pi \hbar^3 n_n}{256 T m_n^2 I} & \text{при сильном вырождении [607].} \end{cases} \quad (8.26)$$

Сечение рассеяния можно оценить из экспериментальных данных по pp- и pp-рассеянию. Формула для сечения упругого изотропного рассеяния при энергиях нейтронов $\lesssim 10$ МэВ имеет вид [23]

$$W_{nn} = \frac{\hbar^2}{m_n} \frac{1}{E + E_{nn}}, \quad (8.27)$$

где E — энергия нейтрона в системе центра инерции. Величина E_{nn} очень мала: $E_{nn} \leq 60$ кэВ (энергия синглетного состояния нейтронов). Учтем также, что при больших энергиях $150 \leq E \leq 400$ МэВ сечение W_{nn} постоянно и составляет $\approx 3,4 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ [23]. Аппроксимируем W_{nn} формулой

$$W_{nn} = \left(3,4 \cdot 10^{-27} + \frac{4,15 \cdot 10^{-25}}{E + E_{nn}} \right) \text{ см}^2, \quad (8.28)$$

где E и E_{nn} взяты в МэВ

$$E = \frac{m_n g_{nn}^2}{4 \cdot 1,602 \cdot 10^{-6}} = \frac{2kTx_0 y^2}{1,602 \cdot 10^{-6}} \text{ (МэВ)}. \quad (8.29)$$

Для сильного вырождения, подставляя (8.28) в (8.23) и (8.26), получаем

приближенно после интегрирования

$$I = \left(2,3 \cdot 10^{-27} + \frac{1,5 \cdot 10^{-25}}{\rho^{2/3}} \right) \text{ см}^2, \quad (8.30)$$

$$\lambda_{nn} = \frac{9,2 \cdot 10^{18}}{1 + \frac{66}{\rho_{12}^{2/3}}} \cdot \frac{\rho_{12}}{T_9}, \quad \rho_{12} = \frac{n_n m_n}{10^{12}}, \quad T_9 = \frac{T}{10^9}.$$

Примем, что

$$W_{nN} \approx A^{2/3} W_{nn} \text{ с } W_{nn} \text{ из (8.27) при} \quad (8.31)$$

$$E = \frac{mv^2}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-6}} = \frac{kTx}{1,602 \cdot 10^{-6}} \text{ (МэВ)}.$$

Тогда из (8.24) получаем коэффициент нейтронной теплопроводности в смеси с ядрами

$$\lambda_n = \frac{9,2 \cdot 10^{18} \rho_{12}/T_9}{1 + \frac{66}{\rho_{12}^{2/3}} + 2,5 \frac{\rho_{12}^{1/3} \rho_{12N}}{A_{100}^{1/3} T_9^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{132}{\rho_{12}^{2/3}} \right)}, \quad (8.32)$$

$$\rho_{12N} = A m_n n_N / 10^{12}, \quad A_{100} = A/100.$$

Формула (8.32) справедлива при сильном вырождении:

$$x_0 \gg 1, \quad 5,8 \frac{\rho_{12}^{2/3}}{T_9} \gg 1.$$

Экстраполяция формулы (8.30) в область нейтронной жидкости $\rho \gg 1,5 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ количественно согласуется с [357], где рассмотрена теплопроводность на основе теории ядерной математики.

в) Теплопроводность нерелятивистских электронов. Рассмотрим кинетику электронного газа, учитывая электрон-ионные столкновения в приближении Лоренца [222], и пренебрегая межэлектронными соударениями. Правые части (8.8) с учетом (8.9), (8.20), (8.21) примут вид*

$$I_{eN}(R_i) = B \int f_0 f_{N0} (1 - f'_0) (R_i - R'_i) v b \, db \, d\varphi \, dv_{Ni}. \quad (8.33)$$

Принимая $R_i = R(v)v_i$ и умножая (8.8) на v_i , получаем для $A(v)$ и $\mathcal{D}(v)$ с учетом (8.3) и (8.6)

$$A(v) = \frac{x - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}}{2\pi n_N \int_0^\infty (1 - \cos\theta) v b \, db}, \quad (8.34)$$

* Для кулоновских столкновений классическое сечение совпадает с квантовым [144]; вместо нейтронов в этих формулах нужно рассматривать электроны: P_e вместо P_n и т.д.

$$\mathcal{D}(v) = \frac{1}{2\pi n_e n_N \int_0^\infty (1 - \cos\theta) v b db} \quad (8.35)$$

В [222] для кулоновского взаимодействия электронов с ионами, имеющими заряд Z , получено

$$\cos\theta = \frac{t_0^2 - 1}{t_0^2 + 1}, \quad t_0 = \frac{bv^2 m_e}{Ze^2}, \quad (8.36)$$

$$\Phi_{12} = \int_0^{b_{\max}} (1 - \cos\theta) v b db = \frac{2Z^2 e^4}{m_e^2 v^3} \Lambda_v, \quad \Lambda_v = \ln \left(\frac{b_{\max} v^2 m_e}{Ze^2} \right).$$

С учетом (8.2), (8.4), (8.12), (8.34)–(8.36) получаем

$$q_i = -\frac{640k}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3} \left(G_5 - \frac{1}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_4 \right) \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{128}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^5}{n_N Z^2 e^4 h^3} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_4 d_i, \quad (8.37)$$

$$\langle v_i \rangle = -\frac{128k}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^3}{n_e n_N Z^2 e^4 h^3} \left(G_4 - \frac{5}{8} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_3 \right) \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{32}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^4}{n_e n_N Z^2 e^4 h^3} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_3 d_i. \quad (8.38)$$

Полагая $\langle v_i \rangle = 0$ и выражая d_i через $\frac{\partial T}{\partial r_i}$, получаем из (8.37) и (8.38)

$$q_i = -\frac{128k}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3} \left(5G_5 - 4 \frac{G_4^2}{G_3} \right) \frac{\partial T}{\partial r_i} = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (8.39)$$

Коэффициент теплопроводности λ_e с учетом (7.6), (8.25) и разложения функций G_n по (2.24)

$$G_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \left[\frac{x_0^n}{n} + \frac{\pi^2}{6} (n-1) x_0^{n-2} + \dots \right] \quad (8.40)$$

записывается в виде

$$\lambda_e = \frac{128k}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3} \left(5G_5 - 4 \frac{G_4^2}{G_3} \right) = \begin{cases} \frac{16\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\Lambda} k \frac{n_e}{n_N} \left(\frac{kT}{e^2 Z} \right)^2 \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{HB}), \\ \frac{1}{32\Lambda} \frac{k^2 T n_e^2 h^3}{m_e^2 n_N Z^2 e^4} \quad (\text{B}) \end{cases} \quad (8.41)$$

(пометы НВ и В относятся к невырожденным и вырожденным электронам соответственно). Выпишем используемую в дальнейшем эффективную частоту столкновений электронов с ионами ν_{ei} [90]

$$\nu_{ei} = \frac{\int dp_i \nu(v) p v \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right)}{\int dp_i p v \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right)} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2} G_{3/2}} \frac{1}{1 + e^{-x_0}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2}} & \text{(НВ),} \\ \frac{32\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda m_e}{h^3 n_e} & \text{(В),} \end{cases} \quad \epsilon = \frac{p v}{2}, \quad (8.42)$$

где импульс электронов $p = m_e v$; $G_{3/2}$, x_0 определены в (8.6); функция распределения f_0 дана в (2.2);

$$\nu(v) = 2\pi n_N \varphi_{12} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \Lambda_v n_N}{m_e^2 v^3} -$$

частота столкновений электронов, имеющих скорость v ; φ_{12} дано в (8.36). Усредненный по скоростям кулоновский логарифм есть

$$\Lambda = \bar{\Lambda}_v = \ln \left(\frac{b_{\max} \bar{v}^2 m_e}{Z e^2} \right). \quad (8.43)$$

С учетом (8.2), (8.4), (8.6), (8.25) имеем

$$\frac{\bar{v}^2}{v^2} = \frac{3kT}{m_e} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} = \begin{cases} \frac{3kT}{m_e} & \text{(НВ)} \\ \frac{3}{5} \frac{h^2}{m_e^2} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3} & \text{(В)} \end{cases}. \quad (8.44)$$

Параметр $b_{\max}$ является радиусом экранирования заряда, который в обычной плазме называется дебаевским. Радиус экранирования невырожденными ионами $r_{\mathcal{D}i}$ есть [176]*)

$$r_{\mathcal{D}i}^{-2} = \frac{4\pi n_N e^2 Z^2}{kT}. \quad (8.45)$$

* Строго говоря, экранирование ионами носит здесь динамический характер и радиус экранирования несколько отличается от $r_{\mathcal{D}i}$ в (8.45) (см. [461]).

Расчет электронного экранирования сводится к уравнению Томаса-Ферми [144] с конечной температурой. Приближенно примем [4, 90]

$$r_{\mathcal{D}e}^{-2} = 4\pi n_e e^2 \frac{\int dp_i \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right)}{\int dp_i f_0} = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \left(\frac{1}{v^2} \right) =$$

$$= \frac{4\pi n_e e^2}{kT} \frac{G_{1/2}}{G_{3/2}} = \begin{cases} 4\pi n_e e^2 / kT & (\text{НВ}), \\ 16(3\pi^5)^{1/3} n_e^{1/3} e^2 m_e / h^2 & (\text{В}). \end{cases} \quad (8.46)$$

Общий радиус экранирования есть

$$\frac{1}{b_{\max}^2} = \frac{1}{r_{\mathcal{D}i}^2} + \frac{1}{r_{\mathcal{D}e}^2} = \frac{4\pi e^2}{kT} \left(n_N Z^2 + n_e \frac{G_{1/2}}{G_{3/2}} \right). \quad (8.47)$$

Для сильного вырождения $x_0 \gg 1$ имеем $r_{\mathcal{D}e} \gg r_{\mathcal{D}i}$ и важно только ионное экранирование $b_{\max} \approx r_{\mathcal{D}i}$. При высоких температурах и плотностях учет квантовых эффектов меняет значение Λ . Если обозначить

$$r_m = \frac{Ze^2}{m_e v^2}, \quad (8.48)$$

то (8.43) можно переписать в виде

$$\Lambda = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}, \quad b_{\min} = r_m. \quad (8.49)$$

Из квантовой механики следует, что минимальный прицельный параметр не может быть меньше длины волны де-Бройля, точнее [246]

$$b_{\min} > r_F = \frac{h\sqrt{3/5}}{4\pi m_e \sqrt{v^2}} = \frac{h}{4\pi\sqrt{5} m_e kT} \left(\frac{G_{3/2}}{G_{5/2}} \right)^{1/2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{h}{4\pi\sqrt{5} m_e kT} & (\text{НВ}), \\ \frac{h}{4\pi p_{Fe}} = \frac{n_e^{-1/3}}{2(3\pi)^{1/3}} & (\text{В}). \end{cases} \quad (8.50)$$

Поэтому в общем случае $b_{\min}$ определяется условием

$$b_{\min} = \max \{ r_m, r_F \} = \begin{cases} r_m & \text{при } \frac{v_{ch}}{c} < \frac{2\sqrt{5}}{3} \frac{e^2}{\hbar c} Z = \frac{Z}{92}, \\ r_F & \text{при } \frac{v_{ch}}{c} > \frac{Z}{91,93}, \end{cases} \quad (8.51)$$

где $v_{ch} = \sqrt{v^2/3} = (kT/m_e)^{1/2} (G_{5/2}/G_{3/2})^{1/2}$. Таким образом, в достаточно широкой области существования нерелятивистских электронов необходимо брать $b_{\min} = r_F$. Отметим, что для смеси ядер в формулах (8.37)–(8.43) следует сделать замену

$$n_N Z^2 \Rightarrow \langle n_N Z^2 \rangle = \sum_i n_{Ni} Z_i^2, \quad n_N Z^2 \Lambda \Rightarrow \langle n_N Z^2 \Lambda \rangle = \sum_i n_{Ni} Z_i^2 \Lambda_i, \quad (8.52)$$

где Λ_i дается формулой (8.43) с $Z = Z_i$. Учет межэлектронных соударений можно сделать, либо отказавшись от приближения Лоренца, вычисляя λ_e аналогично λ_n из п.б), либо феноменологически заменив ν_{ei} на $(\nu_{ei} + \nu_{ee})$ в формуле (8.41). Последний способ представляется более предпочтительным, так как при этом не теряется точность учета (ei) столкновений, которые практически всегда преобладают для вырожденных электронов. Исследование вклада (ee) -столкновений в этом случае показало, что [202, 461] при $Z \gg 1$ он пренебрежимо мал, а при $Z \sim 1$ он не превышает 50 %.

При высоких значениях плотности и сильном вырождении электронов становится существенным кулоновское взаимодействие между ионами, влияющее на (ei) -столкновения. Электронная теплопроводность для этого случая рассмотрена в следующем разделе.

г) Теплопроводность вырожденных электронов с учетом релятивизма и эффектов неидеальности ионов. Релятивистские электроны в звездах, как правило, сильно вырождены. Теплопроводность для этого случая рассчитана в работах [246, 245]. Записывая λ_e в виде, аналогичном (8.41), где вместо m_e берется полная масса электрона на границе Ферми (см. § 2) m_* :

$$m_* = (m_e^2 + p_{Fe}^2/c^2)^{1/2} \quad \text{с } p_{Fe} \text{ из (2.20)}, \quad (8.53)$$

получаем

$$\lambda_e = \frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_* \nu_e} = \frac{4,11 \cdot 10^{15} (\rho_6/\mu_Z) T_6}{[1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]^{1/2}} \left(\frac{10^{16} \text{ с}^{-1}}{\nu_e} \right) (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}),$$

$$\rho_6 = \rho/10^6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad T_6 = T/10^6 \text{ К}. \quad (8.54)$$

Величина ν_e является полной частотой столкновений электронов в среде. В [246] вычисление ν_e проводится для вырожденного газа электронов с

$$T < T_F = \frac{m_* - m_e}{k} c^2 = 5,93 \cdot 10^9 \frac{(\rho_6/\mu_Z)^{2/3}}{1 + [1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]^{1/2}}, \quad (8.55)$$

$$20Z^2 \ll \rho < 4 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Ограничение снизу на ρ в (8.55) есть условие идеальности электронного газа ([145], см. также (4.23)). При $T_m < T < T_F$, где

$$T_m = Z^2 e^2 / k \Gamma_m l_{WS} \text{ — температура кристаллизации,}$$

$$\Gamma = Z^2 e^2 / k T l_{WS} \text{ — газовый параметр, } \Gamma_m \approx 150^*) \quad (8.56)$$

$$l_{WS} = (3/4 \pi n_N)^{1/3} \text{ — радиус ячейки Вигнера—Зейца (см. (4.25)),}$$

наиболее важно рассеяние электронов на ионах. Вычисление ν_{ei} , проводимое так же, как в п. в, дает, аналогично (8.42)

$$\nu_{ei} = \frac{32 \pi^2 m_* n_N Z^2 e^4}{3 h^3 n_e} \Lambda_{ei} = 1,77 \cdot 10^{16} \frac{n_N Z^2}{n_e} \left[1 + \left(\frac{\rho_6}{\mu_Z} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \Lambda_{ei}. \quad (8.57)$$

*) См. сноску к с. 50.

При вычислении кулоновского логарифма следует учесть, что за счет релятивистских поправок становятся существенными члены $\sim v_{Fe}^2/c^2$, а с учетом ионных корреляций максимальный прицельный параметр интерполируется выражением $b_{\max}^2 = r_{\mathcal{D}i}^2 + l_{WS}^2/6$, где l_{WS} дано в (8.56), а $r_{\mathcal{D}i}$ в (8.45)*). Значение $b_{\min} = r_F = h/4\pi p_{Fe}$ аналогично (8.50). В [246] получена интерполяционная формула для Λ_{ei} , справедливая при всех температурах $T_m < T < T_{Fe}$,

$$\begin{aligned}\Lambda_{ei} &= \ln \left[\left(\frac{2\pi Z}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{\Gamma} \right)^{1/2} \right] - \frac{v_{Fe}^2}{2c^2} = \\ &= \ln \left[(4Z)^{1/3} \left(1 + \frac{2}{\Gamma} \right)^{1/2} \right] - \frac{(\rho_6/\mu_Z)^{2/3}}{2[1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]}, \quad (8.58) \\ v_{Fe}/c &= (p_{Fe}/m_e c) \left(1 + \frac{p_{Fe}^2}{m_e^2 c^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{см. (2.3). (8.53)}).\end{aligned}$$

При температурах ниже температуры кристаллизации $T < T_m$ вместо (ei)-рассеяния происходит рассеяние электронов на тепловых колебаниях кристаллической решетки — фононах. Частота столкновений электронов с фононами $\nu_{e,ph}$ классического ($T > \theta = 0,45 \hbar \omega_{pi}/k$ **) и квантового ($T < \theta$) кристаллов с 10 % аппроксимируется формулой [245, 246]

$$\begin{aligned}\nu_{e,ph} &= \frac{e^2}{\hbar v_{Fe}} \omega_{pi} x \left[\left(2 - \frac{v_{Fe}^2}{c^2} \right) \varphi^{(0)}(x) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi^2} \left(3\Lambda_{ph} - 1 + \frac{v_{Fe}^2}{2c^2} \right) \varphi^{(2)}(x) \right], \quad (8.59)\end{aligned}$$

где справедливы интерполяционные формулы

$$\begin{aligned}x^2 \varphi^{(0)}(x) &= 13 [1 + (\theta/3,46T)^2]^{-1/2}, \\ (x/\pi)^2 \varphi^{(2)}(x) &= 13(\theta/5,1T)^2 [1 + (\theta/4,17T)^2]^{-3/2}, \quad (8.60)\end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned}\omega_{pi}^2 &= \frac{4\pi n_N Z^2 e^2}{m_N} \quad \text{— плазменная частота ионов,} \\ x &= \frac{\hbar \omega_{pi}}{kT} = \frac{\theta}{0,45T}, \quad (8.61)\end{aligned}$$

$\Lambda_{ph} = \Lambda_{ei}$ из (8.58), если принять там $\Gamma \gg 1$.

Уточнение формулы (8.59) на основе расчетов методом Монте-Карло сделано в работе [546]. Если в кристалле имеются примеси, ионы другого сорта, вкрапленные в узлы решетки, то при низких температурах рассеяние на них может оказаться существенным. Частота столкновений электро-

*) При низких плотностях $\rho \sim 20Z^2$ важен учет электронного экранирования, уменьшающего $b_{\max}$ и приводящего к уменьшению ν_{ei} на $\sim 40\%$ [432].

**) Величина θ определена в (4.38), где она выражена через $\omega_i = \omega_{pi}/\sqrt{3}$.

нов с примесями $\nu_{e,imp}$ задается формулой [245]

$$\nu_{e,imp} = \frac{4m_* e^2 (\overline{\Delta Z})^2 x_{imp} \Lambda_{imp}}{3\pi \hbar^3 Z}, \quad (8.62)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta Z)^2} & - \text{среднее отклонение заряда в примесях,} \\ x_{imp} & - \text{весовая концентрация примесей,} \\ \Lambda_{imp} & = \ln \left(\frac{2p_{Fe}}{\hbar q_{TF}} \right) - \frac{1}{2} - \frac{v_{Fe}^2}{2c^2}. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Здесь p_{Fe} определено в (2.20), $q_{TF} = \frac{\sqrt{3}\omega_{pe}}{v_{Fe}}$, $\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_*}$, v_{Fe} дано в (8.58)*).

Расчеты показали, что для релятивистских электронов (ee)-столкновения могут быть более существенны, чем в нерелятивистском газе. Частота (ee)-столкновений дается формулой [245]

$$\begin{aligned} \nu_{ee} & = \frac{3}{2\pi^3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{(kT)^2}{\hbar m_* c^2} \left(\frac{2k_{Fe}}{q_{TF}} \right)^3 J(y) = \\ & = 5,08 \cdot 10^{11} T_6^2 (v_{Fe}/c)^{3/2} [1 + (\rho_6/\mu_Z)^{2/3}]^{-1/2} J(y) \quad (c^{-1}), \end{aligned} \quad (8.64)$$

где

$$\begin{aligned} k_{Fe} & = \frac{p_{Fe}}{\hbar}, \quad y = \frac{\sqrt{3} T_p}{T}, \quad T_p = \frac{\hbar \omega_{pe}}{k} = 3,33 \cdot 10^8 \left(\frac{\rho_6}{\mu_Z} \right)^{1/3} \left(\frac{v_{Fe}}{c} \right)^{1/2} \\ J(y \geq 20) & \approx 51,0 - \frac{995}{y} + \frac{1,51 \cdot 10^4}{y^2}, \\ J(y \leq 1) & \approx \frac{y^3}{3} \Lambda_{ee}, \quad \Lambda_{ee} = \ln \frac{2}{y}. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Для промежуточных значений имеем таблицу

y	0,5	1,5	3	7	10
$J(y)$	0,056	0,53	2,6	8,8	13,5

Таким образом, теплопроводность вырожденных электронов определяется формулой (8.54), где

$$\nu_e = \begin{cases} \nu_{ei} + \nu_{ee} & \text{при } T \geq T_m, \\ \nu_{e,ph} + \nu_{e,imp} + \nu_{ee} & \text{при } T \leq T_m. \end{cases} \quad (8.66)$$

Соответствующие формулы для смеси ионов можно получить с помощью замен (8.52).

*) Величина q_{TF} имеет смысл обратного радиуса экранирования $q_{TF} = r_{De}^{-1}$ (см. (8.46) для нерелятивистского случая).

д) Поглощение при больших температурах и сильных магнитных полях. При аккреции на нейтронные звезды и черные дыры возможно существование областей с большими магнитными полями, где важна непрозрачность, связанная с синхротронным или циклотронным самопоглощением. Оценки непрозрачности для этого случая сделаны в [294]. Из закона Кирхгофа (5.13) следует, что между полной излучательной способностью вещества ϵ_{tot} (эрг $\cdot$ г $^{-1}$ $\cdot$ с $^{-1}$) и средней по Росселанду непрозрачностью κ существует линейная связь

$$\epsilon_{\text{tot}} = A \sigma T^4 \kappa.$$

Для тормозного излучения нерелятивистских электронов, согласно [89] и (7.15), соответствующие ϵ_{tot} и κ равны

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ff}} &= 6 \cdot 10^{20} \rho T^{1/2}, \\ \kappa_{\text{ff}} &= 6,4 \cdot 10^{22} \rho T^{-7/2}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Отсюда

$$A = \frac{6}{6,4 \cdot 10^2 \sigma} \approx 170. \quad (8.68)$$

Для максвелловского распределения*) излучательная способность электронов в магнитном поле с компонентой $B_{\perp}$, перпендикулярной направлению движения электрона, вычислена в [59]:

$$\epsilon_B = \begin{cases} 2,3 T B_{\perp}^2 & \text{при } kT \ll m_e c^2, \\ 3,2 \cdot 10^{-10} T^2 B_{\perp}^2 & \text{при } kT \gg m_e c^2. \end{cases} \quad (8.69)$$

Соответствующие непрозрачности с использованием (8.68), (8.69) равны [294]

$$\kappa_B = \begin{cases} 2 \cdot 10^2 B^2 / T^3 & \text{при } kT \ll m_e c^2, \\ 3 \cdot 10^{-8} B^2 / T^2 & \text{при } kT \gg m_e c^2. \end{cases} \quad (8.70)$$

В [294] для релятивистских максвелловских электронов аналогично вычислено κ_{ff} , используя ϵ_{ff} (см., например, [59]):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ff}} &= 2 \cdot 10^{16} \rho T \ln \frac{kT}{m_e c^2}, \\ \kappa_{\text{ff}} &= 2 \cdot 10^{18} (\rho / T^3) \ln \frac{kT}{m_e c^2}. \end{aligned} \quad (8.71)$$

В оценках этого раздела рассматривалась чисто водородная невырожденная плазма. Учет рождения пар сводится к умножению ϵ и κ в (8.70), (8.71) на величину $\left(1 + \frac{2n_+ m_u}{\rho}\right)$. Для равновесных пар n_+ определяется из (2.9), (2.17). Сравнение (8.71) с (7.29), (7.31) показывает, что для невырожденных электронов всегда $\kappa_{\text{ff}} \ll \kappa_{\text{es}}$.

*) Здесь распределение Максвелла для релятивистских электронов используется вместо ферми-дираковской функции, так как концентрация пар не предполагается равновесной.

§ 9. Перенос излучения в движущихся средах

Если в среде имеют место крупномасштабные движения с полем скоростей v_i , то уравнение переноса (5.9) формально не изменится. Однако взаимодействие квантов с веществом зависит от скорости движения, меняющей частоту квантов из-за эффекта Доплера. При этом возникают существенные усложнения в правой части уравнения (5.9). В связи с этим удобнее записать уравнение переноса в сопутствующей системе координат, покоящейся относительно вещества. В этой системе правая часть (5.9) не меняется, но необходимо учесть изменения в конвективных членах левой части.

а) **Уравнение переноса в сопутствующей системе.** В первых работах [113, 162, 320] уравнение переноса в сопутствующей системе было выведено сложным "геометрическим" методом. В [36, 159] был сделан более простой вывод этого уравнения с помощью инвариантов рассеяния (см. ниже). Обозначим индексом "0" величины, относящиеся к сопутствующей системе. Считая $v \ll c$, оставим везде только первые поправки $\sim v/c$ [320, 36, 159]:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \mu - (1 - \mu^2) \frac{v}{c}, & \mu &= \mu_0 + (1 - \mu_0^2) \frac{v}{c}, \\ \nu_0 &= \nu \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right), & \nu &= \nu_0 \left(1 + \mu_0 \frac{v}{c}\right),\end{aligned}\quad (9.1)$$

$$\mu_0 = \cos \theta_0, \quad \mu = \cos \theta.$$

Из условия инвариантности функции распределения фотонов в фазовом пространстве $\tilde{n}_\nu$ относительно преобразований Лоренца (импульс фотона $p_\nu = h\nu/c$),

$$\tilde{n}_\nu = \frac{c^3 f_\nu}{h^3 \nu^2} = \frac{c^2 I_\nu}{h^4 \nu^3}, \quad (9.2)$$

получаем инвариант

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \frac{I_{\nu_0}}{\nu_0^3}. \quad (9.3)$$

Здесь $dn_\nu = \tilde{n}_\nu p_\nu^2 dp_\nu dV d\Omega$, f_ν и I_ν определены в (5.1) и (5.4). Из инвариантной записи левой части (5.9) с помощью (9.3) следуют, например,

$$\begin{aligned}\text{соотношения} \left(\text{используя } \frac{dt_0}{\nu_0} = \frac{dt}{\nu} \right) \\ \frac{\dot{I}_{\nu_0} \rho_0}{\nu_0^2} = \frac{\dot{I}_\nu \rho}{\nu^2},\end{aligned}\quad (9.4)$$

$$(\alpha_\nu + \sigma_\nu) \rho \nu = (\alpha_{\nu_0} + \sigma_{\nu_0}) \rho_0 \nu_0.$$

Для плоской атмосферы, делая замену переменных в уравнениях (5.9), (5.11)

$$(t, r, \mu, \nu, I_\nu) \Rightarrow (t_0, r_0, \mu_0, \nu_0, I_{\nu_0}),$$

с помощью (9.1), (9.3), (9.4) получаем с точностью до членов $\sim v/c$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial t_0} + \mu_0 \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial r_0} + \frac{3\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} I_{\nu_0} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \nu_0 \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial \nu_0} - \\ - \frac{\mu_0(1-\mu_0^2)}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial \mu_0} = j_{\nu_0} \rho_0 - \alpha_{\nu_0} \rho_0 I_{\nu_0}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь опущено рассеяние, которое можно добавить к правой части аналогично (5.9), и использованы лагранжевы координаты

$$t_0 = t, \quad m = \int_{r_*}^{r_0} \rho_0(x) dx, \quad \frac{dm}{dr_0} = \rho_0, \quad (9.6)$$

где r_0 — радиус данной лагранжевой точки. При переходе к эйлеровой системе $(t, \tilde{r}_0)$ в (9.5) нужно сделать замену

$$r_0 = \tilde{r}_0, \quad \frac{\partial}{\partial r_0} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_0}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + v \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_0}. \quad (9.7)$$

Уравнение переноса в эйлеровой форме записано в [159]. Для сферически симметричного случая, используя (5.12) вместо (5.11) в лагранжевых координатах

$$t_0 = t, \quad m = 4\pi \int_{r_*}^{r_0} \rho_0(x) x^2 dx, \quad \frac{dm}{dr_0} = 4\pi \rho_0 r_0^2. \quad (9.8)$$

аналогично (9.5) получаем [320]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial r_0} + \frac{3v}{cr_0} \left[1 - \mu_0^2 \left(1 - \frac{\partial \ln v}{\partial \ln r_0} \right) \right] I_{\nu_0} + \\ + \frac{1 - \mu_0^2}{r_0} \left[1 + \frac{\mu_0 v}{c} \left(1 - \frac{\partial \ln v}{\partial \ln r_0} \right) \right] \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial \mu_0} - \\ - \frac{\nu_0 v}{cr_0} \left[1 - \mu_0^2 \left(1 - \frac{\partial \ln v}{\partial \ln r_0} \right) \right] \frac{\partial I_{\nu_0}}{\partial \nu_0} = j_{\nu_0} \rho_0 - \alpha_{\nu_0} \rho_0 I_{\nu_0}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Используя (9.7), можно получить из (9.9) уравнение переноса для сферически-симметричного случая в эйлеровой системе координат. Более подробный вывод уравнения переноса для движущихся сред дан в книге [159].

б) **Уравнения моментов в эддингтоновском приближении.** Вывод моментных уравнений сделаем так же, как в § 6. Для плоской атмосферы, умножая (9.5) на μ и μ^2 и интегрируя, получаем, опуская далее индекс "0",

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (P + S) = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu - \alpha_P B(T) \right], \quad (9.10)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} F = -\kappa \rho F. \quad (9.11)$$

Здесь использованы обозначения § 6 и уравнения неразрывности вещества в лагранжевых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \quad (9.12)$$

С помощью (9.12) $\partial v / \partial r$ заменяется на $\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$. При $P = S/3$ из (9.11) и (9.12) получается замкнутая система моментных уравнений в эддингтоновском приближении [36, 37].

Аналогичная процедура для случая сферической симметрии с использованием уравнения (9.9) дает *

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} (P + S) + \frac{v}{r} (S - 3P) = \\ = -\rho c \left[\int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu dv - \alpha_P B(T) \right], \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial r} - c \frac{S - 3P}{r} - \frac{2}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} F - \frac{2}{r} \frac{v}{c} F = -\kappa \rho F. \quad (9.14)$$

Здесь также использовалось уравнение неразрывности в лагранжевой системе для исключения $\partial v / \partial r$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (vr^2) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - 2 \frac{v}{r}. \quad (9.15)$$

Для замыкания системы (9.13), (9.14) можно воспользоваться связью $P = fS$ с переменным фактором Эддингтона f из (6.28). При решении задач о стационарном истечении из звезд удобно воспользоваться записью уравнений моментов в эйлеровой системе. Для этого в (9.10), (9.11) и (9.13), (9.14) нужно сделать замену

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow v \frac{\partial}{\partial r}. \quad (9.16)$$

Отметим, что в условиях лучистого равновесия правые части в (9.10), (9.13) обращаются в нуль. В истекающих оболочках с градиентом скорости величина $F \neq \text{const}^*)$ ввиду возможной трансформации потока лучистой энергии в кинетическую. Если поле излучения не влияет на свойства потока, то уравнения (9.10)–(9.14) могут быть решены при заданных $\rho(r, t)$, $v(r, t)$. Для решения самосогласованной задачи систему следует дополнить уравнениями неразрывности, движения и энергии для вещества, рассмотренными ниже.

*) В сферически-симметричном случае $F r^2 \neq \text{const}$.

Распределения температуры и плотности в звездах, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и теплопроводности, могут оказаться неустойчивыми относительно развития несимметричных возмущений различного масштаба, приводящих к движению вещества, которое называется конвекцией. Рассмотрим конвекцию в оптически толстых средах. Проблема атмосферной конвекции, где оптическая толща может быть малой, имеет свою специфику и должна рассматриваться отдельно.

§ 10. Условия возникновения конвекции; путь перемешивания

а) **Условие конвективной неустойчивости.** Рассмотрим область звезды, где тепловой поток переносится теплопроводностью. Выделим малый элемент объема внутри этой области и сместим его наружу или внутрь на расстояние dr . При медленных перемещениях давление внутри элемента равно давлению внешней среды. После освобождения данный элемент либо стремится возвратиться в исходное положение, либо продолжает удаляться от него. В последнем случае среда называется конвективно неустойчивой.

Предположим сначала, что обмен энергией между элементом и средой отсутствует. В этом случае плотность внутри элемента при его смещениях следует адиабатическому закону. Пусть первоначально элемент находился в точке с параметрами T_0, ρ_0, P_0 . При смещении на dr его параметры (с индексом e) и параметры среды (с индексом m) изменяются на величины

$$\Delta T_e = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \frac{dP}{dr} dr, \quad \Delta T_m = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \frac{dP}{dr} dr + \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P \frac{dS}{dr} dr,$$

$$\Delta \rho_e = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \frac{dP}{dr} dr, \quad \Delta \rho_m = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \frac{dP}{dr} dr + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_P \frac{dS}{dr} dr. \quad (10.1)$$

Среда конвективно неустойчива, если при смещении наружу и расширении элемента его плотность падает быстрее, чем плотность среды, а при смещении внутрь и сжатии — быстрее растет. В этих условиях архимедова сила стремится удалить элемент от исходного равновесного положения. Таким образом, среда конвективно неустойчива, если

$$\Delta \rho_e > \Delta \rho_m \text{ или } \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_P \frac{dS}{dr} dr < 0 \text{ при сжатии,}$$

$$\Delta \rho_e < \Delta \rho_m \text{ или } \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_P \frac{dS}{dr} dr > 0 \text{ при расширении.} \quad (10.2)$$

Учитывая, что $(\partial \rho / \partial S)_P = -\gamma_2 \rho^2 T / P$, где $\gamma_2 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S$ дано в (1.12), а $dr < 0$ при сжатии и $dr > 0$ при расширении, получаем из обоих случаев

(10.2), что в конвективно неустойчивой звезде

$$dS/dr < 0, \quad (10.3)$$

т.е. удельная энтропия падает от центра наружу.

Условие (10.3) необходимо для развития конвективной неустойчивости, но не достаточно из-за неизбежного нарушения адиабатичности при движении элемента в среде. При адиабатическом расширении элемента в среде с $dS/dr < 0$ его температура становится больше температуры среды и процессы теплопроводности стремятся ее выровнять, что стабилизирует конвективную неустойчивость. С другой стороны, вязкость замедляет движение элемента, что также дает стабилизацию. Общий критерий конвективной неустойчивости с учетом явлений переноса был получен Релеем (1916) и имеет вид [312]

$$R = \frac{g\alpha_T\beta_T h^4}{k_T\nu} > R_{cr} \approx 10^3. \quad (10.4)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, h — толщина рассматриваемого слоя,

$\alpha_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ — коэффициент теплового расширения, $\beta_T = (\partial T / \partial r)_S$ — $dT/dr = \Delta T$ — превышение градиента над адиабатическим, k_T и ν — коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости, которые выражаются через коэффициенты теплопроводности λ и вязкости η в виде

$$\lambda = \rho c_p k_T, \quad \eta = \rho \nu. \quad (10.5)$$

Величина R_{cr} зависит от геометрии системы, граничных условий. Для слоя со свободными границами $R_{cr} = 27\pi^4/4 = 657,5$; с одной свободной границей и одной жесткой неподвижной $R_{cr} = 1101$; с двумя жесткими неподвижными границами $R_{cr} = 1708$ [312]. Величину $\beta_T = \Delta T$ можно выразить через dS/dr , используя термодинамические соотношения [145]

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_S - \frac{dT}{dr} = -\frac{T}{c_p} \frac{dS}{dr}, \quad \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \frac{dP}{dr} \right). \quad (10.6)$$

Условие Релея (10.4) означает, что для развития конвекции необходимо конечное значение отрицательного градиента энтропии. Для реальных условий в звездах, где характерные масштабы h очень велики, коэффициент при dS/dr в (10.4), (10.6) столь велик, что условие (10.3) можно использовать и в качестве достаточного условия возникновения конвекции. Этот критерий известен, как критерий Шварцшильда (1906).

б) Учет неоднородности химического состава. В химически неоднородной среде критерий (10.3) был дополнен в [147, 554] учетом изменения молекулярного веса μ (см. (1.6), (1.7)). Дополнение связано с поправкой к подъемной силе, вызванной переменной μ . В этом случае

$$\Delta \rho_m = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{S,\mu} \frac{dP}{dr} dr + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{P,\mu} \frac{dS}{dr} dr + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right)_{S,P} \frac{d\mu}{dr} dr. \quad (10.7)$$

Условия (10.2) с использованием (10.1), (10.7) сведутся к соотношению

$$\frac{dS}{dr} - \left(\frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{\rho, P} \frac{d\mu}{dr} < 0. \quad (10.8)$$

Учтя, что $(\partial S / \partial \mu)_{\rho, P} > 0$ [145], получим, что уменьшение молекулярного веса наружу стабилизирует конвективную неустойчивость, так что она наступает при конечном отрицательном значении dS/dr . Подобная стабилизация наступает при горении водорода в ядрах массивных звезд [165].

Перепишем критерий (10.8) в более удобном виде через градиенты ∇T и ∇P , непосредственно определяемые из уравнений звездной структуры (см. гл. 6). Учтя, что вдоль звезды

$$\frac{dP}{dr} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, \mu} \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T, \mu} \frac{d\rho}{dr} + \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{\rho, T} \frac{d\mu}{dr},$$

получаем

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T, \mu} \left[\frac{dP}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, \mu} \frac{dT}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{\rho, T} \frac{d\mu}{dr} \right]. \quad (10.9)$$

Условие конвективной неустойчивости (10.2) с учетом выражения $\Delta \rho_e$ из (10.1) запишется в виде *)

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{S, \mu} \frac{dP}{dr} < \frac{dP}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, \mu} \frac{dT}{dr} - \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{\rho, T} \frac{d\mu}{dr}. \quad (10.10)$$

Используя преобразования якобианов (1.10) и следующее из них равенство

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{\rho, \mu} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{S, \mu} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{S, \mu} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_{P, \mu} = 1,$$

имеем из (10.10)

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} > \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{S, \mu} + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P, \rho} \frac{d \ln \mu}{d \ln P}. \quad (10.11)$$

Условие конвективной неустойчивости в виде (10.11) получено в работах [147, 554]. Для смеси идеального газа с излучением

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P, \rho} = \frac{\beta}{4 - 3\beta_g}, \quad \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{S, \mu} = \gamma_2 \quad \text{из (1.12).}$$

в) Перенос тепла конвекцией в приближении пути перемешивания. У самой границы устойчивости конвективные движения являются топологически сложными, но вполне регулярными. При удалении от границы в область конвективной неустойчивости скорости конвективных движений воз-

* В этом параграфе величина μ считается не зависящей от T и ρ . В равновесии, когда $\mu = \mu(\rho, T)$, например при ионизации, переменность μ учитывается в производных от T и ρ , а член с $d\mu/dr$ выпадает.

растают (см. (10.14)). Характер движений в жидкости или газе определяется безразмерным числом Рейнольдса

$$Re = \frac{v L_d}{\nu}, \quad (10.12)$$

где L_d — характерный масштаб порядка шкалы высот по давлению $H_p = \frac{P}{|\nabla P|}$ (см. (10.22)). При малых значениях Re движение является регулярным, ламинарным, а при больших — хаотическим, запутанным, турбулентным. Критическое число Рейнольдса Re_{cr} меняется в зависимости от геометрии и граничных условий и лежит в пределах [235] $Re_{cr} = 400 \div 10^4$. В звездах характерные масштабы столь велики, что конвекция уже вблизи границы становится турбулентной. Например, в атмосфере Солнца в области оптической толщи $\tau \approx 1$ имеем [312] $L_d \approx 5 \cdot 10^7$ см, $\nu \approx 2 \cdot 10^3$ см² · с⁻¹, $v \approx 2 \cdot 10^4$ см · с⁻¹, $Re = 5 \cdot 10^8 \gg Re_{cr}$. Рост параметра Re сопровождается усложнением регулярной картины конвективных движений, которые становятся хаотическими при $Re > Re_{cr}$.

Количественное описание турбулентной конвекции, как и обычной гидродинамической турбулентности, сталкивается с принципиальными трудностями, связанными с недостаточностью наших знаний о природе хаотических или стохастических явлений. Прогресс в этой области связан с исследованием природы стохастичности в динамических системах с конечным небольшим числом степеней свободы. Это привело к качественному пересмотру картины развития турбулентности [198], открытию замечательных количественных закономерностей, описывающих развитие стохастических движений [211]. Однако до применения этих достижений к описанию турбулентной конвекции в звездах еще далеко.

До сих пор наиболее распространенным при изучении внутреннего строения звезд является простое количественное описание конвекции, основанное на модели пути перемешивания [306]. Предполагается, что конвективные элементы двигаются вверх и вниз, поднимаясь и опускаясь на длину l , которая называется средним путем перемешивания. Пройдя длину l , конвективный элемент полностью сольется с окружающей средой. Поднявшись на расстояние dr , конвективный элемент обладает избытком температуры $\Delta \nabla T dr$, который соответствует избытку энергии на единицу объема, $\rho c_p \Delta \nabla T dr$ так как обмен энергией происходит при постоянном давлении. Умножая на скорость конвективного элемента v , получаем поток конвективной энергии в виде

$$F_{conv} = \Delta \nabla T d r c_p \rho v \quad (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (10.13)$$

Величина v определяется из условия, что работа подъемной силы на расстоянии dr переходит в кинетическую энергию элемента. Средняя подъемная сила на единицу объема есть $\frac{1}{2} \Delta \nabla \rho dr \cdot g$ и на расстоянии dr имеем

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \Delta \nabla \rho dr^2 g. \quad (10.14)$$

Величина $\Delta \nabla \rho$ находится с помощью выкладок, аналогичных выводу (10.6), (10.11). Получаем

$$\Delta \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{S, \mu} - \frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S, \mu} \frac{dP}{dr} - \frac{dT}{dr}, \quad (10.15)$$

$$\Delta \nabla \rho = \frac{d\rho}{dr} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_{S, \mu} = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P, \mu} \left[\Delta \nabla T + \left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)_{P, \rho} \frac{d\mu}{dr} \right]. \quad (10.16)$$

Приняв, что среднее значение теплового потока соответствует сдвигу элемента на расстояние, равное половине длины перемешивания

$$\overline{dr} = \frac{1}{2} l, \quad (10.17)$$

получаем

$$F_{\text{conv}} = c_p \rho \left[- \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P, \mu} \frac{g}{\rho} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{l^2}{4} \left[(\Delta \nabla T)^3 + (\Delta \nabla T)^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)_{P, \rho} \frac{d\mu}{dr} \right]^{1/2}. \quad (10.18)$$

Обычно принимается, что конвекция выравнивает химический состав, поэтому в (10.18) можно принять $d\mu/dr = 0$. Для смеси полностью ионизованного газа с излучением c_p дано в (1.20), а

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P, \mu} = - \frac{\rho}{T} \left(1 + 4 \frac{P_r}{P_g} \right) = - \frac{\rho}{T} \left(\frac{4}{\beta_g} - 3 \right). \quad (10.19)$$

В сферически симметричной звезде $g = Gm/r^2$, m — масса внутри радиуса r . Подставляя это в (10.18), получаем

$$F_{\text{conv}} = c_p \rho \left[\frac{Gm}{Tr^2} \left(\frac{4}{\beta_g} - 3 \right) \right]^{1/2} \frac{l^2}{4} (\Delta \nabla T)^{3/2}. \quad (10.20)$$

Соотношение, аналогичное (10.20), использовалось в [277, 295]. Для идеального газа получаем выражение ($\beta_g = 1$)

$$F_{\text{conv}} = c_p \rho \left(\frac{Gm}{Tr^2} \right)^{1/2} \frac{l^2}{4} (\Delta \nabla T)^{3/2}, \quad (10.21)$$

приведенное в книге [229].

В теорию пути перемешивания входит свободный параметр l , который обычно принимается порядка шкалы высот по давлению

$$l = \alpha_p H_p = \alpha_p \frac{P}{|dP/dr|}, \quad (10.22)$$

где $\alpha_p \sim 1$ — численный коэффициент, выбираемый из условия наилучшего согласия с наблюдениями. Обычно $\alpha_p = 0,5 \div 2$.

В конвективных ядрах звезд, где большая плотность и эффективность переноса тепла конвекцией очень велика, величина $\Delta \nabla T$ становится столь малой, что распределение температуры можно считать адиабатическим и вместо уравнения теплопроводности использовать соотношение [229]

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S, \mu} \frac{dP}{dr}. \quad (10.23)$$

§ 11. Нелокальное и нестационарное описание конвекции

Конвективные элементы рождаются в неустойчивой области, разгоняются под действием подъемной силы и проникают в область конвективной устойчивости (overshooting). В данной точке тепловой поток зависит не только от локального значения $\Delta \nabla T$ и других параметров, но по меньшей мере от параметров в области $r \pm l$, т.е. даже в приближении пути перемешивания естественно возникают эффекты нелокальности и проникновения конвекции. Эти эффекты могут быть важными при наличии нескольких конвективных зон, разделенных лучистыми слоями. Проникновение конвекции в эти слои с $\Delta \nabla T \leq 0$ может существенно повлиять на эволюцию, приводя к перемешиванию и выравниванию химического состава. При изучении нестационарных процессов в звездах (колебания, тепловые вспышки, коллапс) необходимо нестационарное описание конвекции, т.е. учет временной нелокальности наряду с пространственной.

а) Обобщение модели пути перемешивания. Естественное обобщение модели пути перемешивания для учета эффектов проникновения и нелокальности сделано в работах [475, 513, 576]. В [475] рассмотрена итерационная процедура, позволяющая включить эти эффекты в расчеты эволюции.

В условиях конвекции полный тепловой поток F состоит из суммы

$$F = F_{\text{rad}} + F_{\text{NL}} = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (11.1)$$

причем из (6.32) имеем

$$F_{\text{rad}} = - \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}, \quad (11.2)$$

а F_{NL} — нелокальный конвективный поток. Вводим отношение

$$f = \frac{F_{\text{rad}}}{F}, \quad (11.3)$$

с помощью которого можно записать

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = F = - \frac{4\pi acT^3}{3\kappa\rho} \frac{1}{f} \frac{dT}{dr}. \quad (11.4)$$

Используя (11.4) в системе уравнений (22.1)–(22.7) при заданной функции $f_0(r)$ можно однозначно построить модель звезды. Имея модель, найдем конвективный поток с помощью нелокального подхода [475, 576].

Для конвективного элемента, начинающего свое движение с радиуса r_i , избыток температуры внутри элемента $\Delta T(r)$ записывается в виде

$$\Delta T(r) = \int_{r_i}^r \Delta \nabla T dr. \quad (11.5)$$

Аналогично избыток плотности среды есть

$$\Delta \rho(r) = \int_{r_i}^r \Delta \nabla \rho dr. \quad (11.6)$$

Вместо (10.14) имеем тогда уравнение для определения скорости конвективного элемента

$$\frac{v^2}{2} = (1 - \nu_T) \int_{r_i}^r g \frac{\Delta \rho}{\rho} dr, \quad (11.7)$$

где ν_T — доля работы выталкивающей силы, превращающейся в тепло из-за трения. Величины $\Delta \nabla T$ и $\Delta \nabla \rho$ определены в (10.15), (10.16). Следуя гипотезе перемешивания, примем, что конвективный элемент полностью сливается со средой, проходя длину пробега l . Тогда в среднем для поднимающихся элементов интегрирование в (11.5), (11.7) нужно вести при

$$0 \leq r - r_i \leq l/2, \quad (11.8)$$

а для опускающихся — при

$$-l/2 \leq r - r_i \leq 0 \text{ при } r \geq 0. \quad (11.9)$$

В последнем случае $\Delta T < 0$, $\Delta \rho < 0$, но в (11.7) всегда $v^2 > 0$. Обозначая индексами "+" и "-" величины, относящиеся к поднимающимся и опускающимся элементам, получим нелокальный конвективный тепловой поток в виде

$$F_{NL} = \frac{1}{2} c_p \rho (\Delta T_+ v_+ + |\Delta T_- v_-|). \quad (11.10)$$

Здесь предположено, что поднимающиеся и опускающиеся элементы имеют одинаковую площадь. В [475] принято $\nu_T = 0,5$.

По заданной модели, используя (11.2) и (11.10), находим новое значение f :

$$f_1(r) = \frac{F_{rad}}{F_{NL} + F_{rad}}. \quad (11.11)$$

Итерации производятся, пока $|f_n - f_{n-1}|$ не станет меньше заданной точности ϵ . Величина l находится из (10.22) в точке r .

Если в (11.7) подставить среднее значение $\overline{\Delta \rho} = \frac{1}{2} \Delta \nabla \rho \Delta r$, $\nu_T = 0$, то оно совпадает с (10.14). Учтя в (11.5) $\overline{\Delta T_+} = \overline{|\Delta T_-|} = \Delta \nabla T \cdot \Delta r$, получаем, что (11.10) при $\Delta r = |r - r_i| = l/2$ совпадает с локальным значением потока F_{conv} из (10.13).

В данной картине поднимающиеся элементы пересекают границу $\Delta \nabla T = 0$ при $r = r_\delta$ с конечной скоростью и проникают на расстояние $r_v < r_\delta + \frac{l}{2}$, где скорость их зануляется. При движении в области $r_\delta < r < r_v$

они постепенно теряют избыток температуры и при $r = r_e$ таком, что $r_\delta < r_e < r_v$, температуры и плотности элемента и среды сравниваются. В области $r_e < r < r_v$ архимедова сила замедляет элемент и конвективный поток является отрицательным. Расчеты в [475, 576] показывают, что конвекция проникает до расстояний $10 \div 15\%$ от l , причем глубина проникновения стремится к конечной величине $r_v - r_\delta \approx 0,06 l$ при исчезновении конвективной зоны. Построение звездных моделей с помощью изложенной итерационной процедуры сделано в [475].

Другой вариант учета нелокальных эффектов конвекции, рассмотренный Ульрихом в 1969 г., изложен в работе [612]. В этом варианте используется усреднение по конвективным элементам, приходящим в данную точку со всех возможных уровней. Если известны локальные значения конвективного потока из (10.18), то истинное нелокальное значение F_{NL*} получается в виде

$$F_{NL*}(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{conv}(z) \psi_0(z_0, z) dz, \quad (11.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z_0, z) dz = 1, \quad dz = \frac{dr}{H_p}.$$

В [612] предлагается весовая функция $\psi_0(z_0, z)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{a_k}{2\alpha'} \exp\left(-\frac{z_0 - z}{\alpha'}\right), \quad z_0 > z, \\ \psi_0 &= (1 - a_k) \delta(z_0 - z), \quad z_0 = z, \\ \psi_0 &= \frac{a_k}{2\alpha''} \exp\left(-\frac{z - z_0}{\alpha''}\right), \quad z_0 < z, \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$\alpha' = 1,2\alpha_p; \quad \alpha'' = 0,6\alpha_p, \quad a_k < 0,9.$$

Здесь H_p и α_p определены в (10.22). Функция (11.13) учитывает асимметрию вклада в F_{NL*} от поднимающихся ($z_0 > z$) и опускающихся элементов, а также возможный конечный вес $(1 - a_k)$ локального потока в данной точке. Рассмотренная выше итерационная процедура может быть использована и при расчете нелокального потока с помощью (11.12). Расчеты моделей оболочек звезд с $M = 1,25 M_\odot$ и $3 M_\odot$ с помощью F_{NL*} из (11.12) проводилось в [242], а для вычисления солнечного конвективного потока в [513] использовалось как F_{NL} из (11.10), так и F_{NL*} из (11.12), причем различие результатов оказалось существенным.

б) Нестационарная конвекция. В [364] были получены уравнения, описывающие конвективный перенос энергии и импульса в нестационарных условиях. Для вывода проводилось усреднение гидродинамических уравнений по флуктуирующим переменным и использовалось условие пути перемешивания. В сферически-симметричном случае вводятся величины, характеризующие конвекцию:

$$F_{conv} = \overline{\rho E w_r} \quad (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}) - \text{конвективный поток энергии}, \quad (11.14)$$

$$E_{conv} = \overline{3\rho w_r^2}/2\bar{\rho} \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1}) - \text{средняя удельная конвективная энергия}.$$

Средний модуль радиальной конвективной скорости выражается в виде [364]

$$\bar{w}_r = -F_{\text{conv}} / \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{\rho}} \right)_{\bar{P}} \bar{\rho}^2. \quad (11.15)$$

Введем также обычный путь перемешивания l из (10.22). Если расстояние до центра r или толщина конвективной зоны h меньше пути перемешивания из (10.22), то l выбирается минимальной из этих трех величин. Уравнения для F_{conv} и E_{conv} для изотропной конвекции имеют вид [364]

$$\frac{1}{r^2} \frac{D}{Dt} (r^2 F_{\text{conv}}) = -\frac{2}{3} \bar{\rho} E_{\text{conv}} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial r} + \bar{P} \frac{\partial(1/\bar{\rho})}{\partial r} \right) + F_{\text{conv}} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_n}{\partial \bar{E}} \right)_{\bar{P}} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{|\bar{w}_r|}{l} - \frac{16ac\bar{T}^3 (\partial \bar{T} / \partial \bar{\rho})_{\bar{P}}}{3 \bar{\kappa} \bar{\rho}^2 (\partial \bar{E} / \partial \bar{\rho})_{\bar{P}} l^2} \right], \quad (11.16)$$

$$\frac{DE_{\text{conv}}}{Dt} = \left[\frac{F_{\text{conv}}}{\bar{\rho}^3} / \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{\rho}} \right)_{\bar{P}} \right] \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} - \frac{|\bar{w}_r|^3}{l} - \frac{2}{3} \bar{\rho} E_{\text{conv}} \frac{D(1/\bar{\rho})}{Dt}. \quad (11.17)$$

Здесь $D/Dt = \partial/\partial t + v_r \partial/\partial r$; $\bar{\rho}$, $\bar{T}$, $\bar{E}$, $\bar{P}$, v_r — средние значения величин, входящие в уравнения гидродинамики (35.1)–(35.3), где черта сверху обычно опускается, ϵ_n (эрг $\cdot$ г $^{-1} \cdot$ с $^{-1}$) — объемная скорость выделения или потерь энергии (ядерные реакции, нейтринное излучение) $\bar{\kappa}$ — непрозрачность. Поправки к гидродинамическим уравнениям (35.1)–(35.3) за счет конвекции состоят в заменах

$$P \Rightarrow \bar{P} + \frac{2}{3} \bar{\rho} E_{\text{conv}}, \quad (11.18)$$

$$E \Rightarrow \bar{E} + E_{\text{conv}},$$

$$F_{\text{rad}} \Rightarrow F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}} \left[1 - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}^2} / \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{\rho}} \right)_{\bar{P}} \right] \approx F_{\text{rad}} + (\bar{\rho} E + P) w_r.$$

Уравнения (11.16), (11.17) содержат в себе условие конвективной неустойчивости в виде $dS/dr < 0$, т.е. изменение химического состава не учитывается. При $dS/dr > 0$ возмущения не растут, а колебательно затухают. Очевидно, что конвективный поток здесь описывается нелокально, так как определяется решением дифференциального уравнения. В [364] уравнения (11.16), (11.17) использовались для расчетов коллапса и взрыва массивных звезд после потери устойчивости.

Еще один вариант описания нестационарной и нелокальной конвекции путем добавления дифференциальных уравнений для F_{conv} и E_{conv} рассматривался в [345], однако полученные там уравнения не применялись для расчета звездных моделей.

Менее универсальные, но более детальные модели описания конвекции с учетом нестационарности, анизотропии, малой оптической толщи

часто используются в связи с построением моделей атмосфер у пульсирующих звезд (см., например, [261, 378]). Теории нелокальной конвекции почти не применяются при проведении эволюционных расчетов, так как существенные математические усложнения не сопровождаются заметным увеличением точности результатов по сравнению с локальной теорией [306]. Во всех случаях остается произвол, связанный с выбором параметров теории типа l в (11.8) или функций типа ψ_0 в (11.12).

§ 12. Численное моделирование конвекции

При изучении таких астрофизических проблем, как аномалии химического состава, определяемые по спектрам звезд, солнечная грануляция, генерация нетеплового потока конвекцией приближение пути перемещения в различных его модификациях оказывается недостаточным и используется численное моделирование конвекции. Решаемые при этом задачи очень сложны и требуют трудоемких двух- и трехмерных нестационарных расчетов [207]. Задачи подобного типа рассматриваются в гидродинамике для моделирования движения газов и жидкостей с потоками тепла, важной областью применения которых является моделирование движений в атмосфере Земли и планет.

Теория внутреннего строения звезд имеет лишь некоторые точки соприкосновения с такими расчетами: с их помощью объясняются отдельные наблюдательные особенности звезд на разных эволюционных стадиях. Как правило, каждая задача по численному моделированию предполагается для применения к какой-либо конкретной астрофизической задаче. Отсутствие универсальности, а также большие вычислительные сложности объясняют то, что численные модели конвекции не применяются и вряд ли будут в ближайшее время использоваться при расчетах звездной эволюции. Приведем качественное описание различных приближений при численном моделировании конвекции.

Основой для такого моделирования является система гидродинамических уравнений Навье-Стокса [150], в которой содержатся эффекты вязкости и теплопроводности. При исследовании ламинарной конвекции свойства переноса определяются излучением или газом. Численное исследование ламинарной конвекции на двумерных моделях горизонтального слоя с твердыми границами ("валиковая конвекция") обнаружило ячеистую структуру [83]. Отметим, что картина трехмерной конвекции является более сложной [312], топологически эквивалентной намагниванию линий тока на тор — "торовая конвекция" (рис. 19).

Как отмечалось в § 10, п. в, конвекция в звездах, как правило, является турбулентной. Численное моделирование турбулентной конвекции проводится в приближении, когда мелкомасштабные конвективные движения рассматриваются усредненно в виде турбулентных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Движения максимального масштаба $\sim H_p$ и больше, даже в условиях турбулентной конвекции образуют регулярные структуры, проявляющиеся в наблюдениях солнечной грануляции [312]. Исследование турбулентной конвекции в постановке, аналогичной [83], но с турбулентными коэффициентами переноса проводилось в работах [324, 581].

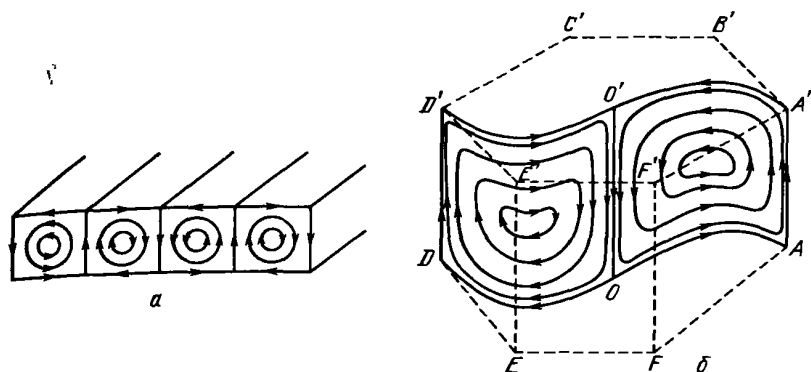


Рис. 19. Конвективные ячейки:
 а) двумерная "валиковая" конвекция,
 б) трехмерная ячейчатая "торовая" конвекция

Важное упрощение, значительно облегчившее численное моделирование турбулентной конвекции, сделано Огурой и Чарнеем (1960) и названо неупругим приближением [613]. Оно заключается в том, что P , ρ , T и другие термодинамические величины предполагаются мало отличающимися от равновесных значений и рассматриваются в линейном приближении, в то время как скорость v и динамические характеристики рассматриваются точно. Это приближение позволило отфильтровать генерируемые конвекцией звуковые волны, которые не влияют на ее основные характеристики, но затрудняют вычисления. Трехмерные расчеты солнечной грануляции в рамках неупругого приближения проводились в [338], двумерные расчеты, аналогичные [324], в [405].

Более простое, но все еще требующее больших численных расчетов приближение основано на разложении всех искомых переменных по заданной системе функций в горизонтальном направлении (локальное приближение). В этом приближении получается система обыкновенных уравнений для стационарной конвекции. Расчеты в неупругом модельном приближении в стационарном случае с оставлением одной и двух профилирующих функций проводились в [480].

Упрощения неупругого модельного приближения позволили исследовать различные области параметров, так как требуют существенно меньших затрат машинного времени, чем прямые двух- и трехмерные расчеты [83, 324, 581, 338, 405]. К настоящему времени в области численного моделирования конвекции сделано не так много. Можно надеяться, что дальнейшее развитие теории позволит более тесно связать ее с конвективными движениями в звездах.

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Большая часть энергии, излучаемой звездами, образуется в результате превращения водорода в гелий и дальнейшего превращения гелия в более тяжелые элементы. С точки зрения энергетика, звезда представляет собой гигантский котел, в котором протекает управляемая термоядерная реакция. "Управляемость" реакции эквивалентна тепловой устойчивости звезды (см. гл. 13). Пионерские работы по теории ядерных реакций в звездах связаны с именами Г. Бете, К. Вейцекера, Э. Солпитера. Современная ядерная астрофизика в значительной степени основывается на работах У. Фаулера и его соавторов.

§ 13. Скорости ядерных реакций

Рассмотрим реакцию, в которую вступают ядра 1 и 0, превращаясь в ядра 2 и 3

$$0 + 1 \rightarrow 2 + 3 + Q, \quad (13.1)$$

где

$$Q = (M_0 + M_1 - M_2 - M_3)c^2 = \frac{931,478}{m_u} (M_0 + M_1 - M_2 - M_3) (\text{МэВ}) = \\ = \frac{1,49232 \cdot 10^{-3}}{m_u} (M_0 + M_1 - M_2 - M_3) (\text{эрг}) \quad (13.2)$$

тепловая энергия, выделяющаяся на одну реакцию. Тепловой эффект Q из (13.2) увеличивается на $2m_e c^2 = 1,0220 \text{ МэВ} = 1,6374 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$, если в реакции образуется позитрон e^+ , аннигилирующий с электроном среды. Это учтено в реакции (14.1) в выражении для Q .

Основной микроскопической характеристикой реакции (13.1) является ее сечение $\sigma(01)$. Введем следующие обозначения:*)

$$\langle 01 \rangle \equiv \langle uv \rangle_{01} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}), \quad v - \text{относительная скорость}, \quad (13.3)$$

$$P_{01} = \frac{n_0 n_1}{1 + \delta_{01}} \langle 01 \rangle \quad (\text{реакций} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}) - \text{скорость реакции}, \quad (13.4)$$

$n_i = \rho N_A \frac{x_i}{A_i} \quad (\text{см}^{-3}) \quad (i = 0, 1, 2, 3); \quad x_i - \text{относительные весовые концентрации ядер}, \quad N_A = 6,02252 \cdot 10^{23} \text{ г}^{-1} - \text{число Авогадро}, \quad m_u = N_A^{-1} = 1,66043 \cdot 10^{-24} \text{ г} - \text{атомная единица массы, равная } 1/12 \text{ массы атома } ^{12}\text{С}.$

*) Содержание и обозначения (общепринятые в литературе) данного параграфа следуют, в основном, работе [360].

$$M_i - \text{атомные массы в реакции (13.1), } A_i = M_i/m_u, \\ [01] = \rho N_A \langle 01 \rangle (c^{-1}), \quad (13.5)$$

$$1/\tau_1(0) = \lambda_1(0) = -\frac{1}{n_0} \left(\frac{dn_0}{dt} \right)_1 = -\frac{1}{x_0} \left(\frac{dx_0}{dt} \right)_1 = n_1 \langle 01 \rangle = \\ = (x_1/A_1) [01] (c^{-1}), \quad (13.6)$$

где $\tau_1(0)$ — среднее время жизни ядра 0 до взаимодействия с ядром 1, $\lambda_1(0)$ — вероятность вступления в реакцию ядра 0 с ядром 1. Аналогично определяются величины $\tau_0(1)$ и $\lambda_0(1)$. Из (13.4)–(13.5) имеем

$$P_{01} = \rho N_A \frac{x_0 x_1}{A_0 A_1} \frac{[01]}{1 + \delta_{01}}. \quad (13.7)$$

Символ Кронекера $\delta_{01} = 1$ для одинаковых частиц и $\delta_{01} = 0$ для разных.

а) Сечения и скорости прямых и обратных реакций. По теореме взаимности (принцип детального равновесия) сечения прямой и обратной реакций в (13.1) связаны соотношением

$$\frac{\sigma(2,3)}{\sigma(0,1)} = \frac{1 + \delta_{23}}{1 + \delta_{01}} \frac{g_0 g_1}{g_2 g_3} \frac{A_0 A_1}{A_2 A_3} \frac{E_{01}}{E_{23}}, \quad (13.8)$$

где g_i — статистический вес ядра, (см. § 3), E_{01} и E_{23} — энергии ядер в системе центра масс до (E_{01}) и после (E_{23}) реакции (13.1). После усреднения по скоростям с максвелловским распределением, имеем

$$\frac{[23]}{[01]} = \frac{\langle 23 \rangle}{\langle 01 \rangle} = \frac{1 + \delta_{23}}{1 + \delta_{01}} \frac{g_0 g_1}{g_2 g_3} \left(\frac{A_0 A_1}{A_2 A_3} \right)^{3/2} \exp(-Q/kT). \quad (13.9)$$

Если частица 3 является фотоном $A_3 = 0$, то время $\tau_\gamma(2)$ фоторасщепления ядра 2 выражается через величину $\langle 01 \rangle$ для радиационного захвата

$$\frac{1}{\tau_\gamma(2)} = \lambda_\gamma(2) = \frac{g_0 g_1}{(1 + \delta_{01}) g_2} \left(\frac{A_0 A_1}{A_2} \right)^{3/2} \left(\frac{m_u k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \times \\ \times \langle 01 \rangle \exp(-Q/kT) = \\ = 0,98677 \cdot 10^{10} \frac{g_0 g_1}{(1 + \delta_{01}) g_2} \left(\frac{A_0 A_1}{A_2} \right)^{3/2} \frac{T_9^{3/2}}{\rho} [01] \times \\ \times \exp(-11,605 Q_6/T_9) (c^{-1}), \quad (13.10)$$

где Q_6 — энергия реакции в МэВ, $T_9 = T/10^9$ К. При высоких температурах и плотностях, когда могут идти обратные реакции, полная скорость реакции есть

$$P_{01} - P_{23} = \frac{n_0 n_1}{1 + \delta_{01}} \langle 01 \rangle - \frac{n_2 n_3}{1 + \delta_{23}} \langle 23 \rangle. \quad (13.11)$$

В равновесии $P_{01} = P_{23}$, с учетом (13.9) имеем

$$\frac{n_2 n_3}{n_0 n_1} = \frac{x_2 x_3}{x_0 x_1} \frac{A_0 A_1}{A_2 A_3} = \frac{g_2 g_3}{g_0 g_1} \left(\frac{A_2 A_3}{A_0 A_1} \right)^{3/2} \exp(Q/kT). \quad (13.12)$$

Аналогично для реакции радиационного захвата полная скорость реакции равна

$$P_{01} - P_{2\gamma} = \frac{n_0 n_1}{1 + \delta_{01}} \langle 01 \rangle - \frac{n}{\tau_{\gamma}(2)}, \quad (13.13)$$

а в равновесии $P_{01} = P_{2\gamma}$ с учетом (13.10) получаем

$$\frac{n_2}{n_0 n_1} = \frac{x_2 A_0 A_1}{\rho N_A x_0 x_1 A_2} = \frac{g_2}{g_0 g_1} \left(\frac{A_2}{A_0 A_1} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_u kT} \right)^{3/2} \exp(Q/kT) \quad (13.14)$$

или

$$\frac{x_2}{x_0 x_1} = 1,0134 \cdot 10^{-10} \rho T_9^{-3/2} \left(\frac{g_2}{g_0 g_1} \right) \left(\frac{A_2}{A_0 A_1} \right)^{5/2} \exp \left(\frac{11,605 Q}{T_9} \right) \quad (13.15)$$

(см. также (3.3)). В атомных единицах $A_n = 1,008665$, $A_H = 1,007825$, $A_D = 2,014103$, $A_T = 3,016050$, $A_{\text{He}} = 3,016030$, $A_{\text{He}} = 4,002603$, а остальные A_i равны атомным весам с ошибкой не более $3 \cdot 10^{-3}$.

Скорость выделения энергии ϵ (эрг $\cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}$) используемая в теории внутреннего строения звезд, есть

$$\begin{aligned} \epsilon_{01} &= \frac{P_{01}}{\rho} Q = 1,6021 \cdot 10^{-6} \frac{P_{01}}{\rho} Q_6 = \\ &= 9,6487 \cdot 10^{17} \frac{X_0 X_1}{A_0 A_1} \frac{[01]}{1 + \delta_{01}} Q_6 \text{ (эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Для реакции фотоотщепления $\epsilon_{2\gamma} < 0$ есть

$$\epsilon_{2\gamma} = -9,6487 \cdot 10^{17} \frac{X_2}{A_2} \lambda_{\gamma}(2) Q_6 \text{ (эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}. \quad (13.17)$$

При учете обратной реакции полное энергосодержание есть

$$\epsilon_{01} + \epsilon_{23} \text{ или } \epsilon_{01} + \epsilon_{2\gamma}, \quad (13.18)$$

где $\epsilon_{23} < 0$ определяется аналогично (13.16). Учет вылетающих нейтрино эквивалентен уменьшению теплового эффекта реакции Q . Для нерелятивистских невырожденных ядер усредненная по максвелловскому распределению величина $\langle \sigma v \rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \frac{(8/\pi)^{1/2}}{M^{1/2} (kT)^{3/2}} \int \sigma E \exp(-E/kT) dE = \\ &= 6,1968 \cdot 10^{-14} A^{-1/2} T_9^{-3/2} \int \sigma_b E_6 \exp(-11,605 E_6/T_9) dE \text{ (см}^3 \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \end{aligned} \quad (13.19)$$

где E_6 дано в МэВ, а σ_b в барнах ($1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$),

$$M = \frac{M_0 M_1}{M_0 + M_1} \text{ — приведенная масса,}$$

$$A = \frac{A_0 A_1}{A_0 + A_1} \text{ — приведенная атомная масса,} \quad (13.20)$$

$$E = Mv^2/2 \text{ — энергия в системе центра инерции.}$$

Сечение реакции (13.1) записывается с помощью теории возмущений в виде [212]

$$\sigma(01) = 2 \frac{g_2 g_3}{\pi \hbar^4} \frac{M' E_{23}}{v_{01} v_{23}} |\Omega H|^2, \quad E_{23} = M' v_{23}^2 / 2. \quad (13.21)$$

Здесь H — матричный элемент перехода, Ω — объем, к которому нормированы волновые функции, так что ΩH не зависит от Ω , $v_{01} = v$ и v_{23} — относительные скорости частиц до и после реакции, $M' = M_2 M_3 / (M_2 + M_3)$ — приведенная масса частиц после реакции. Вычисление матричного элемента, одинакового для прямой и обратной реакции, встречается с принципиальными трудностями, ввиду отсутствия строгой теории сильного взаимодействия. Приближенно имеем [212]

$$|\Omega H| = |\Omega \int dV \psi_{01}^* U \psi_{23}| \approx \bar{U} V_n \Omega |\psi_{01} \psi_{23}| \quad (\text{эрг} \cdot \text{см}^3), \quad (13.22)$$

где U (эрг) — энергия, а $\bar{U}$ — средняя энергия взаимодействия, примерно равная глубине потенциальной ямы, V_n — эффективный объем ядра (области сильного взаимодействия), ψ_{01} и ψ_{23} ($\text{см}^{-3/2}$) — начальная и конечная волновые функции относительных движений, $|\psi_i \psi_f|$ означает усреднение произведения волновых функций по объему ядра. Теоретическая оценка значения $|\Omega H|$ обычно корректируется экспериментальными данными.

б) Нерезонансные реакции с заряженными частицами. Особенность реакций с заряженными частицами состоит в необходимости туннельного (квантового) преодоления кулоновского барьера, так как кинетические энергии реагирующих частиц как правило много меньше энергии электростатического отталкивания при соприкосновении ядер $Z_0 Z_1 e^2 / r_{01}$, r_0 , r_1 — радиусы ядер, $r_{01} = r_0 + r_1$. После выделения медленно меняющейся с энергией функции $S(E)$, сечение $\sigma(E)$ записывается в виде

$$\sigma = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_0 Z_1 e^2}{\hbar v}\right) \equiv \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\sqrt{\frac{E_g}{E}}\right). \quad (13.23)$$

Здесь экспоненциальный множитель, возникающий от произведения волновых функций в (13.22), определяет вероятность прохождения через кулоновский барьер [212]. Функцию $S(E)$ удобно представить в виде разложения в ряд Маклорена:

$$S(E) = S(0) \left[1 + \frac{S'(0)}{S(0)} E + \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} E^2 \right]. \quad (13.24)$$

Подставляя (13.23) и (13.24) в (13.19), получаем, используя для интегрирования метод перевала [139],

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \frac{(8/\pi)^{1/2}}{M^{1/2} (kT)^{3/2}} \int S(E) \exp\left(-\frac{E_g^{1/2}}{E^{1/2}} - \frac{E}{kT}\right) dE = \\ &= \left(\frac{2}{M}\right)^{1/2} \frac{\Delta E_0}{(kT)^{3/2}} S_{\Phi} e^{-\tau}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Из (13.3) и (13.5) имеем

$$\langle 01 \rangle = \left[1,3006 \cdot 10^{-14} \left(\frac{Z_0 Z_1}{A} \right)^{1/3} S_{\text{эф}} \right] T_9^{-2/3} e^{-\tau} \text{ (см}^3 \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \quad (13.26)$$

$$[01] = \left[7,8327 \cdot 10^9 \left(\frac{Z_0 Z_1}{A} \right)^{1/3} S_{\text{эф}} \right] \rho T_9^{-2/3} e^{-\tau} \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad (13.27)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\text{эф}} &= S(0) \left[1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{S'(0)}{S(0)} \left(E_0 + \frac{35}{36} kT \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{S''(0)}{S(0)} \left(E_0^2 + \frac{89}{36} E_0 kT \right) \left. \right] (\text{МэВ} \cdot \text{барн}) = \\ &= S(0) \left[1 + 9,807 \cdot 10^{-2} W^{-1/3} T_9^{1/3} + 0,1220 \frac{S'(0)}{S(0)} W^{1/3} T_9^{2/3} + \right. \\ &+ 8,378 \cdot 10^{-2} \frac{S'(0)}{S(0)} T_9 + 7,447 \cdot 10^{-3} \frac{S''(0)}{S(0)} W^{2/3} T_9^{4/3} + \\ &+ 1,300 \cdot 10^{-2} \frac{S''(0)}{S(0)} W^{1/3} T_9^{5/3} \left. \right], \end{aligned} \quad (13.28)$$

$$W = Z_0^2 Z_1^2 A, \quad (13.29)$$

$$\begin{aligned} E_0 &= E_g^{1/3} \left(\frac{kT}{2} \right)^{2/3} = \left(\frac{\pi e^2 Z_0 Z_1 kT}{\hbar} \sqrt{\frac{M}{2}} \right)^{2/3} = \\ &= 0,12204 W^{1/3} T_9^{2/3} \text{ (МэВ)}, \end{aligned} \quad (13.30)$$

$$\tau = 3 \frac{E_0}{kT} = 4,2487 W^{1/3} T_9^{-1/3}, \quad (13.31)$$

$$kT = 0,08617 T_9 = T_9/11,605 \text{ (МэВ)} \quad (13.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= 4 \left(\frac{E_0 kT}{3} \right)^{1/2} = \frac{2^{11/6}}{3^{1/2}} \left(\frac{\pi e^2 Z_0 Z_1}{\hbar} \sqrt{M} \right)^{1/3} (kT)^{5/6} = \\ &= 0,23682 W^{1/6} T_9^{5/6} \text{ (МэВ)}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Интеграл в (13.25) берется методом перевала, причем $E = E_0$ соответствует минимуму модуля показателя экспоненты, а ΔE_0 — эффективная ширина энергетического интервала, дающего вклад в этот интеграл. Производные S' и S'' по E в (13.28) имеют размерность МэВ и МэВ · барн⁻¹, соответственно.

в) Резонансные реакции. Сечение реакции вблизи резонанса определяется формулой Брейта — Вигнера

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{2ME} \frac{\omega_r \Gamma_1 \Gamma_2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4} = \frac{0,6566}{AE_{\text{(МэВ)}}} \frac{\omega_r \Gamma_1 \Gamma_2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4} \text{ (барн)}, \quad (13.34)$$

где E_r — резонансная энергия в системе центра инерции для частиц $0 + 1$, Γ_1 — парциальная ширина распада резонансного состояния с образованием частиц 1 , а Γ_2 — с образованием частиц $2 + 3$, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$ — сумма по всем возможным парциальным ширинам, $\omega_r = (1 + \delta_{01})g_r/g_0g_1$, $g_r = 2J_r + 1$, J_r — спин резонансного состояния. Если полная ширина резонанса Γ — много меньше эффективного разброса энергии взаимодействующих частиц —

$$\Gamma \ll \Delta E_0 \text{ из (13.33) для заряженных частиц,} \quad (13.35)$$

$$\Gamma \ll kT \text{ для реакций с нейтронами —}$$

то, подставляя (13.34) в (13.19), получаем после интегрирования

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{MkT} \right)^{3/2} \frac{(\omega\gamma)_r}{\hbar} e^{-\frac{E_r}{kT}}. \quad (13.36)$$

Из (13.3) и (13.5) имеем

$$\langle 01 \rangle = [2,557 \cdot 10^{-13} A^{-3/2} (\omega\gamma)_r] T_9^{-3/2} \exp(-11,605 E_r/T_9) \text{ (см}^3 \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \quad (13.37)$$

$$[01] = [1,540 \cdot 10^{11} A^{-3/2} (\omega\gamma)_r] \rho T_9^{-3/2} \exp(-11,605 E_r/T_9) \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Здесь

$$(\omega\gamma)_r = \omega_r \gamma_r = (\omega \Gamma_1 \Gamma_2 / \Gamma)_r. \quad (13.38)$$

С учетом (13.34) и (13.10) получаем сечение резонансного фоторасщепления ядра

$$\lambda_\gamma(2) = \frac{g_r \gamma_r}{g_2 \hbar} \exp\left(-\frac{Q + E_r}{kT}\right) = \frac{(\omega\gamma)_r}{\omega_2 \hbar} \exp\left(-\frac{Q + E_r}{kT}\right) \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad (13.39)$$

где

$$\omega_2 = \frac{(1 + \delta_{01})g_2}{g_0g_1}. \quad (13.40)$$

Отметим, что формулы для резонансных реакций имеют одинаковый вид для заряженных частиц и нейтронов. Величина $(\omega\gamma)_r$, входящая в выражения для резонансных реакций, находится из эксперимента. Если известно полное сечение резонансной реакции $\int_r \sigma dE$, то из (13.34) и (13.38) имеем

$$(\omega\gamma)_r = \frac{ME_r}{\pi^2 \hbar^2} \int_r \sigma dE. \quad (13.41)$$

Если же экспериментально хорошо определяется величина $\sigma_r = \sigma(E_r)$ и полная ширина резонанса Γ_r , то $(\omega\gamma)_r$ находится из соотношения

$$(\omega\gamma)_r = \frac{\sigma_r M \Gamma_r E_r}{2\pi \hbar^2}. \quad (13.32)$$

Отметим, что для реакций, обратных (13.1), энергия резонанса E'_r есть

$$E'_r = E_r + Q. \quad (13.43)$$

Эта величина входит в (13.39).

г) Реакции при высоких температурах. При $T_9 \geq 1$ взаимодействие легких частиц (протонов, альфа-частиц, и фотонов) с тяжелыми ядрами происходит через большое число перекрывающихся резонансов. В этом случае полное значение $\langle \sigma v \rangle$ для этих реакций определяется суммированием большого числа формул типа (13.36). Расчеты, выполненные в [360, 361] для определения скоростей реакций p, α, γ с ядрами $19 \leq A \leq 40$ в области $1 \leq T_9 \leq 5$, аппроксимировались приближенными формулами. Сопоставление с экспериментом показало, что наилучшую аппроксимацию дает формула вида

$$[01] = \rho N_A \langle 01 \rangle = CT^m \rho \exp(-E_{th}/kT), \quad (13.44)$$

где C, m, E_{th} — эмпирические параметры.

д) Нерезонансные реакции с нейтронами. Сечение неупругого рассеяния нейтронов при малых энергиях является изотропным (S — волна) и $\sigma \sim 1/v$, так что $\sigma v = \text{const}$ при $v \rightarrow 0$ [360]. Величину σv удобно представить в виде ряда по $v \sim \sqrt{E}$:

$$\sigma v = \mathfrak{E}(\sqrt{E}) = \mathfrak{E}(0) \left[1 + \frac{\dot{\mathfrak{E}}(0)}{\mathfrak{E}(0)} \sqrt{E} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{\mathfrak{E}}(0)}{\mathfrak{E}(0)} E \right] \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}). \quad (13.45)$$

После усреднения имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \mathfrak{E}(0) \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\dot{\mathfrak{E}}(0)}{\mathfrak{E}(0)} (kT)^{1/2} + \frac{3}{4} \frac{\ddot{\mathfrak{E}}(0)}{\mathfrak{E}(0)} kT \right] = \\ &= S(0) \left[1 + 0,3312 \frac{\dot{\mathfrak{E}}(0)}{\mathfrak{E}(0)} T_9^{1/2} + 0,06463 \frac{\ddot{\mathfrak{E}}(0)}{\mathfrak{E}(0)} T_9 \right], \end{aligned} \quad (13.46)$$

где E выражено в МэВ, $\dot{\mathfrak{E}}(0)/\mathfrak{E}(0)$ в МэВ $^{-1/2}$, $\ddot{\mathfrak{E}}(0)/\mathfrak{E}(0)$ в МэВ $^{-1}$, а производные берутся по $E^{1/2}$. Величина $S(0)$ находится по измерениям сечения захвата тепловых нейтронов σ_{th} при $v_{th} = 2,2 \cdot 10^5$ см $\cdot$ с $^{-1}$, $E_{lab} = 2,53 \cdot 10^{-8}$ МэВ, так что

$$S(0) = (\sigma v)_{th} = 2,2 \cdot 10^{-19} \sigma_{th} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}), \quad \text{где } \sigma_{th} \text{ выражено в барнах.} \quad (13.47)$$

Коэффициенты $S(0)$, $S'(0)/\mathfrak{E}(0)$, $S''(0)/\mathfrak{E}(0)$ из (13.24), (13.28), $E_r, (\omega\gamma)_r$ из (13.36)–(13.39), параметры C, E_{th} с $m = 0$ из (13.44), $S(0)$, $\dot{\mathfrak{E}}(0)/\mathfrak{E}(0)$, $\ddot{\mathfrak{E}}(0)/\mathfrak{E}(0)$ из (13.45)–(13.46), а также значения Q и статистические веса различных реакций даны в [360]. В работах [361, 389, 399, 638, 321] приведены формулы для тех же реакций после уточнений и для многих других реакций. Выбор параметров в формулах основан на использовании экспериментальных данных, многие из которых были получены специально для астрофизических целей. В [650, 639] содержатся таблицы сечений этих реакций.

§ 14. Горение водорода, дейтерия и гелия

Стадия горения водорода является самой длительной в жизни звезды. Это связано с большим начальным обилием водорода в звездах ($\sim 70\%$ по массе) и большой калорийностью водорода при превращении его в гелий ($\sim 0,7\% mc^2$), когда выделяется $\sim 70\%$ энергии, получаемой при превращении водорода в самый стабильный элемент ${}^56\text{Fe}$. Фотонная светимость звезд на главной последовательности, где горит водород, как правило, меньше, чем на последующих стадиях эволюции, а их нейтринная светимость значительно меньше, ввиду того, что центральные температуры не превышают $\sim 4 \cdot 10^7$ К. Поэтому звезды главной последовательности являются самыми распространенными звездами в Галактике и во всей вселенной (см. гл. 9).

Выделение энергии на грамм при горении гелия примерно на порядок меньше, чем при горении водорода, а светимость таких звезд значительно выше. Вследствие этого время жизни и число их в Галактике значительно меньше, чем звезд главной последовательности. Тем не менее благодаря большой светимости таких звезд, которые являются гигантами и сверхгигантами, свойства их хорошо изучены. Помимо медленного горения, в звездах возможно развитие тепловых вспышек, когда происходит быстрое, так называемое взрывное горение при больших температурах $T_9 \sim 1$. Это может происходить на поздних стадиях эволюции, а также в веществе, аккрецирующем на белые карлики и нейтронные звезды.

а) Протон-протонная реакция и горение дейтерия. Горение водорода с образованием гелия требует превращения двух протонов в два нейтрона путем захвата электронов или испускания позитронов, с одновременным излучением нейтрино. Такие превращения происходят по реакциям слабого взаимодействия, которые (см. гл. 5) идут значительно медленнее ядерных реакций, связанных с сильным взаимодействием. Слияние двух протонов с образованием дейтерия является первой реакцией протон-протонного цикла, действующего в звездах с массой $M \leq M_\odot$, где центральные температуры не превышают $\sim 1,5 \cdot 10^7$ К. Рассмотрим цепочки pp-цикла. Сначала идут реакции [361, 359, 134]

$$1) {}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{D} + e^+ + \nu. \quad Q_{\text{tot}} = 1,442, \quad Q_6 = 1,192 \quad (14.1)$$

или

$$1a) {}^1\text{H} + e^- + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{D} + \nu, \quad Q_{\text{tot}} = 1,442, \quad Q_6 = 0,001. \quad (14.1a)$$

На Солнце и в более массивных звездах реакция 1) гораздо вероятнее, чем 1a). Дейтерий горит в реакции

$$2) {}^2\text{D} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma. \quad Q_6 = 5,494. \quad (14.2)$$

${}^3\text{He}$ вступает в две реакции:

$$3) {}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H}. \quad Q_6 = 12,860, \quad (14.3)$$

или

$$3a) {}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma, \quad Q_6 = 1,586. \quad (14.3a)$$

Превращение ${}^7\text{Be}$ в ${}^4\text{He}$ происходит двумя способами:

$$\begin{aligned} 3a_1) \quad & {}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu, \quad Q_{\text{tot}} = 0,862, \quad Q_6 = 0,049, \\ & {}^7\text{Li} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}, \quad Q_6 = 17,348, \end{aligned} \quad (14.3a_1)$$

или

$$\begin{aligned} 3a_2) \quad & {}^7\text{Be} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma, \quad Q_6 = 0,137, \\ & \left. \begin{aligned} & {}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu \\ & {}^8\text{Be}^* \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \end{aligned} \right\} Q_{\text{tot}} = 18,07, \quad Q_6 = 10,69. \end{aligned} \quad (14.3a_2)$$

Здесь Q_{tot} — полная энергия на реакцию (в МэВ), Q_6 — то же за вычетом энергии улетающего нейтрино. Полное энергосодержание в МэВ при образовании одного ядра гелия для различных цепочек составляет

$$Q_{\text{pp}} = \begin{cases} 26,23 & (1 + 2 + 3), \\ 23,85 & (1a + 2 + 3) \\ 25,67 & (1 + 2 + 3a + 3a_1), \\ 24,48 & (1a + 2 + 3a + 3a_1) \\ 19,1 & (1 + 2 + 3a + 3a_2), \\ 17,91 & (1a + 2 + 3a + 3a_2). \end{cases} \quad (14.4)$$

Соотношения между различными каналами зависят от физических условий в звездах. На Солнце основной является реакция $(1 + 2 + 3)$ и $Q_{\text{pp}} = 26,2$ МэВ. Скорость pp-реакции определяется самым медленным звеном (14.1) и пропорциональна (см. (13.4)) величине [389]

$$\begin{aligned} N_A \langle {}^1\text{H p} \rangle &= 3,82 \cdot 10^{-15} T_9^{-2/3} \exp(-3,380/T_9^{1/3}) \times \\ &\times (1 + 0,123 T_9^{1/3} + 1,09 T_9^{2/3} + 0,938 T_9) \text{ (см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Скорость энергосодержания для $(1 + 2 + 3)$, согласно (13.16) равна

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{pp}} &= 9,6487 \cdot 10^{17} \frac{x_{\text{H}}^2}{2} \rho N_A \langle {}^1\text{H p} \rangle \frac{Q_{\text{pp}}}{2} = \\ &= 6,32 \cdot 10^{18} \left(\frac{Q_{\text{pp}}}{26,2} \right) x_{\text{H}}^2 \rho N_A \langle {}^1\text{H p} \rangle \text{ (эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \end{aligned} \quad (14.6)$$

В молодых звездах, не достигших главной последовательности, где температура недостаточна для горения водорода, может идти реакция горения дейтерия или ${}^3\text{He}$. Скорость и энергосодержание реакции (14.2) равны [389]

$$\begin{aligned} N_A \langle {}^2\text{D p} \rangle &= 2,24 \cdot 10^3 T_9^{-2/3} \exp(-3,72/T_9^{1/3}) \times \\ &\times (1 + 0,112 T_9^{1/3} + 3,38 T_9^{2/3} + 2,65 T_9) \text{ (см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \end{aligned} \quad (14.7)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{^2\text{Dp}} &= 9,6487 \cdot 10^{17} \frac{x_{^2\text{D}} x_{\text{H}}}{2} \rho N_A \langle {}^2\text{D p} \rangle Q_6 = \\ &= 2,65 \cdot 10^{18} x_{^2\text{D}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^2\text{D p} \rangle \text{ (эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Аналогично для реакции (14.3) имеем [361]

$$N_A \langle {}^3\text{He} {}^3\text{He} \rangle = 5,96 \cdot 10^{10} T_9^{-2/3} \exp(-12,276/T_9^{1/3}) \times \\ \times (1 + 0,034 T_9^{1/3} - 0,199 T_9^{2/3} - 0,047 T_9 + 0,032 T_9^{4/3} + \\ + 0,019 T_9^{5/3}) \text{ (см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}\text{)}, \quad (14.9)$$

$$\epsilon_{{}^3\text{He} {}^3\text{He}} = 9,6487 \cdot 10^{17} \frac{x_{{}^3\text{He}}^2}{18} \rho N_A \langle {}^3\text{He} {}^3\text{He} \rangle Q_6 = \\ = 6,893 \cdot 10^{17} x_{{}^3\text{He}}^2 \rho N_A \langle {}^3\text{He} {}^3\text{He} \rangle \text{ (эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}. \quad (14.10)$$

Для учета горения ${}^2\text{D}$ и ${}^3\text{He}$ при расчете эволюции звезд, идущих к главной последовательности, нужно рассматривать все три реакции (14.5)–(14.10), причем в (14.6) положить $Q_6 = 1,192$ вместо $Q_{pp}/2$. Когда вблизи главной последовательности концентрации ${}^2\text{D}$ и ${}^3\text{He}$ достигнут малых стационарных значений, скорость энерговыделения будет определяться формулами (14.5), (14.6).

б) Углеродный и другие циклы горения водорода. При наличии ${}^{12}\text{C}$ и более тяжелых элементов и при достаточно высокой температуре водород превращается в гелий по различным цепочкам реакций, в которых тяжелые элементы играют роль катализаторов. Самый низкотемпературный CN цикл имеет вид [229, 361, 389, 259, 182]:

- 1) ${}^{12}\text{C} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma, \quad Q_6 = 1,944 \text{ (}\sim 10^6 \text{ лет)},$
- 2) ${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu, \quad Q_{\text{tot}} = 2,22, \quad Q_6 = 1,51 (\tau_{1/2} = 10 \text{ мин}),$
- 3) ${}^{13}\text{C} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma, \quad Q_6 = 7,551 (\sim 3 \cdot 10^6 \text{ лет}),$
- 4) ${}^{14}\text{N} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma, \quad Q_6 = 7,298 (\sim 3 \cdot 10^8 \text{ лет}),$
- 5) ${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu, \quad Q_{\text{tot}} = 2,76, \quad Q_6 = 1,76 (\tau_{1/2} = 12,4 \text{ с}),$
- 6) ${}^{15}\text{N} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^{12}\text{C} + {}^4\text{He}, \quad Q_6 = 4,966 (\sim 10^5 \text{ лет}).$

В скобках приведены периоды полураспада $\tau_{1/2}$ и характерные времена реакций для Солнца [229]. По подсчетам [361] энерговыделение в углеродном цикле за вычетом энергии нейтрино при образовании одного ядра гелия равно

$$Q_{\text{CN}} = 24,97 \text{ МэВ}. \quad (14.12)$$

Скорость реакции на Солнце определяется самой медленной реакцией цепочки 4) из (14.11); она равна [361]

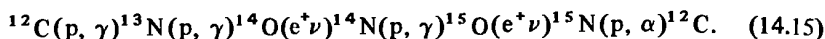
$$N_A \langle {}^{14}\text{N p} \rangle = \left\{ 5,08 \cdot 10^7 T_9^{-2/3} \exp \left[-\frac{15,228}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{3,090} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times (1 + 0,027 T_9^{1/3} - 0,778 T_9^{2/3} - 0,149 T_9 + 0,261 T_9^{4/3} + \\ + 0,127 T_9^{5/3}) + 2,28 \cdot 10^3 T_9^{-3/2} \exp(-3,011/T_9) + \\ \left. + 1,65 \cdot 10^4 T_9^{1/3} \exp(-12,007/T_9) \right\} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}. \quad (14.13)$$

Скорость энерговыделения есть

$$\epsilon_{\text{CN}} = 4,302 \cdot 10^{17} x_{{}^{14}\text{N}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^{14}\text{N p} \rangle \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (14.14)$$

Здесь использовано Q_6 из (14.12). Реакции CN-цикла преобладают над pp-циклом примерно для звезд, массивнее Солнца. С ростом температуры преодолевается более высокий кулоновский барьер и реализуется преимущество этой реакции, связанное с тем, что реакции бета-распада 2) и 5) в (14.11) идут здесь гораздо быстрее, чем pp-реакция (14.1). По мере протекания реакций CN-цикла происходит превращение почти всего углерода в азот, ввиду медленности реакции 4) из (14.11).

При температуре $T \geq 2 \cdot 10^8$ К реакция 4), а также 1), 3), 6) из (14.11) становятся быстрее реакции бета-распада 2), которая начинает лимитировать скорость цикла. В этом случае захват протона ядром ^{13}N приводит к другому циклу, называемому горячим CNO-циклом



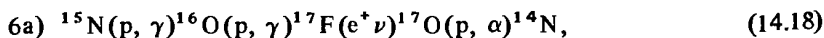
Здесь использована более компактная запись реакций, принятая в ядерной физике. Время полураспада ^{14}O в этом цикле равно 72 с [232] и медленная реакция 2) из (14.11) перестает лимитировать весь цикл. Скорость реакции $^{13}\text{N}(p, \gamma)^{14}\text{O}$ рассчитана в [481]:

$$\begin{aligned} N_A \langle ^{13}\text{Np} \rangle = & \left\{ 3,35 \cdot 10^7 T_9^{-2/3} \exp[-15,202/T_9^{1/3} - \right. \\ & - (T_9/1,072)^2] \times (1 + 0,027 T_9^{1/3} + 0,90 T_9^{2/3} + \\ & + 0,173 T_9 + 4,61 T_9^{4/3} + 2,26 T_9^{5/3}) + \\ & \left. + (3,02 \cdot 10^5 / T_9^{2/3}) \exp\left(-\frac{6,348}{T_9}\right) \right\} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

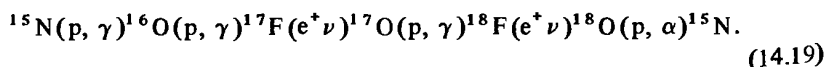
В этой реакции выделяется энергия $Q_6 = 4,626$ МэВ и энерговыделение на грамм есть

$$\epsilon_{^{13}\text{Np}} = 3,433 \cdot 10^{17} x_{^{13}\text{N}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle ^{13}\text{Np} \rangle \text{ (эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (14.17)$$

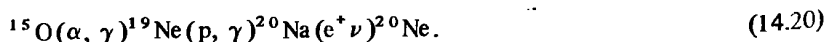
Наряду с реакцией 6) из (14.11) ядро ^{15}N может вступить в реакцию $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$. Воспроизводство ^{16}O приводит к появлению новой цепочки. Наряду с 6) идет звено реакций



после которого следует реакция 4) из (14.11), а также новый цикл



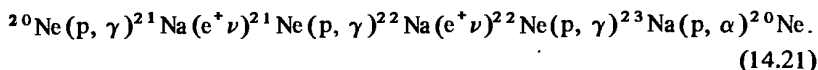
При высоких температурах, наряду с 5) в (14.11) проходит звено реакций [462]



Значения $N_A \langle \sigma v \rangle$, $\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}$ и выделение тепла на реакцию Q_6 , МэВ для двух реакций захвата

$T (10^9 \text{ К})$	$N_A \langle {}^{15}\text{O} \alpha \rangle \gamma$	$N_A \langle {}^{19}\text{Ne p} \rangle \gamma$	$T (10^9 \text{ К})$	$N_A \langle {}^{15}\text{O} \alpha \rangle \gamma$	$N_A \langle {}^{19}\text{Ne p} \rangle \gamma$
0,1	5,02 (-25)	1,01 (-11)	1,5	3,57	31,82
0,16	—	3,47 (-9)	2,0	17,6	78,7
0,2	8,81 (-13)	3,40 (-8)	3,0	99,2	167,0
0,4	7,42 (-7)	1,64 (-4)	4,0	267	—
0,6	1,80 (-4)	4,82 (-2)	5,0	573	—
0,8	1,01 (-2)	0,814	10,0	2,36 (+3)	—
1,0	0,129	4,16			
Q_6	3,53	2,19	Q_6	3,53	2,19

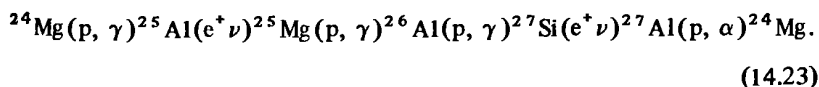
Благодаря производству ${}^{20}\text{Ne}$ появляется катализатор для протекания NeNa-цикла [608]



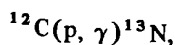
Протекание реакции производства ${}^{24}\text{Mg}$ (наряду с последней реакцией (14.21))



приводит к появлению еще более высокотемпературного MgAl-цикла горения водорода [361, 389]:



При $T \geq 2 \cdot 10^8 \text{ К}$, когда реакция 4) перестает лимитировать горение, требуется учет каждой реакции в отдельности из (14.11), а также из (14.15)–(14.23) для определения концентраций элементов и скорости выделения энергии. Для реакций α и p захвата из (14.20) скорости рассчитаны в [462]. Так как формулы типа (13.27) и (13.37) здесь весьма громоздки из-за наличия большого числа резонансов, приведем табл. 13 из [462], где приведены значения $N_A \langle \sigma v \rangle$ как функции температуры. Выделение тепла в этих реакциях получено по данным [135]. Для реакций (p, γ) из (14.11) имеем [361]



$$Q_6 = 1,944,$$

$$N_A \langle {}^{12}\text{Cp} \rangle = \left\{ 2,04 \cdot 10^7 T_9^{-2/3} \exp \left[-\frac{13,690}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{1,500} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times (1 + 0,03 T_9^{1/3} + 1,19 T_9^{2/3} + 0,254 T_9 + 2,06 T_9^{4/3} + \\ + 1,12 T_9^{5/3}) + 1,08 \cdot 10^5 T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{4,925}{T_9} \right) + \\ \left. + 2,15 \cdot 10^5 T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{18,179}{T_9} \right) \right\} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}, \quad (14.24)$$

$$\epsilon_{12\text{Cp}} = 1,563 \cdot 10^{17} x_{12\text{C}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^{12}\text{Cp} \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1});$$

$${}^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma){}^{14}\text{N}, \quad Q_6 = 7,551,$$

$$N_A \langle {}^{13}\text{Cp} \rangle = \left\{ 8,01 \cdot 10^7 T_9^{-2/3} \exp \left[-\frac{13,717}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{2,0} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times (1 + 0,03 T_9^{1/3} + 0,958 T_9^{2/3} + 0,204 T_9 + 1,39 T_9^{4/3} + \\ + 0,753 T_9^{5/3}) + 1,35 \cdot 10^6 T_9^{-3/2} \exp (-5,978/T_9) + \\ + 2,66 \cdot 10^5 T_9^{-3/2} \exp (-11,987/T_9) + \\ \left. + 2,26 \cdot 10^6 T_9^{-3/2} \exp (-13,463/T_9) \right\} \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (14.25)$$

$$\epsilon_{13\text{Cp}} = 5,604 \cdot 10^{17} x_{13\text{C}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^{13}\text{Cp} \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}).$$

Значение $N_A \langle 01 \rangle$ для реакции ${}^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma){}^{15}\text{O}$ дано в (14.13), а $\epsilon_{14\text{Np}}$ получается из ϵ_{CN} в (14.14) с коэффициентом $5,030 \cdot 10^{17}$ вместо $4,302 \cdot 10^{17}$. Имеем также

$${}^{15}\text{N}(\text{p}, \alpha){}^{12}\text{C}, \quad Q_6 = 4,966$$

$$N_A \langle {}^{15}\text{Np} \rangle_{\alpha} = 8,16 \cdot 10^{11} T_9^{-2/3} \exp \left[-\frac{15,25}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{0,522} \right)^2 \right] \times \\ \times (1 + 0,027 T_9^{1/3} + 6,74 T_9^{2/3} + 1,29 T_9) + \\ + 1,29 \cdot 10^8 T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{3,676}{T_9} \right) + \\ + 3,14 \cdot 10^8 \exp \left(-\frac{7,974}{T_9} \right) (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \quad (14.26)$$

$$\epsilon_{15\text{Np}_{\alpha}} = 3,194 \cdot 10^{17} x_{15\text{N}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^{15}\text{Np} \rangle_{\alpha} \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Для реакций из (14.18), (14.19) имеем [361]

$$^{15}\text{N}(\text{p}, \gamma)^{16}\text{O}, \quad Q_6 = 12,128,$$

$$N_A \langle ^{15}\text{Np} \rangle_\gamma = \left\{ 9,78 \cdot 10^8 T_9^{-2/3} \exp \left[-\frac{15,25}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{0,45} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times (1 + 0,027 T_9^{1/3} + 0,219 T_9^{2/3} + 0,042 T_9 + 6,83 T_9^{4/3} + \\ + 3,32 T_9^{5/3}) + 1,11 \cdot 10^4 T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{3,328}{T_9} \right) + \\ \left. + 1,49 \cdot 10^4 T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{4,665}{T_9} \right) + 3,80 \cdot 10^6 T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{11,048}{T_9} \right) \right\} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}, \quad (14.27)$$

$$\epsilon_{^{15}\text{Np}_\gamma} = 7,801 \cdot 10^{17} x_{^{15}\text{N}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle ^{15}\text{Np} \rangle_\gamma \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1});$$

$$^{16}\text{O}(\text{p}, \gamma)^{17}\text{F}, \quad Q_6 = 0,601,$$

$$N_A \langle ^{16}\text{Op} \rangle = 1,5 \cdot 10^8 T_9^{-2/3} \{ 1 + 2,13 [1 - \\ - \exp(-0,728 T_9^{2/3})] \}^{-1} \exp \left(-\frac{16,692}{T_9^{1/3}} \right) (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \quad (14.28)$$

$$\epsilon_{^{16}\text{Op}} = 3,624 \cdot 10^{16} x_{^{16}\text{O}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle ^{16}\text{Op} \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1});$$

$$^{17}\text{O}(\text{p}, \alpha)^{14}\text{N}, \quad Q_6 = 1,193,$$

$$N_A \langle ^{17}\text{Op} \rangle_\alpha = \left\{ 1,53 \cdot 10^7 T_9^{-2/3} \exp \left[-\frac{16,712}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{0,565} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times (1 + 0,025 T_9^{1/3} + 5,39 T_9^{2/3} + 0,940 T_9 + 13,5 T_9^{4/3} + \\ \left. + 5,98 T_9^{5/3}) + 2,92 \cdot 10^6 T_9 \exp \left(-\frac{4,247}{T_9} \right) \right\} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}, \quad (14.29)$$

$$\epsilon_{^{17}\text{Op}_\alpha} = 6,771 \cdot 10^{16} x_{^{17}\text{O}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle ^{17}\text{Op} \rangle_\alpha \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1});$$

$$^{17}\text{O}(\text{p}, \gamma)^{18}\text{F}, \quad Q_6 = 5,609,$$

$$N_A \langle ^{17}\text{Op} \rangle_\gamma = \left\{ 7,97 \cdot 10^7 T_{9A}^{5/6} T_9^{-3/2} \exp \left(-\frac{16,712}{T_{9A}^{1/3}} \right) + \right. \\ \left. + 1,51 \cdot 10^8 T_9^{-2/3} \exp \left(-\frac{16,712}{T_9^{1/3}} \right) \times (1 + 0,025 T_9^{1/3} - \right.$$

$$-0,051 T_9^{2/3} - 8,82 \cdot 10^{-3} T_9) + 1,56 \cdot 10^5 T_9^{-1} \times \\ \times \exp\left(-\frac{6,272}{T_9}\right)\} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \quad (14.30)$$

$$T_{9A} = T_9 (1 + 2,69 T_9)^{-1},$$

$$\epsilon_{17\text{O p}_\gamma} = 3,184 \cdot 10^{17} x_{17\text{O}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^{17}\text{O p} \rangle_\gamma \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1});$$

$${}^{18}\text{O}(\text{p}, \alpha){}^{15}\text{N}, \quad Q_6 = 3,980, \quad *$$

$$N_A \langle {}^{18}\text{O p} \rangle_\alpha = \left\{ 2,13 \cdot 10^{11} T_9^{-2/3} \exp\left[-\frac{16,729}{T_9^{1/3}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{T_9}{1,318}\right)^2 \right] \times (1 + 0,025 T_9^{1/3} + 1,68 T_9^{2/3} + 0,292 T_9 + 1,86 T_9^{4/3} + \right. \\ \left. + 0,824 T_9^{5/3}) + 9,64 \cdot 10^8 T_9^{-1} \exp\left(-\frac{7,361}{T_9}\right) + \right. \\ \left. + 1,99 \cdot 10^{13} T_9^{-2/3} \exp\left[-\frac{16,729}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{0,138}\right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times (1 + 0,025 T_9^{1/3} + 5,98 T_9^{2/3} + 1,04 T_9 + 30,7 T_9^{4/3} + 13,61 T_9^{5/3}) + \right. \\ \left. + 1,4 \cdot 10^6 T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{1,662}{T_9}\right) + 2,34 \cdot 10^6 T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{2,915}{T_9}\right) \right\} \times \\ \times [1 + 5 \exp(-23,002/T_9)]^{-1} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \quad (14.31) \\ \epsilon_{18\text{O p}_\alpha} = 2,133 \cdot 10^{17} x_{18\text{O}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^{18}\text{O p} \rangle_\alpha \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Приведенные выше формулы для (p, γ) и (p, α) реакций справедливы при $10^{-3} < T_9 < 10$ и при плотностях, при которых пренебрежимо мало электронное экранирование (см. § 17). Неопределенные члены в реакциях (14.29)–(14.31), которые в [361] даны с множителем (от 0 до 1), везде опущены. Величины $N_A \langle 01 \rangle$ для реакций (p, γ) и (p, α) из (14.21) – (14.23), а также (α, γ) запишем в виде

$$N_A \langle 01 \rangle = T_9^{-2/3} \exp\left[A - \left(\frac{TAU}{T_9^{1/3}}\right) \times \right. \\ \left. \times (1 + BT_9 + CT_9^2 + DT_9^3) \right] \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}). \quad (14.32)$$

Параметры (p, γ) , (p, α) реакций для формулы (14.32), Q_0 — энергия на реакцию в МэВ, $T_{обл}$ — пределы применимости

Реакция	T_{AU}	A	B	C	D	Q_0	$T_{обл}$
$^{20}\text{Ne}(p, \gamma)^{21}\text{Na}$	19,45 18,57	30,94 28,01	8,097(-2) 2,428(-1)	6,555(-1) -2,336(-2)	-4,272(-1) 1,026(-3)	2,431 2,431	$0 < T_9 < 1$ $1 < T_9 < 10$
$^{21}\text{Ne}(p, \gamma)^{22}\text{Na}$	19,46	31,61	2,391(-1)	-1,850(-2)	6,622(-4)	6,740	$0 < T_9 < 10$
$^{22}\text{Ne}(p, \gamma)^{23}\text{Na}$	19,48	31,41	1,802(-1)	-1,303(-2)	4,839(-4)	8,793	$0 < T_9 < 10$
$^{23}\text{Na}(p, \alpha)^{20}\text{Ne}$	20,77	30,63	1,585(-2)	1,235(-3)	-1,294(-4)	2,376	$0 < T_9 < 10$
$^{23}\text{Na}(p, \gamma)^{24}\text{Mg}$	20,77 22,02	29,97 34,04	-6,586(-2) 2,417(-1)	2,804(-1) -2,162(-2)	-1,131(-1) 9,298(-4)	11,692 11,692	$0 < T_9 < 1$ $1 < T_9 < 10$
$^{24}\text{Mg}(p, \gamma)^{25}\text{Al}$	22,02 21,93	31,54 32,58	-3,333(-2) 3,017(-1)	6,356(-1) -3,410(-2)	-3,758(-1) 1,671(-3)	2,270 2,270	$0 < T_9 < 1$ $1 < T_9 < 10$
$^{25}\text{Mg}(p, \gamma)^{26}\text{Al}$	22,04 23,28	31,32 35,59	-8,358(-2) 2,598(-1)	3,614(-1) -2,450(-2)	-1,620(-1) 1,097(-3)	6,307 6,307	$0 < T_9 < 1$ $1 < T_9 < 10$
$^{26}\text{Al}(p, \gamma)^{27}\text{Si}$	23,26 24,17	31,81 35,29	-7,207(-2) 2,528(-1)	4,040(-1) -2,510(-2)	-1,990(-1) 1,161(-3)	7,465 7,465	$0 < T_9 < 1$ $1 < T_9 < 10$
$^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$	23,27 25,02	28,41 34,08	-2,716(-1) 1,158(-1)	3,533(-1) -1,657(-2)	-1,410(-1) 8,537(-4)	1,600 1,600	$0 < T_9 < 1$ $1 < T_9 < 10$

Численные коэффициенты из [638] приведены в табл. 14. Параметры ($e^+ \nu$) распадов: времена полураспадов из [232], полные энергии распадов Q_{tot} и средние энерговыделения на реакцию за вычетом энергии нейтрино в МэВ [135, 182] — даны в табл. 15.

Ввиду большого времени бета-распада ^{22}Na из (14.21), при высокой температуре быстрее может идти другое звено NeNa-цикла [215]

$$^{20}\text{Ne}(p, \gamma)^{21}\text{Na}(e^+ \nu)^{21}\text{Ne}(p, \gamma)^{22}\text{Na}(p, \gamma)^{23}\text{Mg}(e^+ \nu)^{23}\text{Na}(p, \alpha)^{20}\text{Ne}. \quad (14.33)$$

Скорость реакции $^{22}\text{Na}(p, \gamma)^{23}\text{Mg}$ рассчитана в [624]. Имеем

$$N_A \langle ^{22}\text{Na} p \rangle_\gamma = 6,55 T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{2,437}{T_9}\right) (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}),$$

$$Q_6 = 7,579, \quad 0 \leq T_9 \leq 1, \quad (14.34)$$

$$\epsilon_{^{22}\text{Na} p} = 3,324 \cdot 10^{17} x_{^{22}\text{Na}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle ^{22}\text{Na} p \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Изменение концентрации при наличии бета-распада равно

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}. \quad (14.35)$$

Это уравнение, наряду с (13.6), нужно использовать для нахождения концентраций при протекании реакций. Если данный элемент появляется или исчезает в нескольких реакциях, то в правых частях (13.6) или (14.35) стоят

Т а б л и ц а 15

Характеристики бета-распадных реакций в циклах горения водорода

Реакция	$\tau_{1/2}$	Q_{tot} (МэВ)	Q_6 (МэВ)
$^{13}\text{N}(e^+ \nu)^{13}\text{C}$	10 мин	2,22	1,51
$^{14}\text{O}(e^+ \nu)^{14}\text{N}$	72 с	5,145	
$^{15}\text{O}(e^+ \nu)^{15}\text{N}$	124 с	2,76	1,76
$^{17}\text{F}(e^+ \nu)^{17}\text{O}$	70 с	2,76	1,82
$^{18}\text{F}(e^+ \nu)^{18}\text{O}$	110 мин	1,655	
$^{20}\text{Ne}(e^+ \nu)^{20}\text{Ne}$	0,38 с	13,89	
$^{21}\text{Na}(e^+ \nu)^{21}\text{Ne}$	23 с	3,55	
$^{22}\text{Na}(e^+ \nu)^{22}\text{Ne}$	2,6 года	2,84	
$^{25}\text{Al}(e^+ \nu)^{25}\text{Mg}$	73 с	4,28	
$^{27}\text{Si}(e^+ \nu)^{27}\text{Al}$	4,1 с	4,81	
$^{23}\text{Mg}(e^+ \nu)^{23}\text{Na}$	12 с	4,06	

суммы по соответствующим реакциям. Скорость выделения тепла при β^+ распаде ядер с атомным весом A_0 и весовой концентрацией x_0 равна

$$\epsilon_{\beta^+} = N_A \frac{x_0}{A_0} Q \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = 6,6880 \cdot 10^{17} \frac{x_0}{A_0} \frac{Q_6}{\tau_{1/2}} \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (14.36)$$

В бета-распадах величина $\ln 2/\tau_{1/2}$ является аналогом $(x_1/A_1)\rho N_A \langle 01 \rangle$ в ядерной реакции $\langle 01 \rangle$, см. (13.6) и (13.16).

Отметим, что наличие изотопов ^{13}C , ^{17}O , ^{21}Ne , ^{25}Mg в рассмотренных выше цепочках реакций, приводит к рождению нейтронов в (α, n) реакциях [361], что существенно для производства тяжелых элементов в s -процессах (см. § 16). При рассмотрении взрывного горения водорода необходимо учитывать много других (p, γ) и обратных к ним реакций, помимо рассмотренных выше, которые исследовались в работах [361, 389, 399, 638, 624].

в) **Горение гелия.** Наиболее важной для физики звезд реакцией горения гелия является 3α реакция образования ^{12}C . Она протекает благодаря тому, что при соединении двух альфа-частиц образуются неустойчивые ядра ^8Be . В равновесии концентрация ядер ^8Be определяется формулой, аналогичной (3.3):

$$n_{^8\text{Be}} = n_{\text{He}}^2 \frac{A_{\text{Be}}^{3/2}}{A_{\text{He}}^3} \frac{h^3}{(2\pi m_u kT)^{3/2}} e^{-\frac{Q}{kT}}, \quad (14.37)$$

$$Q = 92 \text{ кэВ}.$$

Реакция образования ^8Be является резонансной с $E_r = Q$. Соединение ядер ^8Be с альфа-частицами происходит также в виде резонансной реакции со скоростью, определяемой (13.4), (13.36). Для величины $N_A^2 \langle 012 \rangle$, характеризующей реакцию слияния трех частиц 0, 1, 2, получаем [389]

$$N_A^2 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle = \left\{ 2,79 \cdot 10^{-8} T_9^{-3} \exp\left(-\frac{4,4027}{T_9}\right) + (0 \div 1) \times 1,35 \cdot 10^{-7} T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{24,811}{T_9}\right) \right\} (\text{см}^6 \cdot \text{г}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}), \quad (14.38)$$

$$Q_6 = 7,275.$$

Количество реакций, протекающих в 1 с в 1 см³, P_{012} , среднее время жизни ядер гелия $\tau_{3\alpha}(^4\text{He})$ и энерговыделение $\epsilon_{\alpha\alpha\alpha}$ в 3α -реакции равны [360]

$$\begin{aligned} P_{012} &= \frac{n_0 n_1 n_2}{1 + \Delta_{012}} \langle 012 \rangle = \rho^3 N_A^3 \frac{x_0 x_1 x_2}{A_0 A_1 A_2} \frac{\langle 012 \rangle}{1 + \Delta_{012}} = \\ &= \frac{1}{384} \rho^3 N_A^3 x_{\text{He}}^3 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle \quad (\text{реакций} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}), \end{aligned} \quad (14.39)$$

$$\Delta_{012} = \delta_{01} + \delta_{12} + \delta_{02} + 2\delta_{012};$$

$$\frac{1}{\tau_{3\alpha}(^4\text{He})} = - \frac{1}{n_{^4\text{He}}} \frac{dn_{^4\text{He}}}{dt} = \frac{3P_{3\alpha}}{n_{^4\text{He}}} = \frac{1}{2} n_{^4\text{He}}^2 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle,$$

$$\epsilon_{\alpha\alpha\alpha} = 9,6487 \cdot 10^{17} \frac{x_0 x_1 x_2}{A_0 A_1 A_2} \frac{\rho^2 N_A^2}{1 + \Delta_{012}} Q_6 \langle 012 \rangle =$$

$$= \frac{9,6487 \cdot 10^{17}}{384} x_{^4\text{He}}^3 \rho^2 N_A^2 Q_6 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle =$$

$$= 1,828 \cdot 10^{16} x_{^4\text{He}}^3 \rho^2 N_A^2 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}).$$

При $T \leq 2,8 \cdot 10^7$ К нерезонансный канал реакции $^8\text{Be}(\alpha, \gamma)^{12}\text{C}$ становится важнее резонансного. Учет нерезонансной реакции сделан в [510]. Приближенно, с точностью $\sim 20\%$ ее учет сводится к умножению (14.38) и (14.39) на функцию

$$f_{\text{He}}(T) = \left\{ 0,01 + 0,2 \frac{1 + 4 \exp[-(0,025/T_9)^{3,263}]}{1 + 4 \exp[-(T_9/0,025)^{9,227}]} \right\}^{-1}. \quad (14.40)$$

Скорость реакции $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ сравнима со скоростью 3α -реакции так, что при горении гелия образуется ^{12}C и ^{16}O . Их относительное производство зависит от условий, при которых идет реакция, и меняется с массой звезды. При увеличении массы производство ^{16}O растет и может стать больше ^{12}C (см. гл. 9). Имеем для реакции $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ [361]

$$\begin{aligned} N_A \langle ^{12}\text{C}\alpha \rangle = & \left\{ 9,03 \cdot 10^7 T_9^{-2} \frac{(1 + 0,621 T_9^{2/3})^2}{(1 + 0,047 T_9^{2/3})^2} \times \right. \\ & \times \exp\left[-\frac{32,120}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{5,863}\right)^2\right] + 2,74 \cdot 10^7 T_9^{-2/3} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{32,120}{T_9^{1/3}}\right) + 1,25 \cdot 10^3 T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{27,499}{T_9}\right) + \\ & \left. + 1,43 \cdot 10^{-2} T_9^5 \exp\left(-\frac{15,541}{T_9}\right) \right\} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \end{aligned} \quad (14.41)$$

$$Q_6 = 7,162,$$

$$\epsilon_{^{12}\text{C}\alpha} = 1,44 \cdot 10^{17} x_{^{12}\text{C}} x_{^4\text{He}} \rho N_A \langle ^{12}\text{C}\alpha \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Формулы (14.38)–(14.41) справедливы при $10^{-3} < T_9 < 10$ в отсутствие электронного экранирования. На стадиях эволюции, предшествующих

Параметры (α, γ) реакций для формулы (14.32); Q_α — энергия на реакцию в МэВ, $T_{\text{обл}}$ — пределы применимости

Реакция	TAU	A	B	C	D	$T_{\text{обл}}$
$^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$	39,76 42,63	41,17 49,51	-8,856 (-3) 2,217 (-1)	7,048 (-2) -1,750 (-2)	2,521 (-2) 6,622 (-4)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{20}\text{Ne}(\alpha, \gamma)^{24}\text{Mg}$	46,77 48,75	44,38 49,62	2,482 (-2) 1,087 (-1)	-2,855 (-2) -2,975 (-3)	3,987 (-2) -2,077 (-5)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{24}\text{Mg}(\alpha, \gamma)^{28}\text{Si}$	53,32 54,77	47,06 50,89	1,344 (-2) 6,885 (-2)	1,954 (-3) 3,133 (-3)	7,228 (-3) -3,459 (-4)	$1 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{28}\text{Si}(\alpha, \gamma)^{32}\text{S}$	59,49 61,02	49,60 53,60	1,270 (-2) 6,340 (-2)	4,133 (-3) 2,541 (-3)	2,791 (-3) -2,900 (-4)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{32}\text{S}(\alpha, \gamma)^{36}\text{Ar}$	65,37 66,69	52,09 55,41	1,821 (-2) 4,913 (-2)	-6,033 (-3) 4,637 (-3)	5,584 (-3) -4,067 (-4)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{36}\text{Ar}(\alpha, \gamma)^{40}\text{Ca}$	71,01 78,27	54,48 70,11	2,676 (-2) 1,458 (-1)	-3,300 (-2) -1,069 (-2)	3,361 (-2) 3,790 (-4)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{40}\text{Ca}(\alpha, \gamma)^{44}\text{Ti}$	76,44	56,80	1,650 (-2)	5,973 (-3)	-3,889 (-4)	$0 < T_\alpha < 10$
$^{44}\text{Ti}(\alpha, \gamma)^{48}\text{Cr}$	81,66 81,23	56,98 60,18	-8,364 (-2) 1,066 (-1)	2,085 (-1) -1,102 (-2)	-7,477 (-2) 5,324 (-4)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{48}\text{Cr}(\alpha, \gamma)^{52}\text{Fe}$	86,74 81,42	62,93 53,00	1,212 (-1) 6,325 (-2)	-1,340 (-2) -5,671 (-3)	-5,335 (-4) 2,848 (-4)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$
$^{52}\text{Fe}(\alpha, \gamma)^{56}\text{Ni}$	91,67	62,22	7,846 (-2)	-7,430 (-3)	3,723 (-4)	$0 < T_\alpha < 10$
$^{56}\text{Ni}(\alpha, \gamma)^{60}\text{Zn}$	96,48 104,92	64,42 79,65	1,549 (-2) 8,188 (-2)	-4,664 (-3) -2,885 (-3)	4,888 (-3) 5,206 (-5)	$0 < T_\alpha < 1$ $1 < T_\alpha < 10$

взрыву сверхновой [363], а также при взрывном горении гелия важны другие реакции (α , γ) захвата. Если величины $N_A \langle 01 \rangle$ записать в виде (14.32), то коэффициенты для некоторых реакций из [638] приведены в табл. 16. В [399, 638] приведены параметры различных (α , γ), (α , n) и (α , p), а также обратных к ним реакций, участвующих во взрывном горении гелия.

§ 15. Реакции с тяжелыми ядрами при высоких температурах

На поздних стадиях эволюции массивных звезд, а также при взрывах ведущих к вспышке сверхновой, в центральных областях звезды происходят реакции непосредственного слияния тяжелых ядер. Энерговыведение в реакциях горения ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne , ^{24}Mg и ^{28}Si сравнимо с энерговыведением в 3α реакции, однако мощное нейтринное излучение из-за высокой температуры делает время жизни звезды на стадии горения ^{12}C или ^{16}O много меньшим, чем на стадии горения ^4He . В связи с малым временем жизни вероятность обнаружения таких звезд также мала. В настоящее время нельзя с уверенностью указать на звезду в спокойном состоянии, излучающую энергию за счет горения ^{12}C или других тяжелых элементов.

В тех случаях, когда пренебрежимо экранирование кулоновского поля ядер, скорости реакций рассчитываются на основе учета резонансных и нерезонансных вкладов, согласно изложению § 13. В [361] приведены соотношения для следующих реакций:

$$^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, \gamma)^{24}\text{Mg}, \quad Q_6 = 13,931,$$

$$N_A \langle ^{12}\text{C}^{12}\text{C} \rangle = \left\{ 1,26 \cdot 10^{27} T_{9A}^{5/6} T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{84,165}{T_{9A}^{1/3}}\right) \times \right. \\ \left. \times [\exp(-0,010 T_{9A}^4) + 5,56 \cdot 10^{-3} \exp(1,685 T_{9A}^{2/3})]^{-1} \right\} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}). \quad (15.1)$$

$$T_{9A} = T_9 (1 + 0,067 T_9)^{-1}.$$

Скорость энерговыведения есть

$$\epsilon_{^{12}\text{C}^{12}\text{C}} = 4,67 \cdot 10^{16} x_{^{12}\text{C}}^2 \rho N_A \langle ^{12}\text{C}^{12}\text{C} \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (15.2)$$

Реакция

$$^{12}\text{C}(^{16}\text{O}, \gamma)^{28}\text{Si}, \quad Q_6 = 16,754,$$

$$N_A \langle ^{12}\text{C}^{16}\text{O} \rangle = 1,72 \cdot 10^{31} T_{9A}^{5/6} T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{106,594}{T_{9A}^{1/3}}\right) \times \\ \times [\exp(-0,180 T_{9A}^2) + 1,06 \cdot 10^{-3} \exp(2,562 T_{9A}^{2/3})]^{-1} \quad (\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}), \\ T_{9A} = T_9 (1 + 0,055 T_9)^{-1} \quad (15.3)$$

даст энерговыведение

$$\epsilon_{^{12}\text{C}^{16}\text{O}} = 8,42 \cdot 10^6 x_{^{12}\text{C}} x_{^{16}\text{O}} \rho N_A \langle ^{12}\text{C}^{16}\text{O} \rangle \quad (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (15.4)$$

Реакция

$$^{16}\text{O}(^{16}\text{O}, \gamma)^{32}\text{S}, Q_6 = 16,541,$$

$$N_A \langle ^{16}\text{O}^{16}\text{O} \rangle = 3,61 \cdot 10^{37} T_{9A}^{5/6} T_9^{-3/2} \exp\left(-\frac{135,930}{T_{9A}^{1/3}}\right) \times \\ \times [\exp(-0,032 T_{9A}^4) + 3,89 \cdot 10^{-4} \exp(2,659 T_{9A}^{2/3})]^{-1} (\text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}), \\ T_{9A} = T_9(1 + 0,067 T_9)^{-1} \quad (15.5)$$

имеет скорость энергосвечения

$$\epsilon_{^{16}\text{O}, ^{16}\text{O}} = 3,12 \cdot 10^{16} x_{^{16}\text{O}}^2 \rho N_A \langle ^{16}\text{O}^{16}\text{O} \rangle (\text{эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (15.6)$$

В реакциях непосредственного слияния ядер ^{24}Mg и более тяжелых для преодоления кулоновского барьера требуется столь большая температура $T_9 \geq 3 \cdot 10^9$ К, что прежде этого начинается фотоотщепление легких частиц p , n и α от ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne и захват их другими ядрами. Таким образом, производство элементов тяжелее ^{32}S происходит путем (p, γ) , (n, γ) , (α, γ) захватов. Эта быстрая (~ 3000 с) стадия эволюции называется стадией альфа-процессов или кремниевого горения [363, 302], так как ^{28}Si наиболее обильно образуется при горении ^{12}C и ^{16}O в ядрах звезд. Скорости некоторых (p, γ) и (α, γ) реакций приведены в § 14 и табл. 14, 16.

Скорости фотоотщепления, обратные к реакциям слияния, находятся по формуле (13.10), соответствующее энергопоглощение дано в (13.17). Характеристики обратных реакций с участием четырех ядер даны в (13.9). Скорость реакции фоторасщепления ^{12}C с учетом [389] и (14.38) есть

$$\frac{1}{\tau_\gamma(^{12}\text{C})} = \lambda_\gamma(^{12}\text{C}) = 2,00 \cdot 10^{20} T_9^3 \exp(-84,424/T_9) N_A^2 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle. \quad (15.7)$$

Если результатом взаимодействия двух частиц 0 и 1 являются три частицы 2, 3 и 4 с выделением тепла Q , то соотношения между прямыми и обратными реакциями имеют вид

$$\frac{\langle 234 \rangle}{\langle 01 \rangle} = \frac{g_0 g_1}{g_2 g_3 g_4} \left(\frac{A_0 A_1}{A_2 A_3 A_4} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_u kT} \right)^{3/2} \left(\frac{1 + \Delta_{234}}{1 + \delta_{01}} \right) \exp(-Q/kT), \quad (15.8)$$

а в равновесии

$$\frac{n_2 n_3 n_4}{n_0 n_1} = \rho N_A \frac{x_2 x_3 x_4}{A_2 A_3 A_4} \frac{A_0 A_1}{x_0 x_1} = \frac{g_2 g_3 g_4}{g_0 g_1} \left(\frac{A_2 A_3 A_4}{A_0 A_1} \right)^{3/2} \times \\ \times \left(\frac{m_u kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp(Q/kT) \quad (15.9)$$

или

$$\frac{x_2 x_3 x_4}{x_0 x_1} = 0,98677 \cdot 10^{10} \frac{T_9^{3/2}}{\rho} \left(\frac{g_2 g_3 g_4}{g_0 g_1} \right) \left(\frac{A_2 A_3 A_4}{A_0 A_1} \right)^{5/2} \times \\ \times \exp\left(\frac{11,605 Q_6}{T_9}\right). \quad (15.10)$$

При рассмотрении свойств прямых и обратных реакций следует иметь в виду, что как результирующее, так и начальное ядро могут быть возбужденными и это увеличивает число его возможных состояний. При температуре T населенность i -го возбужденного состояния есть

$$P_i = \frac{g_i}{G} \exp(-E_i/kT),$$

$$G = \sum_i g_i \exp(-E_i/kT) \quad (15.11)$$

и $g_i = 2J_i + 1$ — статистический вес возбужденного состояния со спином J_i , E_i — энергия возбуждения относительно основного состояния. $G(T)$ есть эффективный статистический вес ядра с учетом возбужденных состояний или сумма по состояниям. Роль возбужденных состояний определяется нормализованной суммой по состояниям

$$\mathcal{G} = G/g_0 = 1/P_0, \quad (15.12)$$

являющейся величиной, обратной к относительной концентрации ядер в основном состоянии P_0 . Учет возбужденных состояний сводится к замене статистических весов g_i на соответствующие суммы по состояниям G_i . Отличия G_i от g_i или $\mathcal{G}$ от единицы появляются при высокой температуре ($T_9 \geq 2$ для ^{56}Fe [362]).

С ростом температуры значение G из (15.11) формально расходится, однако корректный учет состояний непрерывного спектра, дающих отрицательный вклад, и ограничения, связанные с развалом ядер, приводит к тому, что G проходит через максимум и стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Для ^{56}Fe максимальное значение $G_{\max} \approx 33340$ и достигается при $T_9 \approx 700$ [362]. Таблица сумм по состояниям для ядер с $8 \leq Z < 86$ и $0 < T_9 \leq 10$ имеется в [638].

§ 16. Процессы образования тяжелых элементов

К моменту начала образования звезд вещество расширяющейся вселенной состояло из водорода и гелия с небольшими примесями дейтерия $x_{2D} \leq 10^{-4}$, гелия-3 $x_{3\text{He}} \leq 3 \cdot 10^{-5}$, лития $x_{7\text{Li}} \approx 10^{-9}$ и ничтожными примесями более тяжелых элементов [567]. Элементы, начиная с лития, практически не образуются из-за того, что отсутствуют стабильные элементы с $A = 5$ и 8 . Образование элементов с $A > 5$ и $A > 8$ возможно только в реакциях с заряженными частицами с $Z \geq 2$, которые не успевают пройти из-за кулоновского барьера.

Элементы, начиная с углерода и тяжелее, образуются в термоядерных реакциях в недрах звезд, при взрывах сверхновых и реакциях (p, γ) и, главным образом, (n, γ) захвата [215]. Возможно также образование очень тяжелых элементов при выбросах из нейтронных звезд [61]. Элементы ^6Li , ^9Be , ^{10}B и ^{11}B не образуются при термоядерном горении в звездах. Их наблюдаемые весовые концентрации в атмосферах звезд $\leq 10^{-8}$ объясняются реакциями откола при взаимодействии быстрых частиц космических лучей с тяжелыми элементами на поверхности звезд и в оболочках сверхновых [170].

При высоких температурах, достигающихся при взрывах сверхновых, в веществе устанавливается равновесие по ядерным реакциям с кинетикой по бета-процессам (см. § 3) и происходит образование элементов железного пика [363, 509]. Основным механизмом образования элементов, тяжелее железа являются захваты нейтронов [317].

а) Медленные захваты (*s*-процессы). При захвате нейтронов образуются ядра, неустойчивые относительно e^- -распада. Если концентрация нейтронов столь мала, что время между последовательными (n, γ) захватами больше, чем время бета-распада, то такие захваты называются *s*-процессами (slow). Рост ядер при *s*-процессе происходит вдоль долины стабильности (рис. 20) и продолжается вплоть до образования ^{209}Bi — последнего стабильного элемента в цепочке *s*-процесса. Захват нейтрона ядром ^{209}Bi приводит к образованию неустойчивого ядра ^{210}Bi , которое превращается в ^{206}Pb в реакциях $^{210}\text{Bi}(\gamma, \alpha)^{206}\text{Te}(e^- \nu)^{206}\text{Pb}$ или $^{210}\text{Bi}(e^- \nu)^{210}\text{Po}(\alpha)^{206}\text{Pb}$.

Получение в *s*-процессах количества тяжелых элементов, близкого к наблюдаемому, требует потока нейтронов $10^{15} - 10^{16} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, что соответствует их концентрации $n_n \approx 5 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$ при $v_n \approx 2 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, и длительности облучения $\geq 10^3$ лет [223]. Для производства нейтронов в звездах важными являются реакции (α, n) захвата на ядрах с массовым числом $A = 4j + 1$ и зарядом $Z = 2j$ [215]. Эти ядра содержат один слабо связанный нейтрон сверх группы сильно связанных j альфа-частиц. При взаимодействии с другой альфа-частицей нейтрон легко отрывается и образуется ядро из сильно связанных $(j + 1)$ альфа-частиц. Как отмечалось в § 14, п. б, мишенями для этих реакций

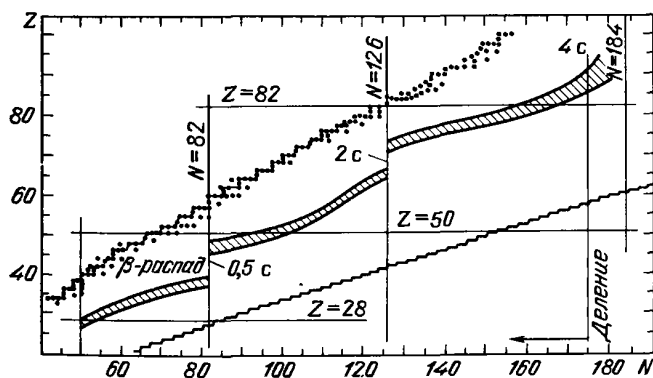


Рис. 20. Пути образования элементов на $N - Z$ -диаграмме. Верхняя линия показывает путь *s*-процесса вдоль долины бета-стабильности элементов. Ниже расположена заштрихованная полоса, соответствующая *r*-процессу. Указанные времена определяют длительность достижения соответствующих пиков концентраций. Цифры для *r*-процесса при параметрах $T_9 = 1,0$, $\lg n_n = 24$ и начальных ядрах железа $Z = 26$ взяты из расчетов работы [574]. Точками обозначены стабильные ядра, образующиеся при *r*-процессе. Нижняя ступенчатая линия определяет *p*-процесс. Она соответствует предельному *r*-процессу при большой концентрации нейтронов $\lg n_n > 30$, и ее расположение с ростом n_n не меняется. Ядра, образующиеся в *p*-процессе, попадают в долину стабильности в результате бета-распада и деления с испусканием нейтронов

Параметры (α , n) реакций для формулы (16.2), Q_6 — выделение энергии на реакцию в МэВ, $T_{\text{обл}}$ — пределы применимости

Реакция	TAU	A	B	
$^{17}\text{O}(\alpha, n)^{20}\text{Ne}$	39,92	41,42	1,673 (–2)	
$^{21}\text{Ne}(\alpha, n)^{24}\text{Mg}$	46,90	44,50	1,750 (–2)	
$^{23}\text{Mg}(\alpha, n)^{28}\text{Si}$	53,42	47,24	1,667 (–2)	

Реакция	C	D	Q_6	$T_{\text{обл}}$
$^{17}\text{O}(\alpha, n)^{20}\text{Ne}$	2,304 (–3)	–1,584 (–4)	0,588	$0 < T_9 < 10$
$^{21}\text{Ne}(\alpha, n)^{24}\text{Mg}$	1,189 (–3)	–7,053 (–5)	2,554	$0 < T_9 < 10$
$^{23}\text{Mg}(\alpha, n)^{28}\text{Si}$	1,302 (–3)	–7,781 (–5)	2,654	$0 < T_9 < 10$

служат ядра ^{13}C , ^{17}O , ^{21}Ne , ^{25}Mg , которые образуются в процессе высокотемпературного горения водорода, дополненного реакцией (14.20). Скорость реакции $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ вычислена в [623]:

$$N_A \langle ^{13}\text{C}\alpha \rangle = 6,77 \cdot 10^{15} (1 + 2,04 T_9^{2/3} + 0,184 T_9) T_9^{-2/3} \times \\ \times \exp \left[-\frac{32,33}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{0,987} \right)^2 \right] + T_9^{-3/2} [2,12 \cdot 10^6 \times \\ \times \exp(-9,43/T_9) + 1,92 \cdot 10^7 \exp(-11,54/T_9)], \quad (16.1) \\ Q_6 = 2,215.$$

Скорости других реакций производства нейтронов представимы в виде

$$N_A \langle \text{O}1 \rangle = T_9^{-2/3} \exp \left[A - \frac{\text{TAU}}{T_9^{1/3}} (1 + B T_9 + C T_9^2 + D T_9^3) \right] \quad (16.2)$$

с параметрами A , B , C , D и TAU в табл. 17 из [638]. Приведем также скорость эндотермической реакции $^{22}\text{Ne}(\alpha, n)^{25}\text{Mg}$, $Q_6 = -0,480$ из [332], рассмотренной в [333] для производства нейтронов

$$N_A \langle ^{22}\text{Ne}\alpha \rangle_n = \left\{ 7,417 \cdot 10^{20} T_9^{-2/3} \exp \left(-\frac{49,96}{T_9^{1/3}} - 1,352 T_9^2 \right) + \right. \\ \left. + 1,580 \cdot 10^7 \exp \left(-\frac{21,43}{T_9} \right) \right\} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (16.3)$$

Более детальное выражение для скорости этой реакции дано в [361]. Реакции (16.1)–(16.3) протекают при температурах $T > 3 \cdot 10^8$ К, которые достигаются при горении гелия в ядрах массивных звезд (см. гл. 9). Время бета-полураспада ядер, образующихся из стабильных после захвата нейтрона меняется от 14 с до $7 \cdot 10^6$ лет для ^{116}In и ^{107}Pd соответственно.

Сечение захвата тепловых нейтронов, участвующих в s -процессах. $\sigma_n \sim 1/v$ [212]. В табл. 18 дано $\sigma_{30} = \sigma_n$ (30 кэВ) для ядер, участвующих

Сечения захвата нейтронов с энергией $E = 30$ кэВ, σ_{30} (в мбарн = 10^{-27} см²) стабильными ядрами вдоль основного пути s -процесса и времени бета-полураспада $\tau_{1/2}$ образующихся там нестабильных ядер; $K = A - 55$

K	Z	Стабильный изотоп	σ_{30}	Нестабильный изотоп	$e^{\pm}$	$\tau_{1/2}$
1	26	⁵⁶ Fe	$13,5 \pm 2$			
2	26	⁵⁷ Fe	30 ± 5			
3	26	⁵⁸ Fe	$15,9 \pm 1,5$	⁵⁹ Fe	—	45 сут
4	27	⁵⁹ Co	72 ± 14	⁶⁰ Co	γ —	90 сут
5	28	⁶⁰ Ni	31 ± 6			
6	28	⁶¹ Ni	135 ± 27			
7	28	⁶² Ni	26 ± 5	⁶³ Ni	—	92 г
8	29	⁶³ Cu	49 ± 14	⁶⁴ Cu	—, +, K	13 ч
9	28	⁶⁴ Ni	23	⁶⁵ Ni	—	2,6 ч
9	30	⁶⁴ Zn	51,1	⁶⁵ Zn	+	243 г
10	29	⁶⁵ Cu	42 ± 7	⁶⁶ Cu	—	5,1 мин
11	30	⁶⁶ Zn	40			
12	30	⁶⁷ Zn	160			
13	30	⁶⁸ Zn	23 ± 3	⁶⁹ Zn	—	57 мин
14	31	⁶⁹ Ga	130 ± 30	⁷⁰ Ga	—	21 мин
15	32	⁷⁰ Ge	84	⁷¹ Ge	K	215 сут
16	31	⁷¹ Ga	120 ± 30	⁷² Ga	—	14 ч
17	32	⁷² Ge	53,2			
18	32	⁷³ Ge	330			
19	32	⁷⁴ Ge	17 ± 5	⁷⁵ Ge	—	82 мин
20	33	⁷⁵ As	490 ± 100	⁷⁶ As	—	26 ч
21	34	⁷⁶ Se	101			
22	34	⁷⁷ Se	424			
23	34	⁷⁸ Se	98 ± 14	⁷⁹ Se	γ —	35 г
24	35	⁷⁹ Br	600 ± 150	⁸⁰ Br	+, —, K	18 мин
25	34	⁸⁰ Se	20 ± 12	⁸¹ Se	—	19 мин
25	36	⁸⁰ Kr	163	⁸¹ Kr	K	$2 \cdot 10^5$ г
26	35	⁸¹ Br	460 ± 80	⁸² Br	—	35 ч
27	36	⁸² Kr	127			
28	36	⁸³ Kr	601			
29	36	⁸⁴ Kr	25	⁸⁵ Kr	—	11 г
30	37	⁸⁵ Rb	215 ± 20	⁸⁶ Rb	—	19 сут
31	38	⁸⁶ Sr	74 ± 7			
32	38	⁸⁷ Sr	109 ± 9			
33	38	⁸⁸ Sr	$6,9 \pm 2,5$	⁸⁹ Sr	—	52 сут
34	39	⁸⁹ Y	21 ± 4	⁹⁰ Y	—	64 ч
35	40	⁹⁰ Zr	12 ± 2			
36	40	⁹¹ Zr	68 ± 8			
37	40	⁹² Zr	34 ± 6	⁹³ Zr	—	$1,5 \cdot 10^6$ г
38	40	⁹³ Zr	81,3			
39	40	⁹⁴ Zr	20 ± 2	⁹⁵ Zr	—	65 сут
40	41			⁹⁵ Nb	—	32 сут
40	42	⁹⁵ Mo	430 ± 50			
41	42	⁹⁶ Mo	90 ± 10			
42	42	⁹⁷ Mo	350 ± 50			
43	42	⁹⁸ Mo	150 ± 40	⁹⁹ Mo	—	67 ч

Таблица 18 (продолжение)

K	Z	Стабильный изотоп	σ_{30}	Нестабильный изотоп	$\epsilon^{\pm}$	$\tau_{1/2}$
44	43			^{99}Tc	$\gamma -$	7г; $2,12 \cdot 10^5$ г
44	44	^{99}Ru	640			
45	44	^{100}Ru	209 ± 6			
46	44	^{101}Ru	1011 ± 30			
47	44	^{102}Ru	189 ± 6	^{103}Ru	—	40 сут
48	45	^{103}Rh	1072 ± 30	^{104}Rh	—	43 с
49	46	^{104}Pd	447 ± 22			
50	46	^{105}Pd	1189 ± 60			
51	46	^{106}Pd	382 ± 19	^{107}Pd	—	$7 \cdot 10^6$ г
52	46	^{107}Pd	950			
53	46	(^{108}Pd)	345 ± 17	^{109}Pd	—	13 ч
54	47	^{109}Ag	620 ± 50	^{110}Ag	—	25 с
55	48	^{110}Cd	250 ± 30			
56	48	^{111}Cd	624			
57	48	^{112}Cd	233 ± 30			
58	48	^{113}Cd	569			
59	48	^{114}Cd	158 ± 25	^{115}Cd	—	54 ч
60	49	^{115}In	700 ± 45	^{116}In	—	14 с
61	50	^{116}Sn	100 ± 15			
62	50	^{117}Sn	420 ± 30			
63	50	^{118}Sn	63 ± 5			
64	50	^{119}Sn	348 ± 54			
65	50	^{120}Sn	50 ± 15	^{121}Sn	—	27 ч
66	51	^{121}Sb	740 ± 100	^{122}Sb	—	2,8 сут
67	52	^{122}Te	270 ± 30			
68	52	^{123}Te	820 ± 30			
69	52	^{124}Te	150 ± 20			
70	52	^{125}Te	430 ± 20			
71	52	^{126}Te	82 ± 8	^{127}Te	—	9,4 ч
72	53	^{127}I	710 ± 35	^{128}I	—	25 мин
73	54	^{128}Xe	232			
74	54	^{129}Xe	665			
75	54	^{130}Xe	143			
76	54	^{131}Xe	587			
77	54	^{132}Xe	90,9	^{133}Xe	—	5,3 сут
78	55	^{133}Cs	700 ± 40	^{134}Cs	$\gamma -$	24 сут
79	56	^{134}Ba	225 ± 35			
80	56	^{135}Ba	472			
81	56	^{136}Ba	90 ± 20			
82	56	^{137}Ba	72,6			
83	56	^{138}Ba	$4,22 \pm 0,25$	^{139}Ba	—	82 мин
84	57	^{139}La	44 ± 4	^{140}La	—	40 ч
85	58	^{140}Ce	$11,5 \pm 0,6$	^{141}Ce	—	33 сут
86	59	^{141}Pr	111 ± 15	^{142}Pr	—	19 ч
87	60	^{142}Nd	67,7			
88	60	^{143}Nd	333			
89	60	^{144}Nd	67,4			
90	60	^{145}Nd	485			
91	60	^{146}Nd	105 ± 16	^{147}Nd	—	11 сут

Т а б л и ц а 18 (продолжение)

K	Z	Стабильный изотоп	σ_{30}	Нестабильный изотоп	$e^{\pm}$	$\tau_{1/2}$
92	61			^{147}Pm	—	2,6 г
92	62	^{147}Sm	1150 ± 90			
93	62	^{148}Sm	260 ± 50			
94	62	^{149}Sm	1620 ± 280			
95	62	^{150}Sm	370 ± 70	^{151}Sm	—	87 г
96	63	^{151}Eu	3600 ± 500	^{152}Eu	γ —	9,3 ч
97	64	^{152}Gd	982	^{153}Gd	K	242 сут
98	63	^{153}Eu	2700 ± 300	^{154}Eu	γ —	100 сут
99	64	^{154}Gd	1164 ± 350			
100	64	^{155}Gd	2711 ± 813			
101	64	^{156}Gd	557 ± 166			
102	64	^{157}Gd	1464 ± 440			
103	64	^{158}Gd	540 ± 70	^{159}Gd	—	18 ч
104	65	^{159}Tb	2949 ± 340	^{160}Tb	—	72 сут
105	66	^{160}Dy	1010			
106	66	^{161}Dy	2520 ± 270			
107	66	^{162}Dy	470 ± 50			
108	66	^{163}Dy	1600 ± 300			
109	66	^{164}Dy	180 ± 40	^{165}Dy	—	140 мин
110	67	^{165}Ho	1170 ± 55	^{166}Ho	—	27 ч
111	68	^{166}Er	519 ± 156			
112	68	^{167}Er	1439 ± 432			
113	68	^{168}Er	243 ± 73	^{169}Er	—	9,4 сут
114	69	^{169}Tm	2085 ± 290	^{170}Tm	—	130 сут
115	70	^{170}Yb	790 ± 60			
116	70	^{171}Yb	1413 ± 424			
117	70	^{172}Yb	414 ± 124			
118	70	^{173}Yb	869 ± 261			
119	70	^{174}Yb	175 ± 52	^{175}Yb	—	101 ч
120	71	^{175}Lu	1460 ± 110	^{176}Lu	γ —	7 г
121	72	^{176}Hf	640 ± 160			
122	72	^{177}Hf	1950			
123	72	^{178}Hf	217 ± 27			
124	72	^{179}Hf	215 ± 25			
125	72	^{180}Hf	290 ± 80	^{181}Hf	—	43 сут
126	73	^{181}Ta	865 ± 86	^{182}Ta	—	115 сут
127	74	^{182}W	260 ± 30			
128	74	^{183}W	550 ± 50			
129	74	^{184}W	180 ± 20	^{185}W	—	75 сут
130	75	^{185}Re	1530 ± 200	^{186}Re	—	90 ч
131	76	^{186}Os	467 ± 12			
132	76	^{187}Os	927 ± 19			
133	76	^{188}Os	413 ± 15			
134	76	^{189}Os	858			
135	76	^{190}Os	418 ± 63	^{191}Os	—	15 сут
136	77	^{191}Ir	1900 ± 300	^{192}Ir	—	74 сут
137	78	^{192}Pt	352	^{193}Pt	K	10^5 г
138	78	^{193}Pt	1320			
139	78	^{194}Pt	386			

Таблица 18 (окончание)

K	Z	Стабильный изотоп	σ_{30}	Нестабильный изотоп	$e^{\pm}$	$\tau_{1/2}$
140	78	^{195}Pt	1040			
141	78	^{196}Pt	160 ± 40	^{197}Pt	—	18 ч
142	79	^{197}Au	610 ± 15	^{198}Au	—	2,7 сут
143	80	^{198}Hg	411			
144	80	^{199}Hg	362			
145	80	^{200}Hg	69,5			
146	80	^{201}Hg	130			
147	80	^{202}Hg	50 ± 15	^{203}Hg	—	47 сут
148	81	^{203}Tl	150 ± 30	^{204}Tl	—	3,8 г
149	82	^{204}Pb	60 ± 16	^{205}Pb	K	$3 \cdot 10^7$ г
150	82	^{205}Pb	57,7			
151	82	^{206}Pb	14 ± 1			
152	82	^{207}Pb	$11,3 \pm 0,7$			
153	82	^{208}Pb	$0,75 \pm 0,09$	^{209}Pb	—	3,3 ч
154	83	^{209}Bi	$12,1 \pm 4$	^{210}Bi	—, α	5 сут

"—", "+", "e[±]" — распады, K — K-захват, γ указывает на распады из возбужденных состояний ядра; α — альфа-распад. Скобками в 3-м столбце отмечены ядра с большим $\tau_{1/2}$.

в s-процессах, из [506, 201a]. Сечения выбирались на основе наилучшего согласия точного решения системы уравнений для s-процесса с наблюдаемым обилием элементов в солнечной системе. Аргументом в теории s-процессов является нейтронная экспозиция

$$\tau = \int n_n v dt \quad (\text{см}^{-2}), \quad (16.4)$$

а искомыми функциями — значения

$$\psi_A(\tau) \equiv \sigma_A n_A(\tau) / n_1(0), \quad (16.5)$$

где $n_A(\tau)$ — концентрация ядер, образующихся в s-процессе при наличии одного типа ядер с концентрацией $n_1(0)$ в начальный момент. Для произвольных, но малых энергий нейтронов

$$\sigma(E) = \sigma_{30} \sqrt{\frac{30}{Q_n, \text{кэВ}}}, \quad (16.6)$$

где $Q_n, \text{кэВ}$ энергия нейтронов в кэВ. В [399, 638] приводятся более сложные формулы типа (13.46) для сечений (n, γ) реакций, учитывающие отклонения от асимптотического закона (16.6). В табл. 18 даны также времена полураспада $\tau_{1/2}$ радиоактивных ядер из [232], образующихся после захвата одного нейтрона стабильным ядром. При длительной экспозиции для промежуточных ядер, образующихся в s-процессе устанавливается состояние, близкое к стационарному, когда число образующихся ядер с атомным весом A равно числу ядер, превращающихся в элемент с атомным весом $A + 1$:

$$\dot{n}_A = \langle \sigma_{A-1} v \rangle n_{A-1} - \langle \sigma_A v \rangle n_A. \quad (16.7)$$

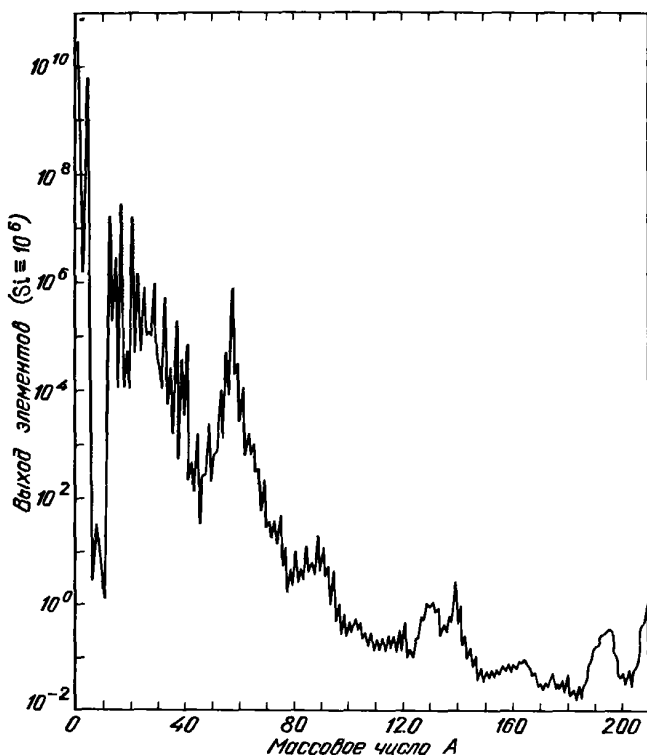


Рис. 21. Обобщенная кривая распространенности элементов в Солнечной системе

При $\dot{n}_A = 0$, $\langle \sigma v \rangle \approx \sigma_T v_T$ получаем

$$\frac{n_A}{n_{A-1}} = \frac{\sigma_{T, A-1}}{\sigma_{T, A}}, \quad (16.8)$$

т.е. должно происходить накопление ядер, которые плохо поглощают нейтроны. Как видно из табл. 18, малым сечением захвата обладают ядра ^{56}Fe , ^{58}Fe , ^{88}Sr , ^{90}Zr , ^{138}Ba , ^{140}Ge , ^{206}Pb , ^{207}Pb , которым соответствуют максимумы на наблюдательной кривой распространенности элементов (рис. 21). Выполнение условия (16.8) видно из близости к единице отношений $(n\sigma)$ для стабильных изотопов олова и самария ^{148}Sm , ^{150}Sm , ^{116}Sn , ^{118}Sn , ^{120}Sn [223]:

$$\begin{aligned} \frac{n_{148}\sigma_{148}}{n_{150}\sigma_{150}} &= 0,98 \pm 0,06, \\ \frac{n_{116}\sigma_{116}}{n_{118}\sigma_{118}} &= 0,8 \pm 0,2, \\ \frac{n_{120}\sigma_{120}}{n_{118}\sigma_{118}} &= 0,9 \pm 0,3. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Важным доказательством участия s -процессов в нуклеосинтезе является обнаружение в спектрах звезд линии технеция, элемента, не имеющего стабильных изотопов. Самый большой период полураспада имеет ^{99}Tc ($\tau_{1/2} = 2,12 \cdot 10^5$ лет). Это меньше времени существования звезды и в то же время достаточно, чтобы сохраниться в цепочке s -процесса. Технеций образуется в реакции $^{98}\text{Mo}(n, \gamma)^{99}\text{Mo}(e^- \bar{\nu})^{99}\text{Tc}$. Нестабильное, но достаточно долго живущее ядро в цепочке s -процесса может захватить нейтрон до своего бета-распада, давая разветвления s -процесса. Захват нейтрона ядром ^{99}Tc дает начало одной из побочных цепочек.

б) Быстрые процессы захвата (r -процессы); rbc - и n -процессы. Элементы с $A > 209$, а также устойчивые ядра, отдаленные от долины бета-стабильности неустойчивыми изотопами не могут образоваться в s -процессе (см. рис. 20). Их образование происходит в быстрых r -процессах, когда плотность нейтронов столь велика ($n_n \geq 10^{20} \text{ см}^{-3}$), что между бета-распадами происходит много нейтронных захватов [317]. Помимо этого, требуется большая температура ($T \geq 10^9 \text{ K}$), так что наряду с n -захватами происходят фотоотщепления нейтронов.

Путь образования элементов в r -процессе проходят в области переобогащенных нейтронами, бета-неустойчивых ядер, свойства большинства из которых экспериментально не исследовались. При расчетах r -процессов используются теоретические оценки сечений n -захватов $\sigma_{n\gamma}$ и обратных к ним сечений фотоотщепления $\sigma_{\gamma n}$. Скорость захвата $\lambda_{n\gamma}$ связана со скоростью фотоотщепления $\lambda_{\gamma n}$ соотношением (13.10). Также теоретически рассчитываются скорости бета-распадов λ_β (см. гл. 5), границы деления и альфа-распада, существенные для установления максимально достижимых атомных весов в r -процессах; энергии связи и суммы по состояниям у переобогащенных нейтронами ядер (см. § 4, пп. д, е). Длительность r -процесса, протекающего на быстрых динамических стадиях взрыва сверхновых, не превышает нескольких секунд или нескольких десятков секунд. После окончания стадии нейтронного захвата переобогащенные нейтронами ядра возвращаются в долину стабильности по бета распадам. При этом в процессе бета распадов образуются возбужденные ядра. Запоздавающее деление, альфа распад и испарение нейтронов из возбужденных ядер может существенно повлиять на окончательный состав вещества, прошедшего стадию r -процесса. Учет запоздавающего испарения нейтронов сглаживает сильные колебания в концентрации четных и нечетных ядер, которые возникали в расчетах r -процессов и не соответствовали наблюдательным отношениям концентраций. Кинетическое уравнение для изменения со временем концентрации нуклида $n_{A,Z}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dn_{A,Z}}{dt} = & -\lambda_{n\gamma}(A,Z)n_{A,Z} + \lambda_{\gamma n}(A+1,Z)n_{A+1,Z} + \\ & + \lambda_{n\gamma}(A-1,Z)n_{A-1,Z} - \lambda_{\gamma n}(A,Z)n_{A,Z} + \\ & + \lambda_\beta(A,Z-1)n_{A,Z-1} - \lambda_\beta(A,Z)n_{A,Z}. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Эти уравнения следует дополнить заданием начальных концентраций зародышевых ядер и условиями деления и альфа-распада при больших A , добавляющего продукты деления к некоторым нуклидам. Систему (16.10) часто упрощают, рассматривая равновесия по (n, γ) , (γ, n) реакциям.

В этом случае изотопы одного и того же элемента связаны равновесными соотношениями (13.14), а каждое уравнение типа (16.10) пишется для суммы всех изотопов данного элемента с оставлением в правой части только бета-процессов. Исследование r -процессов в условиях частичного равновесия проведено в работе [574]. Расчеты с учетом кинетики (n, γ) , (γ, n) реакций, временных зависимостей $n_n(t)$ и $T(t)$, а также запаздывающих процессов выполнены в [151]. Обзоры более ранних работ даны в [609, 396].

Основной целью расчетов r -процессов является объяснение наблюдательной распространенности r -элементов, имеющей три пика при $A = 80, 130, 195$. В проведенных к настоящему времени расчетах не удалось получить все три пика необходимой высоты в одном физическом явлении. Это может быть связано с плохим выбором задаваемых функций $n_n(t)$, $T(t)$, большими ошибками в теоретически определяемых ядерных характеристиках, но это может быть следствием того, что в реальности разные наблюдаемые пики образуются в разных физических условиях.

Большие трудности возникают, если пытаться объяснить образование очень тяжелых элементов вблизи урана за счет r -процессов. Для этого требуются большие концентрации нейтронов, $n_n \approx 10^{24} \text{ см}^{-3}$, которые вряд ли достижимы при взрывах сверхновых. Для преодоления этих трудностей предлагалось дополнить r -процесс учетом фотоотщеплений протонов (γ, p) при наличии равновесия по (n, γ) и (γ, n) реакциям (rbc -процесс [179]). Это сильно понижает требования к нейтронной плотности, так как она предполагается поддерживающейся равновесными процессами.

В работах [60, 61, 287] производство сверхтяжелых элементов рассматривалось при большой плотности нейтронов $n_n \approx 10^{30} \text{ см}^{-3}$ и умеренной температуре $T \leq 10^8 \text{ K}$, так что все ядра оказываются вблизи границы испарения нейтронов при $Q_n \approx 0$ (n -процесс), см. рис. 20. Такая ситуация может реализоваться в неравновесных оболочках нейтронных звезд (см. § 4), выбросы из которых приведут к появлению сверхтяжелых элементов в межзвездной среде, звездах и планетах [287, 61, 326], см. § 46. *) В рассмотрении n - и rbc -процессов получены только первые результаты и для установления важности этих процессов для нуклеосинтеза требуются дальнейшие исследования.

§ 17. Ядерные реакции в плотном веществе

В предыдущем рассмотрении предполагалось, что в ядерной реакции участвуют только две заряженных частицы (или три в 3α реакции) и пренебрегалось взаимодействием с другими ядрами и электронами. Кулоновские взаимодействия в плазме уменьшают величину потенциального барьера и увеличивают вероятность его прохождения, по сравнению с (13.23). Ускорение реакции за счет экранирования существенно зависит от параметров плазмы. При низких плотностях и высоких температурах, в об-

*) В работах [298, 299] то же название n -процесс применялось для другого явления: нейтронного захвата, промежуточного по скорости между s - и r -процессами, когда $t_\beta \sim t_{n\gamma}$. Для производства тяжелых элементов этот процесс работает хуже, чем r -процесс. Здесь название n -процесс применяется только в смысле [60, 61, 287].

ласти почти идеального газа ионов при $\Gamma = Z^2 e^2 / a k T \ll 1$ (см. (8.56)), средняя энергия кулоновского взаимодействия ионов $E_{\text{кул}} \approx k T \cdot \Gamma$ много меньше кинетической и имеет место слабое экранирование (СЛЭ). С ростом плотности и уменьшением температуры средняя кулоновская энергия становится больше кинетической $\Gamma > 1$, но энергия частиц, вступающих в реакцию, еще превышает среднюю кулоновскую энергию и они могут рассматриваться, как свободные. В этих условиях происходит так называемое сильное экранирование (СИЭ). Оба вида экранирования рассматривались в работах [557, 488], а также в серии работ японских авторов (см. обзоры [431, 427]). При дальнейшем падении температуры и росте плотности средняя кулоновская энергия начинает превышать энергию частиц, вступающих в реакцию, и роль кулоновских взаимодействий становится определяющей. При этом зависимость скорости реакции от T пропадает, а режим экранирования называется пикноядерным (П) и рассмотрен в работах [102, 557]. Будем характеризовать плазму, где идет реакция (13.1) с $Z_0 \geq Z_1$ безразмерными параметрами

$$\Gamma_Z = \frac{Z^2 e^2}{a k T} = Z^{5/3} \frac{e^2}{k T} \left(\frac{4\pi}{3} n_e \right)^{1/3} = \\ = Z^{5/3} \frac{5,7562 \cdot 10^8 \text{ К}}{T} \left(\frac{\rho}{\mu_Z \cdot 1,6203 \cdot 10^{10}} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{3Z}{4\pi n_e} \right)^{1/3} \quad (17.1)$$

(в формуле (8.56) $a \equiv l_{\text{WS}}$),

$$\tau^3 = \frac{27\pi^2}{2} \frac{A m_u Z_0^2 Z_1^2 e^4}{k T \hbar^2} = \frac{A_0 A_1 Z_0^2 Z_1^2}{A_0 + A_1} \frac{7,6696 \cdot 10^{10} \text{ К}}{T}, \quad (17.2)$$

$$A = A_0 A_1 / (A_0 + A_1),$$

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{m_u e^2} \frac{1}{2 A Z_0 Z_1} \left(\frac{n_e}{2 \langle Z \rangle} \right)^{1/3} = \frac{A_0 + A_1}{2 A_0 A_1 Z_0 Z_1} \times \\ \times \left(\frac{1}{\langle Z \rangle \mu_Z} \frac{\rho}{1,3574 \cdot 10^{11}} \right)^{1/3}. \quad (17.3)$$

Величина μ_Z определена формулой (2.17). С учетом μ_N из (2.16) средний заряд ядер плазмы равен

$$\langle Z \rangle = \frac{\mu_N}{\mu_Z}. \quad (17.4)$$

Параметр $\lambda^{3/2}$ пропорционален отношению энергии собственных колебаний решетки к кулоновской энергии взаимодействия ядер на ядерных расстояниях ($\sim \frac{\hbar^2}{m_u e^2}$), а τ^3 есть отношение той же кулоновской энергии к тепловой. В отсутствие экранирования величина τ (совпадает с (13.31)) расположена в экспоненте формулы для скорости реакции (13.26) после усреднения $\langle \sigma v \rangle$ по распределению Максвелла. При $1 \leq \Gamma \leq \Gamma_m$ вещество находится в жидком состоянии, а при $\Gamma \geq \Gamma_m \approx 150$ (см. (4.37), (8.56) и сноску к с. 50 § 4) ионы образуют кристаллическую решетку, в кото-

рой они могут колебаться с частотой, по порядку величины равной ω_{pi} из (8.61) с учетом (8.52). Величина

$$\xi = \frac{\hbar \omega_{pi}}{kT} (= 0,075254 \lambda^{3/2} \tau^3 \text{ при } Z_0 = Z_1 = Z) \quad (17.5)$$

характеризует степень возбуждения колебаний ионной решетки. При $\xi \gg 1$ решетка находится в практически основном состоянии, а при $\xi \leq 1$ возбуждено много степеней свободы. Характерная кинетическая энергия реагирующих ядер E_0 из (13.30) по порядку величины есть

$$E_0 \sim kT\tau \sim E_{кул} \frac{\tau}{\Gamma}. \quad (17.6)$$

Из (17.1)–(17.5) следует $\Gamma \sim \tau \xi^{2/3}$, поэтому из (17.6) имеем

$$E_0/E_{кул} \sim \xi^{-2/3}. \quad (17.7)$$

Таким образом, СИЭ происходит при $\xi \ll 1$ из (17.5) и $\Gamma > 1$. При этом условие $E_0 > E_{кул}$ выполняется за счет большого τ .

П-режим экранирования реализуется при $\Gamma \gg 1$ и $\xi \gg 1$, когда проникновение через кулоновский барьер происходит благодаря нулевым колебаниям ионной решетки. Как отмечалось в § 4, п. ж, в астрофизических условиях нулевые колебания не разрушают кристаллической структуры, что соответствует $\xi/\Gamma < 1$, поэтому условие $\xi \gg 1$ наступает только при выполнении неравенства $\Gamma > \Gamma_m$. В [557] различаются два П-режима:

$$\text{пикноядерный} - T > 0 \text{ (} \Pi_{T>0} \text{) при } 1 \ll \xi^{2/3} \ll \ln(1/\lambda) \quad (17.8)$$

и

$$\text{пикноядерный при нулевой температуре (} \Pi_{T=0} \text{) при } \xi^{2/3} \gg \ln(1/\lambda) \gg 1. \quad (17.9)$$

В режиме $\Pi_{T>0}$ в реакцию вступают ядра, находящиеся на высоковозбужденных колебательных уровнях, а в режиме $\Pi_{T=0}$ даже реагирующие ядра находятся в основном колебательном состоянии.

Во всех реакциях, протекающих в звездах на спокойных стадиях эволюции, кулоновская энергия на ядерных расстояниях значительно превышает как среднюю кинетическую, так и энергию нулевых колебаний. Поэтому при всех режимах экранирования обычно выполняются неравенства

$$\tau \gg 1, \lambda \ll 1 \quad (17.10)$$

и время ядерного горения в звездах очень велико по сравнению с характерными ядерными временами. Области различных режимов экранирования на диаграмме $(\lg \rho, \lg T)$ приведены на рис. 22 для однородного вещества с $Z_0 = Z_1 = Z$. Горизонтальная линия ab на рис. 22 соответствует границе полной ионизации давлением и следует из (4.24) при $\theta_{i2} = (3\pi^2)^{1/2} = 3,09367$. Вертикальная линия bc соответствует полной температурной ионизации и определяется условием при всех плотностях $Ze^2/a_{Z0} = 2kT$, где a_{Z0} есть радиус ближайшей к ядру электронной орбиты, определенный в § 4. Если энергия электростатического взаи-

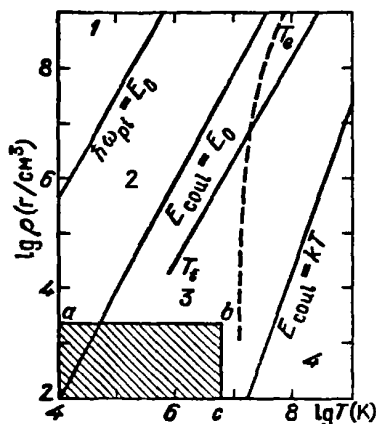


Рис. 22. Области различных режимов экранирования (из [557]); при $T < T_e$ электронное экранирование является сильным (для ^{12}C , из [248]). 1 — $\Pi_T = 0$; 2 — $\Pi_T > 0$; 3 — сильное экранирование, 4 — слабое экранирование. Заштрихована область неполной ионизации

модействия реагирующих частиц $W(r)$ отлична от кулоновской энергии парного взаимодействия (r — расстояние между частицами), то вместо (13.23) для вероятности подбарьерного перехода следует использовать более общую формулу [144]

$$\sigma = \frac{S(E)}{E} \exp \left\{ -2 \frac{\sqrt{2M}}{\hbar} r_{tp} \int_0^{r_{tp}} dr \left[\frac{Z_0 Z_1 e^2}{r} + H(r) - \frac{Mv^2}{2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (17.11)$$

Здесь M — приведенная масса, дана в (13.20), r_{tp} классическая точка поворота, где зануляется подынтегральное выражение,

$$H(r) = W(r) - \frac{Z_0 Z_1 e^2}{r} \text{ — часть потенциальной энергии, связанной с экранированием*}). \quad (17.12)$$

При $H(r) = 0$ из (17.11) следует формула (13.23).

а) Слабое экранирование. При $\Gamma \ll 1$ экранирующий потенциал в плазме вычисляется по теории Дебая—Хьюккеля [176]. В электростатическом поле с потенциалом $\Phi(r)$ распределения ядер и электронов описываются формулами [145]

$$n_i(r) = n_i \exp[-Z_i e \Phi(r)/kT],$$

$$n_e(r) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c \hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + \exp[\sqrt{\alpha^2 + x^2} - (e \Phi(r)/kT) - \beta]}, \quad (17.13)$$

где n_i, n_e — концентрация ионов и электронов, причем при $\Phi(r) = 0$ $n_e(r) = n_e = \text{const}$. Считая возмущения, вносимые потенциалом $e \Phi(r)/kT \ll 1$ ма-

*) По замечанию Д.Г. Яковлева, подход, основанный на использовании среднего потенциала при расчете вероятности туннельного эффекта, непоследователен. Более правильно было бы рассчитывать вероятность туннелирования в поле случайного потенциала, а потом проводить усреднение по ансамблю окружающих частиц. Однако этот более последовательный подход является значительно более трудоемким и до сих пор не реализован.

лыми, и используя (2.10), (2.59), после разложения получаем

$$\begin{aligned} n_i(r) &= n_i [1 - Z_i e \Phi(r)/kT], \\ n_e(r) &= n_e \left[1 + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} \frac{e \Phi(r)}{kT} \right]. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Уравнение Пуассона для $\Phi(r)$ с учетом квазинейтральности имеет вид вокруг ядра с зарядом Z_0

$$\Delta \Phi = -4\pi Z_0 e \delta^3(r) + \frac{4\pi e^2}{m_u kT} \rho \sum_i \frac{x_i}{A_i} \left(Z_i^2 + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} Z_i \right) \Phi \quad (17.15)$$

и допускает решение

$$\Phi = \frac{e Z_0}{r} \exp(-k_0 r) \approx \frac{e Z_0}{r} - e Z_0 k_0, \quad (17.16)$$

где

$$\begin{aligned} k_0^{-1} &= \left[\frac{kT m_u}{4\pi e^2 \rho} \frac{1}{\sum_i \frac{x_i}{A_i} \left(Z_i^2 + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} Z_i \right)} \right]^{1/2} = \\ &= 8,8924 \cdot 10^{-12} \left(\frac{\mu Z T}{\rho} \right)^{1/2} \left(\mu Z \sum_i \frac{x_i Z_i^2}{A_i} + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (17.17)$$

Величина k_0^{-1} имеет смысл дебаевского радиуса экранирования и совпадает с величинами, введенными в (8.47) и (8.63) в соответствующих предельных случаях. Добавка к потенциальной энергии при слабом экранировании есть

$$H(r) = -e^2 Z_0 Z_1 k_0 = \text{const}. \quad (17.18)$$

Подставляя (17.18) в (17.11) и интегрируя, получаем

$$\sigma = \frac{S(E)}{E} \exp \left\{ - \frac{2Z_0 Z_1 e}{\hbar v \sqrt{1 - \frac{2H}{Mv^2}}} \right\}. \quad (17.19)$$

Учитывая (17.19) в (13.19), используя малость $H/Mv^2 \ll 1$ и проводя интегрирование с помощью метода перевала, получаем, что слабое экранирование (СЛЭ) сводится к умножению $\langle \sigma v \rangle$ на множитель

$$e^{U_W} = e^{-\frac{H}{kT}} = e^{-\frac{e^2 Z_0 Z_1 k_0}{kT}}. \quad (17.20)$$

С учетом (17.1) получаем [557]

$$\begin{aligned} U_W &= \sqrt{3} \frac{Z_1}{Z_0} \left(\frac{\mu Z}{Z_0} \right)^{1/2} \eta \Gamma_{Z_0}^{3/2}, \quad \eta^2 = \sum_i x_i \frac{Z_i^2}{A_i} + \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} \frac{1}{\mu Z}, \\ \frac{I_{5-} + I_{6-}}{I_{n-}} &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{(HB)} \\ \frac{3\mu_{te} kT}{\mu_{te}^2 - m_e^2 c^4} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 & \text{(B)} \end{cases} \end{aligned} \quad (17.21)$$

При этом учтено разложение (2.24).

б) Сильное экранирование. В режиме СИЭ при $\Gamma > 1$ и $\xi \ll 1$ из (17.7) классической радиус поворота $r_{tp} \ll a$. Поэтому при расчете экранирования приближенно принимается $H(r) \approx H(0)$ [557]. В приближении Вигнера-Зейца величина $H(0)$ по физическому смыслу есть разность электростатических энергий двух ячеек после и до слияния. С учетом (4.26), (17.1) имеем

$$H(0) = 0,9kT(\Gamma_{Z_1} + \Gamma_{Z_2} - \Gamma_{Z_1+Z_2}). \quad (17.22)$$

По аналогии с (17.20) получаем, что учет СИЭ сводится к умножению $\langle \sigma v \rangle$ на множитель

$$e^{U_{SO}} = e^{-H/kT} = e^{0,9(\Gamma_{Z_1+Z_2} - \Gamma_{Z_1} - \Gamma_{Z_2})} = e^{\beta\tau}. \quad (17.23)$$

Величина τ определена в (13.31) и (17.2), а для β из (17.23) с учетом (17.1) имеем [557]

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1,8}{3(3\pi)^{1/3}} \frac{(Z_0 + Z_1)^{5/3} - Z_0^{5/3} - Z_1^{5/3}}{(AZ_0^2 Z_1^2)^{1/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_Z}\right)^{1/3} \frac{1}{(kT)^{2/3}} \left(\frac{\hbar e}{m_u}\right)^{2/3} = \\ &= \frac{(Z_0 + Z_1)^{5/3} - Z_0^{5/3} - Z_1^{5/3}}{(AZ_0^2 Z_1^2)^{1/3}} \left(\frac{4,2579 \cdot 10^7 \text{ K}}{T}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho/\mu_Z}{1,6203 \cdot 10^{10}}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

По порядку величины $\beta \sim \xi^{2/3} \ll 1$. Во всей области СЛЭ и СИЭ можно воспользоваться с точностью $\leq 30\%$ интерполяционной формулой

$$U_{SW} = \frac{U_{SO} U_W}{\sqrt{U_{SO}^2 + U_W^2}}. \quad (17.25)$$

Поправки к (17.23) в области $\beta \leq 1$ рассчитаны в [557] на основе использования выражения для потенциальной энергии $H(r)$ при произвольном расстоянии между ионами в приближении кристаллической решетки для движения ядер по направлению к ближайшему соседу

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{Z^2 e^2}{b} [-1,1547 - 1,1602(1 - \eta) + 1,0394(1 - \eta)^2 - \\ &- 2,5690(1 - \eta)^3 + 1,6971(1 - \eta)^4]. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Здесь $b = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/3} a = 2,0310a = (N/2)^{-1/3}$ — постоянная объемно центри-

рованной решетки (см. (4.4), (17.1)), $\eta = r/d$, $d = \frac{\sqrt{3}}{2} b = 0,866b$ — расстоя-

ние между ближайшими соседями в той же решетке. Численное интегрирование в (17.11) и (13.19) с учетом (17.26) приводит [557] к фактору СИЭ $e^{U_{Sp} c}$

$$U_{Sp} = \tau \left[\beta - \frac{(0,84Z_0 + 3,46Z_1)\beta^3 + 95,6Z_1\beta^9}{(Z_0 + Z_1) + (1,45Z_0 + 32,8Z_1)\beta^3} \right] \quad (17.27)$$

$$Z_1 \leq Z_0, \quad \beta \leq 0,5.$$

Приведем также выражение для потенциальной энергии из [431, 427] с учетом членов до η^5 :

$$H(r) = - \frac{Z^2 e^2}{b} [1,1547 + 1,1547(1 - \eta) - 0,9935(1 - \eta)^2 + 4,3385(1 - \eta)^3 - 5,3868(1 - \eta)^4 + 1,8728(1 - \eta)^5]. \quad (17.28)$$

При определении $H(r)$ в (17.26) и (17.28) предполагалось, что распределение окружающих зарядов успевает подстроиться под мгновенное расположение реагирующих ядер. В действительности из-за наличия инерции всегда имеется запаздывание и фактор СИЭ будет несколько ниже. Как показано в [557] статическое приближение дает $H(0)$ в 1,337 раз меньше, чем (17.22) (см. (17.36)).

в) Расчет СИЭ на основе моделей конденсированных тел. В работах [433, 434] был сделан более точный по сравнению с [557] расчет фактора СИЭ. Была учтена зависимость экранирующего потенциала от r в (17.11), а также учтено, что туннельный переход между $r = r_{tp}$ и $r = 0$ происходит столь быстро, что в его процессе сохраняется распределение зарядов, соответствующее $r = r_{tp}$ *). Анализ расчетов кулоновских жидкостей методом Монте-Карло привел [434] к следующему выражению для добавки к потенциальной энергии $H(r)$ за счет взаимодействия

$$H(r) = kT \left(1,25 \Gamma_{01} - 0,39 \frac{2r}{a_0 + a_1} \right),$$

$$0,5 \leq 2r/(a_0 + a_1) \leq 1,6, \quad (17.29)$$

где

$$\Gamma_{01} = \frac{2Z_0 Z_1 e^2}{(a_0 + a_1) kT}, \quad (17.30)$$

$$a_0 = \left[\frac{3Z_0}{4\pi(Z_0 n_0 + Z_1 n_1)} \right]^{1/3} = \left(\frac{3Z_0}{4\pi n_e} \right)^{1/3}, \quad (17.31)$$

$$a_1 = (3Z_1/4\pi n_e)^{1/3}.$$

При $Z_0 = Z_1 = Z$ соотношение (17.30) сводится к (17.1). Как отмечалось в [433, 434], при учете зависимости экранирующего потенциала от r в (17.11) нужно вместо $H(r)$ использовать величину $\psi(r, (r_{tp} + r)/2)$, которая для $r < r_{tp}$ равна СИЭ поправке к энергии взаимодействия, соответствующей расположению экранирующих зарядов при $r = r_{tp}$. Функция $\psi(r, r')$ приближенно выражается через $H(r)$ с использованием методов статистической физики [433]

$$\psi(r, r') - \psi(r', r') = r' \frac{dH(r')}{dr'} \frac{r}{r'} \left(1 - \frac{r}{r'} \right). \quad (17.32)$$

После подстановки в (17.11) вместо $H(r)$ выражения $\psi(r, r') \Big|_{r' = \frac{r+r_{tp}}{2}}$

*) См. сноску на с. 90.

из (17.32) и взятия интеграла (13.19) получается аппроксимационная формула для U_S в виде

$$U_S = 1,25 \Gamma_{01} - 0,095 \tau \left(\frac{3 \Gamma_{01}}{\tau} \right)^2 \quad (17.33)$$

В формулах (17.22) и (17.33) используются различные определения параметра Γ (см. (17.1) и (17.31)), которые сводятся к одному при $Z_1 = Z_2 = Z$: $\Gamma_{01} = \Gamma_{Z_1} = \Gamma_{Z_2} = \Gamma$, $\Gamma_{Z_1+Z_2} = 2^{5/3} \Gamma$. Тогда из (17.23) следует

$$U_{S0} \approx 0,9 (2^{5/3} - 2) \Gamma = 1,0573 \Gamma, \quad (17.34)$$

что на $\sim 18\%$ меньше первого линейного члена в (17.33). Формула (17.33) применима, пока межядерные расстояния больше радиуса поворота r_{tp} для ядер, соответствующих минимуму показателя экспоненты в (13.25) и имеющих энергию $E = E_0 \approx \tau k T / 3$. Принимая $r_{tp} = \frac{Z^2 e^2}{E_0} = \frac{3 Z^2 e^2}{\tau k T}$, получим $r_{tp}/a = 3 \Gamma / \tau$, что дает условие применимости (17.33)

$$3 \Gamma_{01} / \tau \leq 1. \quad (17.35)$$

Яковлев и Шалыбков [248] приводят формулу, справедливую для случаев сильного и умеренного экранирования, полученную с использованием монтекарловских расчетов [578] и справедливую для $\Gamma \geq 1$,

$$U_S = f(\Gamma_{Z_1+Z_2}) - f(\Gamma_{Z_1}) - f(\Gamma_{Z_2}), \quad (17.35a)$$

$$f(\Gamma) = 0,897744 \Gamma - 3,80172 \Gamma^{1/4} + 0,75824 \Gamma^{-1/4} + \\ + 0,81487 \ln \Gamma + 2,5820.$$

Для умеренного экранирования $\Gamma \leq 1$ функция $f(\Gamma)$ дана в (17.47).

г) Пикноядерное экранирование. При $\beta \gg 1$ ($3 \Gamma / \tau \gg 1$) энергия E_0 ядер, вступающих в реакцию, много меньше, чем средняя кулоновская E_{coul} .

Тогда ядра не могут считаться свободными, как в случаях СЛЭ и СИЭ. Вместо $Mv^2/2$ в формулу для подбарьерного перехода (17.11) нужно подставлять энергию колебаний в решетке. П-экранирование неудобно описывать сомножителем, учитывающим увеличение скорости реакции, так как получающиеся выражения для скоростей реакций существенно отличаются от стандартного вида формул § 13. При исследовании экранирования в П-режиме, наряду с потенциалом (17.26) в [557] использовался потенциал

$$H_S(r) = \frac{Z^2 e^2}{b} [-1,1547 - 1,1602(1 - \eta) + 1,0394(1 - \eta)^2 - \\ - 0,4001(1 - \eta)^3 + 0,0692(1 - \eta)^4], \quad (17.36)$$

соответствующий статическому приближению, при котором окружающие ядра и центр масс реагирующих ядер считаются фиксированными в процессе реакции.

В режиме $\Pi_{T=0}$ ионы находятся на нижних колебательных уровнях с энергией $E_0 \sim \hbar \omega_{pi} \ll E_{\text{coul}}$, поэтому отклонения положения ядер от

равновесия малы. Скорость $\Pi_{T=0}$ реакции в ВКБ приближении есть [557]

$$P_0 = \frac{2x_0 x_1}{1 + \delta_{01}} 10^{46} \lambda^{7/4} \frac{\rho}{\mu_N} (2A)^2 Z_0^2 Z_1^2 S(E) \times \\ \times \left(\frac{3,90}{4,76} \right) \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{2,638}{2,516} \right) \right] \text{ (реакций} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \text{)}. \quad (17.37)$$

Здесь S имеет размерность МэВ·барн (см. (13.23), (13.24)). Величины A , μ_N , λ даются формулами (13.20), (2.16), (17.3) соответственно, верхние числа относятся к статическому приближению с потенциалом (17.36), а нижние — к приближению полной релаксации с потенциалом (17.26).

При $T \neq 0$ следует учесть, что ядра в решетке могут находиться на возбужденных уровнях, соответствующих энергии возбуждения $(E - E_0)$, с вероятностью $\exp[-(E - E_0)/kT]$. После суммирования по возбужденным состояниям для величины P — скорости $\Pi_{T>0}$ -реакции, в [557] получено выражение

$$\frac{P}{P_1} - 1 = \left(\frac{0,0430}{0,0485} \right) \lambda^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{1,2624}{2,9314} \right) e^{-8,7833 \beta^{3/2}} \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -7,272 \beta^{3/2} + \lambda^{-1/2} \left(\frac{1,2231}{1,4331} \right) e^{-8,7833 \beta^{3/2}} \right\} \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{0,6310}{1,4654} \right) e^{-8,7833 \beta^{3/2}} \right], \quad (17.38)$$

где снова верхние значения относятся к статическому приближению, а нижние — к приближению полной релаксации.

д) Учет электронов в СИЭ. Электронное экранирование связано с влиянием неоднородности распределения плотности электронов на энергию взаимодействия между реагирующими ядрами. Для случая СЛЭ такой учет содержится в формуле (17.21), в пп. б, в, г рассматривалось только экранирование ионами. Для СИЭ учет электронного экранирования сделан в работах [177, 181, 428, 247]. Расчеты электронного экранирования, проведенные в [247, 248] для случая, когда движение ионов в плазме можно считать классическим, привели к следующему фактору экранирования:

$$U_{Se} = f_e(\Gamma_{Z_1+Z_2}, Z_{12}, \beta) - f_e(\Gamma_{Z_1}, Z_1, \beta) - f_e(\Gamma_{Z_2}, Z_2, \beta), \\ f_e(\Gamma, Z, \beta) = \eta Z^{2/3} [A(Z, \beta) \Gamma + B(Z, \beta) \Gamma^{1/4} + C(Z, \beta)]. \quad (17.39)$$

Здесь

$$\eta = \kappa^2 I_e^2 = 3 \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \frac{e^2}{\hbar v_{Fe}} \approx \frac{0,03422}{\beta}, \quad \beta = \frac{v_{Fe}}{c} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \quad (17.40)$$

$y = \frac{p_{Fe}}{m_e c}$ из (2.21), $I_e = \left(\frac{3}{4\pi n_e} \right)^{1/3}$, $\kappa = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{kT} \right)^{1/2}$ — дебаевский радиус классических электронов из (8.46), $Z_{12} = Z_1 + Z_2$. Функции $A(Z, \beta)$, $B(Z, \beta)$,

$C(Z, \beta)$ аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned} A(Z, \beta) &= A_0(Z) + A_1(Z) \ln [1 + (1 - \beta^2) A_2(Z)], \\ B(Z, \beta) &= B_0(Z) + B_1(Z) \ln [1 + (1 - \beta^2) B_2(Z)], \\ C(Z, \beta) &= C_0(Z) + C_1(Z) \ln [1 + (1 - \beta^2) C_2(Z)]. \end{aligned} \quad (17.41)$$

Коэффициенты $A_i(Z)$, $B_i(Z)$, $C_i(Z)$ даны в табл. 19 из [248]. Фактор электронного экранирования складывается с фактором ионного экранирования U_S в показателе экспоненты экранирующего множителя $\exp(U_S + U_{Se})$. На рис. 22 приведена линия T_e , на которой $\exp(U_{Se}) = 2$ для горения углерода ^{12}C , так что электронное экранирование становится сильным при $T < T_e$. Слева от линии T_e нарушается условие применимости расчетов [247, 248].

е) Экранирование резонансных реакций. Для резонансных реакций наибольший вклад в среднее значение $\langle \sigma v \rangle$ дает область энергии вблизи резонанса $E = E_r$, вместо энергий в области $E = E_0$. С учетом сдвига уровней в поле экранирующего потенциала, в (17.11) вместо $Mv^2/2$ следует подставить величину $E_r + H(0)$. Интегрирование в (17.11) с учетом $H(r)$ и затем в (13.19) приводит к соотношению для экранирующего фактора в СИЭ режиме в виде [557]

$$U_{Sr} = \tau\beta - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\epsilon_r}} \left[\frac{1,30Z_0 + 1,14Z_1}{(Z_0 + Z_1)\epsilon_r^3} + \frac{28,2Z_0 - 34,4Z_1}{(Z_0 + Z_1)\epsilon_r^6} + \frac{150Z_1}{(Z_0 + Z_1)\epsilon_r^9} \right], \quad (17.42)$$

где

$$\epsilon_r = E_r / \left(\frac{Z_0 Z_1 e^2}{b} \right) = \frac{1}{Z_0 Z_1} \left(\frac{Z_0 \mu_Z \cdot 1,3574 \cdot 10^{11}}{\rho} \right)^{1/3} \frac{E_r}{49,600 \text{ кэВ}}, \quad (17.43)$$

$$Z_0 \geq Z_1.$$

Величины λ , τ , β , b определены в (17.2), (17.3), (17.24), (4.4). Если парциальная ширина данной реакции много меньше полной ширины резонанса, то фактор СИЭ сводится к виду

$$U_{Sr} = \tau\beta = U_{S0}.$$

Приведем также фактор СИЭ для реакции $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$, который должен учи-

Таблица 19

Значения параметров, входящих в формулу (17.41), для электронного экранирования ядерных реакций из [248]

Z	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	C_0	C_1	C_2
1	7,924-3	2,613-2	0,5280	0,2020	0,1069	1,616	-2,935-2	-8,771-2	1,343
2	1,518-2	4,045-2	0,6262	0,2356	2,122-2	7,022	-5,274-2	-1,206-2	7,006
6	3,105-2	2,810-2	1,179	0,2602	1,160-2	10,96	-6,682-2	-7,733-3	9,321
8	3,528-2	2,563-2	1,330	0,2654	9,349-3	13,20	-7,014-2	-6,200-3	11,27
12	4,115-2	2,270-2	1,536	0,2715	6,283-3	19,22	-7,388-2	-3,926-3	17,65
18	4,683-2	1,994-2	1,753	0,2761	4,662-3	24,45	-7,668-2	-2,894-3	22,92

ываться в (14.38),

$$U_{S3\alpha} = 2,916\Gamma_2 - 3 \ln(1 + 0,3\Gamma_2 + 0,266\Gamma_2^{3/2}) + \ln(1 + 1,87\Gamma_2 + 4,15\Gamma_2^{3/2}), \quad (17.44)$$

где Γ_2 ($Z = 2$) определено в (17.1). Выражения (17.42), (17.44) справедливы при

$$\epsilon_r > \frac{3,04Z_0 + 1,26Z_1}{Z_0 + Z_1}, \quad (17.45)$$

что для (17.44) на стадии образования ^8Be сводится к неравенству $\rho < 5,5 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ для $E_r = 92 \text{ кэВ}$ из (14.37). В работе [248] для $U_{S3\alpha}$ приведено выражение, полученное с учетом монтекарловских расчетов [578] и применимое при $\Gamma \geq 1$,

$$U_{S3\alpha} = f(\Gamma_{123}) - 3f(\Gamma_2) = 2,90892\Gamma_2 + 5,3965\Gamma_2^{1/4} - 1,7950\Gamma_2^{-1/4} - 1,62974 \ln \Gamma_2 - 3,67196, \quad (17.46)$$

где $\Gamma_{123} = 3^{5/3}\Gamma_2$, а $f(\Gamma)$ определено в (17.35а). В случае умеренного экранирования $\Gamma \leq 1$ в (17.46) используется [248] функция

$$f(\Gamma) = \frac{\Gamma^{3/2}}{\sqrt{3}} - 0,14554 \cdot \Gamma^{2,016}, \quad (17.47)$$

приводящая к интерполяционной формуле

$$U_{WS3\alpha} = 2,11\Gamma_2^{3/2} - 1,35\Gamma_2^{2,016}. \quad (17.47a)$$

Функция (17.47) плавно сшивается с $f(\Gamma)$ из (17.35а) при $\Gamma = 1$ и может быть использована в U_S из (17.35а) для определения U_{WS} умеренного экранирования двухчастичной реакции.

Задача. Найти скорость $\Pi_{T=0}$ реакции, если пространственный потенциал аппроксимировать выражением

$$W(r) = Z_0 Z_1 \left(\frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2r_0 - r} - \frac{2e^2}{r_0} \right). \quad (1)$$

Решение. [102, 227]. Классическое равновесное состояние в потенциале (1) соответствует $r = r_0$. Для малых колебаний ($|r - r_0| \ll r_0$) частота $\omega = 2\sqrt{Z_0 Z_1 e^2 / \sqrt{M} r_0^3}$,

$$\text{энергия нулевых колебаний } E_0 = \frac{\hbar \omega}{2} = \hbar \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{M r_0^3}}, \quad (2)$$

$$\text{классический радиус поворота } r_{tp} = r_0 - \left(\frac{\hbar^2 r_0^3}{4 Z_0 Z_1 e^2 M} \right)^{1/4}.$$

Экспонента подбарьерного перехода из (17.11) с учетом $\frac{Mv^2}{2} = E_0$ для малых ϵ равна

$$D = \exp \left(-\frac{4}{\epsilon} + \ln \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \right), \quad \epsilon = 2 \left(1 - \frac{r_{tp}}{r_0} \right)^2 = (\hbar^2 / Z_0 Z_1 e^2 M r_0)^{1/2}. \quad (3)$$

Величина D определяет отношение потока после барьера к потоку до барьера:

$$D = \frac{(v|\psi^2|)_{\text{после}}}{(v|\psi^2|)_{\text{до}}} \quad (4)$$

Будем рассматривать усредненные по угловым переменным значения $|\psi^2|$. Вероятность реакции между двумя данными ядрами есть [227]

$$p = (v|\psi^2|)_{\text{после}} \cdot R_n^2 P_n = (v|\psi^2|)_{\text{до}} \cdot D R_n^2 P_n (\text{с}^{-1}) \quad (5)$$

P_n — вероятность ядерной реакции для частиц, сблизившихся на расстояние радиуса ядра R_n . Величина $S(E) = ER_n^2 P_n$, имеющая тот же смысл, что и в (13.23), зависит только от свойств конкретных ядер. С использованием $S(E)$ вероятность реакции p примет вид

$$p = (v|\psi^2|)_{\text{до}} \cdot D \frac{S(E)}{E} (\text{с}^{-1}). \quad (6)$$

Волновая функция ψ в пространственной потенциальной яме (1) в квазиклассическом приближении есть [144]

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(r_0 - r)\sqrt{r_0 - r_{tp}}} \sqrt{\frac{v_0}{v}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_r^{r_0} \sqrt{2m(E_0 - W)} dx + \frac{\pi}{4}\right), \quad (7)$$

где $v_0 = \sqrt{2E_0/M}$ — относительная скорость ядер в точке равновесия $r = r_0$. Плотность потока сталкивающихся ядер в точке поворота $r = r_{tp}$ при замене $\sin^2 F$ из (7) его средним значением $1/2$ есть

$$(v|\psi^2|)_{\text{до}} = \frac{1}{\pi} \frac{v_0}{(r_0 - r_{tp})^3}. \quad (8)$$

Учитывая, что в объемноцентрированной решетке число реакций в секунду в см^3 есть [360, 557]

$$P = \frac{8\rho N_A}{1 + \delta_{01}} \frac{x_0 x_1}{\mu_N} p (\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}) \quad (9)$$

и используя (3), (6), (8) при $E = E_0$, получаем

$$P = \frac{8\rho N_A}{1 + \delta_{01}} \frac{x_0 x_1}{\mu_N} \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{Z_0^3 Z_1^3 e^6 M^3}{\hbar^{10} r_0^5} \right)^{1/4} \times \\ \times \exp\left(-\frac{4\sqrt{Mr_0 Z_0 Z_1 e^2}}{\hbar}\right) S(E_0). \quad (10)$$

Вводя параметр λ из (17.3) и учитывая $r_0 = 2\langle a \rangle = \left(\frac{6\langle Z \rangle}{\pi n_e}\right)^{1/3}$, $\langle a \rangle$ — средний радиус W — S ячейки, получаем

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{2m_u A Z_0 Z_1 e^2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{r_0}, \quad (11)$$

$$P = \frac{2\rho x_0 x_1}{(1 + \delta_{01}) \mu_N} \cdot 4,8 \cdot 10^{44} (2A)^2 Z_0^2 Z_1^2 \lambda^{5/4} S \exp\left(-\frac{2,85}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (12)$$

Здесь, как и в (17.37), S имеет размерность МэВ · барн. Приближенная формула (12) дает меньшее значение P , чем более точная формула (17.37).

§ 18. Основы теории слабого взаимодействия

Реакции, в которых принимает участие нейтрино, называются реакциями слабого взаимодействия (см. (14.1), (14.11), (14.15), (14.18) — (14.21), (14.23)). Название связано с малостью сечения взаимодействия этих реакций, которое значительно меньше сечений электромагнитного и ядерного (сильного) взаимодействий. С малостью сечения связана высокая проникающая способность нейтрино. Они почти без поглощения выходят из центра Солнца и подобных звезд и так же свободно проходят по диаметру сквозь Землю. Наблюдения нейтрино от Солнца дали бы уникальную возможность наблюдательного определения условий в его центральных областях. Ведущиеся более 15 лет эксперименты с использованием реакций



дают результат несколько меньше теоретического [260]:

$$Ev_{\text{obs}} = 2,1 \pm 0,9 \text{ SNU}, \quad (18.2)$$

$$Ev_{\text{theor}} = 5,8 \pm 2,2 \text{ SNU}.$$

Здесь ошибка дана в пределах 3σ , $1(\text{SNU}) = 1(\text{solar neutrino unit}) = 1$ (солнечная нейтринная единица) $= 10^{-36}$ событий в секунду на атом ^{37}Cl . Разница между теорией и экспериментом статистически недостаточно достоверна для каких-либо радикальных выводов, поэтому сохраняется состояние неопределенности. Возможным объяснением этого различия является наличие резонансных нейтринных осцилляций в веществе, рассмотренных в [160, 274].

Частицы, которые участвуют в слабых взаимодействиях и не участвуют в сильных называются лептонами. Нейтральным лептонам (нейтрино) соответствуют заряженные лептоны, которые участвуют и в электромагнитных взаимодействиях. Все лептоны имеют спин $1/2$, подчиняются статистике Ферми с функцией распределения в ячейках фазового пространства типа (2.2). В настоящее время известно три сорта нейтрино и три заряженных лептона [172, 544a]:

$$\begin{aligned} &\text{электронное } \nu_e, e(m_e = 0,5110 \text{ МэВ} = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г}, m_{\nu_e} < 35 \text{ эВ})^*) \\ &\text{мюонное } \nu_\mu, \mu(m_\mu = 105,7 \text{ МэВ} = 1,88 \cdot 10^{-25} \text{ г}, m_{\nu_\mu} < 0,25 \text{ МэВ})^{**}) \\ &\text{тау-нейтрино } \nu_\tau, \tau\text{-лептон } (m_\tau = 1784 \text{ МэВ}, m_{\nu_\tau} < 70 \text{ МэВ}). \end{aligned} \quad (18.3)$$

Здесь приведены экспериментальные ограничения на массы. Каждому лептону из (18.3) соответствует античастица. Электронные нейтрино излучаются звездами на стадии водородного горения, на поздних стадиях эволюции нейтринные ν_e потери энергии могут превышать фотонные [363]

*) См. сноску на с. 29.

**) Масса $m_{\nu_\mu} < 40 \text{ эВ}$ из космологии [88, 100].

(см. гл. 9). Излучение всех типов нейтрино очень важно при взрывах сверхновых (см. гл. 10).

Теория слабых взаимодействий (бета-процессов) развита весьма детально, почти как теория электромагнитного поля, но в отличие от последней она является чисто квантовой, не имеющей классического предела. Рассмотрим основные положения теории бета-взаимодействий, необходимые для расчета нейтринных процессов в звездах.

а) Бета-распады ядер. Основы теории слабых взаимодействий были заложены Э. Ферми [213] в 1933 г. для объяснения бета-распадов ядер в реакции

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu} \quad (18.4a)$$

или

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + e^+ + \nu. \quad (18.4b)$$

Реакции (18.4) идут, если масса исходного ядра превышает массу конечного на величину, большую, чем масса электрона:

$$\Delta_{ZZ'} = (m_{A, Z} - m_{A, Z'}) c^2 > m_e c^2, \quad Z' = Z \pm 1. \quad (18.5)$$

Знаки "+" и "-" относятся к реакциям а) и б) соответственно.

Вероятность реакции бета-распада, согласно теории возмущений [144], равна *)

$$W_\beta = \frac{2\pi}{\hbar} \int |H|_\beta^2 \delta(\sum_\lambda \epsilon_\lambda) dN_e dN_{\bar{\nu}} dN_{A, Z'}. \quad (18.6)$$

Здесь состояние исходного ядра (A, Z) считается заданным, δ -функция отражает закон сохранения энергии ϵ_λ при бета-распаде.

Суммирование ведется по четырем частицам, участвующим в реакции ($\lambda = 1, 2, 3, 4$). В теории Ферми предполагается, что бета-взаимодействие происходит, когда все четыре частицы (лептоны и нуклоны внутри ядра) находятся в одной точке пространства. Это учтено при написании (18.6), где интегрирование по области возможных взаимодействий (объем ядра) содержится в матричном элементе от Гамильтониана H_β . Дифференциалы в (18.6) указывают на интегрирование только по импульсному пространству. Если бета-распад происходит в среде, где имеются электроны e^- (или e^+) и антинейтрино $\bar{\nu}_e$ (или ν_e) с функциями распределения в фазовом пространстве f_e и f_ν (см. (2.2)), то с учетом принципа Паули

$$dN_e = \frac{1 - f_e}{(2\pi\hbar)^3} d^3p_e, \quad dN_\nu = \frac{1 - f_\nu}{(2\pi\hbar)^3} d^3p_\nu. \quad (18.7)$$

При бета-распадах $\Delta \ll m_{A, Z} c^2$, так что можно пренебречь отдачей ядра и исключить интегрирование по $dN_{A, Z'}$, так как в силу нормировки $\int dN_{A, Z'} = 1$. Для нахождения полной вероятности бета-распада нужно учесть все возможные конечные (возбужденные) состояния ядра (A, Z') и взять по ним сумму $\sum_i W_{\beta, i}$. С ростом Δ число возможных конечных возбужденных состояний быстро растет.

*) Стрелка обозначает трехмерный вектор, латинский индекс — четырехмерный.

б) Вид матричных элементов при бета-распаде. Для вычисления матричного элемента H_β для неполяризованных ядер в (18.6) сначала составляется специальным образом выбранная линейная комбинация произведения компонентов волновых функций, определенная ниже. От этой линейной комбинации берется интеграл по объему ядра V_n , а затем производится суммирование по всем возможным спиновым состояниям конечных частиц и усреднение по спиновым состояниям исходного ядра (A, Z). Если в бета-реакции участвуют только элементарные свободные частицы, лептоны или адроны, то интегрирование ведется по всему пространству. В данном случае, когда суммирование по спиновым состояниям осуществляется в матричном элементе, статистический вес не входит в определение фазового объема в (18.7).

В релятивистской теории поля свободный электрон и другие свободные фермионы характеризуются четырехкомпонентной волновой функцией (спинором) ψ_e , удовлетворяющей уравнению Дирака

$$\left(i\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{m_e c}{\hbar} \right) \psi_e = 0. \quad (18.8)$$

Матрицы Дирака γ_i определяются с точностью до произвольного унитарного*) преобразования. В стандартном представлении, в котором две компоненты спинора ψ_e зануляются в нерелятивистском пределе, матрицы γ_i имеют вид [69, 171]

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

) Преобразование в линейном пространстве называется унитарным, если матрица преобразования U такова, что обратная к ней U^{-1} равна эрмитово сопряженной $U^\dagger$, причем $U^\dagger = (U^)^T$, где "*" означает комплексное сопряжение, а "T" — транспонирование. При унитарном преобразовании ψ с матрицей U , изменяющим представление в фиксированной пространственно-временной системе координат по формуле $\psi' = U\psi$, представление матриц γ_i изменяется по соотношению $\gamma'_i = U\gamma_i U^{-1}$, оставляющему инвариантным уравнение Дирака (18.8).

В (18.8) использовано скалярное произведение векторов в виде

$$uv \equiv u_i v_i = u_4 v_4 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3; \quad x_4 = ct. \quad (18.10)$$

Матрица S , задающая преобразование Лоренца для биспинора

$$\psi' = S\psi \quad (18.11)$$

при неизменном представлении матриц γ_i , связана с матрицей преобразования Лоренца L_{ik} для вектора

$$x' = Lx, \quad x'_i = L_{ik} x_k \quad (18.12)$$

соотношением, определяемым из условия инвариантности уравнения Дирака [230]

$$S^{-1} \gamma_i S = L_{ik} \gamma_k, \quad S \gamma_4 S^+ = b \gamma_4. \quad (18.13)$$

Знак перед γ_4 совпадает со знаком матричного элемента L_{44} , $b = \pm 1$. Первое соотношение (18.13) эквивалентно условию

$$S \gamma_i S^{-1} = L_{ki} \gamma_k, \quad (18.14)$$

что связано с ортогональностью преобразования Лоренца

$$L_{ik}^{-1} = L_{ki}. \quad (18.15)$$

Матрица S , удовлетворяющая условиям (18.13), вообще говоря, не унитарна и имеет структуру [214]

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^* & \beta^* \\ 0 & 0 & \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (18.16)$$

Матрицы γ_i удовлетворяют условиям

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik} I; \quad i, k = 1, 2, 3, 4, 5; \\ I - \text{единичная матрица}, \quad (18.17)$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k = 4, 5 \\ -1 & \text{при } i = k = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Отметим, что в (18.9) матрицы γ_4 и γ_5 являются эрмитовыми, а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — антиэрмитовыми*).

Из четырехкомпонентных биспиноров ψ_e и ψ_ν могут быть составлены 16 билинейных членов, которые разбиваются на пять ковариантных комбинаций. Для получения билинейных членов используется дираковский сопряженный спинор

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4, \quad (18.18)$$

*) Матрица A эрмитова, если $A^+ = A$ и антиэрмитова, если $A^+ = -A$, унитарное преобразование сохраняет свойство эрмитовости и антиэрмитовости.

с помощью которого строятся комбинации [171] *)

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi & - \text{скаляр } (S), \\ \bar{\psi}\gamma_i\psi & - \text{полярный вектор } (V), \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi & - \text{аксиальный вектор } (A), \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi & - \text{псевдоскаляр } (P), \\ \bar{\psi}\sigma_{ik}\psi & - \text{антисимметричный тензор } (T), \\ \sigma_{ik} & = \frac{1}{2i}(\gamma_i\gamma_k - \gamma_k\gamma_i).\end{aligned}\tag{18.19}$$

Из условия инвариантности матричного элемента H произведения волновых функций входит в него в виде попарных произведений членов типа (18.19). В первом варианте теории бета-распада [213] Ферми рассматривал только V взаимодействие по аналогии с электродинамикой. Анализ опытных данных показал, что реализуется вариант $V - A$ взаимодействия, рассмотренный Фейнманом и Гелл-Маном, в котором лептонные (l) волновые функции входят в виде комбинаций типа $j_{l,i}$ в матричный элемент H_β . Для реакции (18.4а) эта комбинация имеет вид [171]

$$j_{l,i} = \bar{\psi}_e\gamma_i(1 + \gamma_5)\psi_\nu.\tag{18.20}$$

Величина $j_{l,i}$ называется лептонным током**. Такой выбор тока $j_{l,i}$ благодаря свойствам матрицы γ_5 из (18.9) приводит к тому, что только две (левые) комбинации компонентов биспиноров $\bar{\psi}_e$ и ψ_ν задают скорость реакции слабого взаимодействия [171]. Это отражает свойство двухкомпонентности нейтрино, обладающего левой спиральностью, т.е. спин его направлен против импульса. Антинейтрино имеет обратную (правую) спиральность. Данное свойство приводит к несохранению пространственной (P) четности при сохранении комбинированной (CP) четности. Зарядовое сопряжение (C) означает замену частицы на античастицу. Ток, образованный с помощью оператора $O_i^L = \gamma_i(1 + \gamma_5)$ называется л е в ы м т о к о м.

Адронный ток $j_{a,i}$ имеет вид, аналогичный (18.20), однако ввиду составной природы адронов и рождению виртуальных частиц в сильных взаимодействиях появляется зависимость матричного элемента от переданного импульса $q_i = \frac{1}{c}(p'_i - p_i)$, $q^2 = |q_i q_i|$ и вид тока оказывается более

сложным, чем лептонного (18.20). Имеем [72, 469, 86]

$$j_{a,i} = \bar{\psi}_p[f_1(q^2)\gamma_i - if_2(q^2)\sigma_{ik}q_k + g_1(q^2)\gamma_i\gamma_5 + g_3(q^2)q_i\gamma_5]\psi_n.\tag{18.21}$$

Слабые форм-факторы нуклона f_α и g_α для квазиупругих реакций***) определяются из экспериментальных данных, а также гипотез сохранения век-

*) При унитарном преобразовании $\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^{-1}$, при преобразовании Лоренца (18.11) $\bar{\psi}' = b\bar{\psi}S^{-1}$.

**) Сопряженные биспиноры указывают на рождение частицы, обычные — на ее уничтожение. В (18.20) использовано ψ_ν , так как рождение антинейтрино в (18.4а) эквивалентно уничтожению ее античастицы — нейтрино.

***) Квазиупругими считаются все реакции с образованием нуклонов без появления более тяжелых адронов, т.е. все реакции с $\epsilon_\nu, e < 300$ МэВ.

торного тока [87] и частичного сохранения аксиального тока [86] СВТ и ЧСАТ:

$$f_1(q^2) = \left[1 + \frac{q^2}{4m_p^2} (1 + \mu_p - \mu_n) \right] \left(1 + \frac{q^2}{m_v^2} \right)^{-2} \left(1 + \frac{q^2}{4m_p^2} \right)^{-1}, \quad (18.22)$$

$$f_2(q^2) = \frac{\mu_p - \mu_n}{2m_p} \left(1 + \frac{q^2}{m_v^2} \right)^{-2} \left(1 + \frac{q^2}{4m_p^2} \right)^{-1}, \quad (18.23)$$

$$g_1(q^2) = 1,25 \left(1 + \frac{q^2}{m_A^2} \right)^{-2}, \quad (18.24)$$

$$g_3(q^2) = \frac{2m_p}{m_\pi^2 + q^2} g_1(q^2) \approx \frac{2,5m_p}{m_\pi^2 + q^2} \left(1 + \frac{q^2}{m_A^2} \right)^{-2}. \quad (18.25)$$

Гипотеза СВТ предполагает неизменность "слабого заряда" нуклона при рождении виртуальных частиц из-за сильных взаимодействий. Она основана на аналогии с электродинамикой, где в аналогичных условиях не меняется электрический заряд протона. Поэтому принимается $f_1(0) = 1$, что согласуется с опытом. В то же время различие магнитных моментов протона μ_p и нейтрона μ_n приводит к появлению формфактора $f_2(q^2)$. В предположении СВТ слабые формфакторы считаются равными электромагнитным. Гипотеза ЧСАТ позволяет связать $g_1(q^2)$ и $g_3(q^2)$ в (18.25), но величина $g_1(0) = 1,25$ (аксиальный ток не сохраняется) определяется из экспериментов. В (18.22) – (18.25) входят следующие константы:

$$\begin{aligned} \mu_p &= 1,79, & \mu_n &= 1,91, \\ m_\pi &= 273 m_e = 139,5 \text{ МэВ}, \\ m_v^2 &= 0,71 \text{ ГэВ}^2, \\ m_A &= \begin{cases} 1,34 \pm 0,05 \text{ ГэВ} & [469], \\ 0,95 \pm 0,12 \text{ ГэВ} & [86]. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.26)$$

Очевидно, что точность измерений m_A не лучше $\sim 30\%$, в то время как для m_v точность составляет несколько процентов [86].

С учетом (18.20), (18.21) матричный элемент H_β запишется в виде

$$H_\beta = \sum_\sigma \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int_{V_n} j_{a,i} j_{l,i} d^3x, \quad (18.27)$$

где $\sum_\sigma$ означает суммирование и усреднение по спиновым состояниям,

а интегрирование ведется по объему ядра, где локализованы волновые функции нуклонов. Из экспериментальных данных по бета-распаду нейтрона и распаду мюона константа слабой связи равна [86] (см. пп. в, г)

$$10^{49} G_W = \begin{cases} 1,4358 \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 & (\mu\text{-распад}) [172] \\ 1,4335 \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 & (\mu\text{-распад}) [86] \\ 1,4132 \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 & (\beta\text{-распад}) [86]. \end{cases} \quad (18.28)$$

Нормировка волновых функций различна для свободных частиц и нуклонов, локализованных в ядрах. Для последних используется обычная единица

ная нормировка по объему ядра V_n :

$$\int_{V_n} (\psi^\dagger \psi)_{p,p} d^3x = 1. \quad (18.29)$$

Для лептонов и других свободных частиц нормировка волновых функций выбирается так, чтобы одна частица находилась в единице объема (см. пп. в, г).

Небольшое различие констант μ и β распадов в (18.28) связано с тем, что бета-распад нейтрона определяется только той частью слабого адронного тока, которая сохраняет странность. Отметим, что при рассмотрении слабых взаимодействий с участием ядер гораздо большая неопределенность результатов возникает из-за того, что волновые функции нуклонов в ядрах известны плохо ввиду отсутствия точной теории сильных взаимодействий.

в) **Вычисление квадрата матричного элемента и вероятность распада мюона.** Близость констант в (18.28) свидетельствует в пользу теории универсального слабого взаимодействия, согласно которой константа связи G_W и $(V - A)$ тип взаимодействия одинаковы для всех элементарных частиц, лептонов и кварков *) [172]. Некоторая модификация типа взаимодействия имеется в нейтральных токах, рассмотренных в п. ж). Наиболее просто рассчитываются матричные элементы с двумя лептонными токами, где формфакторы отсутствуют. К таким процессам относится распад мюона

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e. \quad (18.30)$$

Вероятность распада мюона определяется выражением

$$W_\mu = \frac{2\pi}{\hbar} \int |H_\mu|^2 \delta(\Sigma \epsilon_\lambda) dN_e dN_{\bar{\nu}_e} dN_{\nu_\mu} \quad (18.31)$$

с матричным элементом

$$\begin{aligned} H_\mu &= \sum_\sigma \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int j_{\bar{e}\nu_e, i} j_{\bar{\nu}_\mu \mu, i} d^3x = \\ &= \sum_\sigma \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\mu] d^3x \end{aligned} \quad (18.32)$$

и фазовыми объемами, аналогичными (18.7). Волновые функции свободных лептонов с данным импульсом $\vec{p}$ в соответствии с уравнением Дирака (18.8) выбираются в виде

$$\psi(p_i, x_i) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\epsilon}} u(p) e^{-i \frac{p_i x_i}{\hbar}}, \quad (18.33)$$

где p_i — 4-импульс лептона, $p \equiv p_i = \left(-\vec{p}, \frac{\epsilon}{c}\right)$, $u(p)$ — биспинор, не зависящий от координат. Подставляя (18.33) в (18.8), получаем уравнение

*) Учет кварковой структуры нуклонов необходим при высоких энергиях $E \gg 1000$ МэВ, которые здесь не рассматриваются.

для $u(p)$

$$(p_i \gamma_i - mc) u(p) = 0, \quad (18.34)$$

где с учетом нормировки для свободных частиц биспинор $u(p)$ удовлетворяет соотношениям

$$\bar{u}u = 2mc, \\ \bar{u} \gamma_i u = 2p_i.$$

В результате для электрона получаем решение (18.34) в виде

$$u = u_e = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E}{c} + m_e c} & W_e \\ \sqrt{\frac{E}{c} - m_e c} & (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) W_e \end{pmatrix}, \quad (18.35)$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ — единичный вектор вдоль направления импульса,

$$\vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (18.36)$$

— вектор, составленный из матриц Паули σ_k , W_e — произвольный двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий условию

$$W_e^\dagger W_e = 1 \quad (18.37)$$

и характеризующий поляризацию*).

Неполяризованный электрон описывается матрицей плотности Λ_e , получаемой в результате суммирования по спиновым состояниям и являющейся квадратной 4-матрицей вида [17, 21]

$$\sum_u u \bar{u} = \Lambda_e = (p_i \gamma_i + m_e c I). \quad (18.38)$$

При усреднении по спиновым состояниям неполяризованного мюона возникает матрица $\frac{1}{2} \Lambda_\mu$, где Λ_μ аналогична Λ_e из (18.38). При вычислении

$|H|_\mu^2$ используется соотношение Фирца [171], отражающее симметрию матричного элемента H из (18.32) относительно перестановок волновых функций

$$[\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\mu] = \\ = - [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\mu] [\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}]. \quad (18.39)$$

*) Наряду с биспинором из (18.33), (18.35), соответствующим свободному электрону имеется еще одно решение уравнения (18.8), соответствующее свободному позитрону: $\psi_{e^+} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\epsilon}} \bar{u}_e + \exp\left(\frac{ip_i x_i}{\hbar}\right)$, причем $\bar{u}_e + u_{e^+} = -2m_e c$, $\bar{u}_e + \gamma_i u_{e^+} = 2p_i$. Биспинор $u_{e^+} = u(-p)$ получается из (18.35) после перемены знака m_e и замены $W_e \Rightarrow (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) W_e$ с учетом $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1$.

расчет $|H|_{\mu}^2$ требует выражения для комплексно сопряженного тока [171], имеющего вид для (18.20)

$$j_{i,i}^* = [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}]^* = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_e. \quad (18.40)$$

Введем матрицы

$$\begin{aligned} A_{ik} &= [\bar{u}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) u_{\mu}] [\bar{u}_{\mu} \gamma_k (1 + \gamma_5) u_e], \\ B_{ik} &= [\bar{u}_{\nu_{\mu}} \gamma_i (1 + \gamma_5) u_{\nu_e}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_k (1 + \gamma_5) u_{\nu_{\mu}}], \end{aligned} \quad (18.41)$$

где биспиноры u_{λ} и ψ_{λ} связаны между собой по аналогии с (18.33). Используя (18.38)–(18.41), суммирование по спинам одного из нейтрино и усреднение по спинам мюона в (18.32), получаем для неполяризованного мюона *)

$$|H|_{\mu}^2 = \frac{G_W^2 c^4 A_{ik} B_{ik}}{32 \epsilon_{\nu_{\mu}} \epsilon_{\nu_e} \epsilon_{\mu} \epsilon_{\mu}} (2\pi \hbar)^3 \delta \left(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda} \right). \quad (18.42)$$

С учетом (18.38) вычисление $|H|_{\mu}^2$ сводится к вычислению следов (сумме диагональных элементов) матриц, составленных из произведений γ -матриц Дирака. Подробности расчета приведены в [171]. В результате имеем

$$|H|_{\mu}^2 = 4 G_W^2 c^4 \frac{(p_e p_{\nu_{\mu}})(p_{\mu} p_{\nu_e})}{\epsilon_e \epsilon_{\nu_{\mu}} \epsilon_{\mu} \epsilon_{\nu_e}} (2\pi \hbar)^3 \delta \left(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda} \right), \quad (18.43)$$

где скалярное произведение определено в (18.10). Подставив (18.43) в (18.31), проведем интегрирование по импульсам для распада мюона в вакууме при $f_e = f_{\nu_e} = f_{\nu_{\mu}} = 0$ в (18.7). Следуя [171], проинтегрируем сначала по импульсам нейтрино ν_{μ} и ν_e , вычисляя интеграл

$$\begin{aligned} I_{ik} &= \int \frac{p_{\nu_{\mu}} i p_{\nu_e, k}}{\epsilon_{\nu_{\mu}} \epsilon_{\nu_e}} \delta(\vec{p}_{\nu_{\mu}} + \vec{p}_{\nu_e} - \vec{q}) \delta(\epsilon_{\nu_{\mu}} + \epsilon_{\nu_e} - c q_0) \times \\ &\times d^3 p_{\nu_{\mu}} d^3 p_{\nu_e}, \quad q_j = p_{\mu, j} - p_{e, j}. \end{aligned} \quad (18.44)$$

Для частиц нулевой массы с $p_i^2 = 0$ имеет место равенство [171]

$$\int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q}) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - c q_0) = \frac{2\pi}{c^3}. \quad (18.45)$$

Представив I_{ik} в виде

$$I_{ik} = A q^2 \delta_{ik} + B q_i q_k \quad (18.46)$$

и учтя равенства

$$I_{ik} \delta_{ik} = \pi \frac{q^2}{c^3}, \quad I_{ik} q_i q_k = \frac{\pi q^4}{2c^3}, \quad (18.47)$$

*) После интегрирования по $d^3 x$ с учетом (18.33) в (18.32) появляется сомножитель $(2\pi \hbar)^3 \delta \left(\sum_{\lambda} \vec{p}_{\lambda} \right)$, отражающий сохранение импульса. Вторая δ -функция, возникающая при возведении в квадрат, дает нормировочный объем, который сокращается в выражении для вероятности распада [172]. Здесь учтено, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = 2\pi \delta(k)$.

получим*)

$$I_{ik} = \frac{\pi}{6c^3} (q^2 \delta_{ik} + 2q_i q_k). \quad (18.48)$$

Используя (18.48), (18.43), (18.44), получим из (18.31)

$$W_\mu = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{4G_W^2 c^4}{(2\pi\hbar)^6} \frac{\pi}{6c^3} \int \frac{p_{ei} p_{\mu k}}{\epsilon_e \epsilon_\mu} (q^2 \delta_{ik} + 2q_i q_k) d^3 p_e. \quad (18.49)$$

Пренебрегая электронной массой по сравнению с мюонной $p_e^2 \approx 0$ и рассматривая мюон в состоянии покоя ($p_\mu = (0, m_\mu c)$), получим с учетом (18.10)

$$\begin{aligned} q_i &= p_{\mu i} - p_{ei} = \left(\vec{p}_e, m_\mu c - \frac{\epsilon_e}{c} \right), \\ q^2 &= (m_\mu c)^2 - 2m_\mu \epsilon_e, \\ p_{ei} p_{\mu i} &= p_{ei} q_i = m_\mu \epsilon_e, \\ p_{\mu i} q_i &= m_\mu c \left(m_\mu c - \frac{\epsilon_e}{c} \right). \end{aligned} \quad (18.50)$$

Учтя (18.50) в (18.49), получим

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{cG_W^2}{3(2\pi)^4 \hbar^7} \int [3(m_\mu c)^2 - 4m_\mu \epsilon_e] \frac{d^3 p_e}{c^2} = \\ &= \frac{G_W^2}{3(2\pi)^4 \hbar^7 c^4} 4\pi \int_0^{m_\mu c^2/2} [3(m_\mu c)^2 - 4m_\mu \epsilon_e] \epsilon_e^2 d\epsilon_e = \frac{G_W^2 m_\mu^5 c^4}{192\pi^3 \hbar^7}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Используя экспериментальное время жизни мюона $\frac{1}{W_\mu} = \tau_\mu \approx 2,1971 \cdot 10^{-6}$ с,

получаем из (18.51) с учетом (18.3) значение слабой константы

$$G_W = \left[\frac{192\pi^3 \hbar^7}{m_\mu^5 \tau_\mu c^4} \right]^{1/2} = 1,4357 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3, \quad (18.52)$$

приведенное в (18.28).

г) Вычисление $|H|_\beta^2$ и вероятности распада нейтрона и ядер. При бета-распадах $q \ll m_\nu$, поэтому в (18.21) можно пренебречь формфакторами f_2 и g_3 из (18.23), (18.25) и использовать значения f_1 и g_1 из (18.22), (18.24) при $q = 0$: $f_1(0) = 1$, $g_1(0) = g_A = 1,25$. Рассмотрим сначала распад нейтрона. В этом случае нейтрон и протон являются свободными частицами, их волновые функции аналогичны лептонным (18.33), (18.35).

Матричный элемент распада нейтрона запишется в виде**)

$$H_n = \sum_\sigma \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int [\bar{\psi}_p \gamma_i (1 + g_A \gamma_5) \psi_n] [\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\nu] d^3 x. \quad (18.53)$$

*) Вычисления (18.45), (18.47) ведутся в системе координат, где $\vec{p}_\mu = -\vec{p}_e$ с учетом $p_{\nu\mu} + p_{\nu e} = q$, $p_{\nu\mu}^2 = p_{\nu e}^2 = 0$.

**) Константы β и μ распадов обозначаются одной и той же буквой G_W .

С большой точностью нуклоны можно считать нерелятивистскими, тогда в соответствующих биспинорах типа (18.35), отличающихся на $\sqrt{2}$, останутся по два ненулевых компонента

$$\bar{u}_p = (\sqrt{m_p c} W_p^+, 0), \quad u_n = \begin{pmatrix} \sqrt{m_n c} W_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18.54)$$

где W_p и W_n — спиноры, аналогичные W_e из (18.37)*. Нерелятивистские пределы элементов адронного тока $j_{a,i}$ с учетом (18.9), (18.36), (18.54) имеют вид

$$\bar{u}_p \gamma_4 u_n = c \sqrt{m_n m_p} W_p^+ W_n, \quad (18.55)$$

$$\bar{u}_p \vec{\gamma} u_n = 0,$$

$$\bar{u}_p \gamma_4 \gamma_5 u_n = 0, \quad (18.56)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_p \vec{\gamma} \gamma_5 u_n &= c \sqrt{m_p m_n} (W_p^+, 0) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_n \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -W_p^+ \vec{\sigma} W_n c \sqrt{m_p m_n}. \end{aligned}$$

Для квадрата матричного элемента (18.53) получаем [171]

$$\begin{aligned} |H|_n^2 &= \sum_{\sigma} \frac{G_W^2 c^2}{32 \epsilon_\nu \epsilon_e} \{ |(W_p^+ W_n)(\bar{u}_e \gamma_4 (1 + \gamma_5) u_\nu)|^2 + \\ &+ g_A^2 |(W_p^+ \vec{\sigma} W_n)(\bar{u}_e \vec{\gamma} (1 + \gamma_5) u_\nu)|^2 \} (2\pi\hbar)^3 \delta(\Sigma \vec{p}_\lambda). \end{aligned} \quad (18.57)$$

Матрица плотности неполяризованного протона есть сумма по спиновым состояниям

$$\sum_{\sigma} u_p \bar{u}_p = \sum_{\sigma} m c W_p W_p^+ = \Lambda_p = m c \gamma_4 + m c I = 2 m c \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18.58)$$

а для нейтрона после усреднения по спинам имеем

$$\sum'_{\sigma} u_n \bar{u}_n = \sum'_{\sigma} m c W_n W_n^+ = \frac{1}{2} \Lambda_n = m c \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.59)$$

Здесь Σ' означает усреднение по спиновым состояниям. Подставляя (18.38), (18.58), (18.59) в (18.57) и вычисляя следы произведений γ и σ матриц, получаем [171]**)

$$|M|_n^2 = G_W^2 \left[(1 + 3g_A^2) + \frac{c^2 \vec{p}_e \vec{p}_\nu}{\epsilon_e \epsilon_\nu} (1 - g_A^2) \right]. \quad (18.60)$$

Отметим, что после замены $p_\mu \Rightarrow p_n$, $p_{\nu\mu} \Rightarrow p_p$ в нерелятивистском пределе для n и p (18.43) соответствует с (18.60) при $g_A = 1$, когда $|M|^2 = 4G_W^2$. Подставляя (18.60), (18.57) в (18.6), пренебрегая отдачей ядра и интегри-

*) С нормировкой $W_p^+ W_p = 2$, $W_n^+ W_n = 2$.

**) $|M|^2$ отличается от $|H|^2$ отсутствием сомножителя $(2\pi\hbar)^3 \delta(\Sigma \vec{p}_\lambda)$, см. (18.57).

руя по углам, получим

$$W_n = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M|^2_n \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\epsilon_e + \epsilon_\nu - \Delta_{np}) p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu. \quad (18.61)$$

Второй член из (18.60) не входит в (18.61), так как зануляется после интегрирования по углам в импульсном пространстве *). Учтя $p_\nu = \epsilon_\nu/c$,

$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4}$, имеем из (18.61)

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{G_W^2 (1 + 3g_A^2)}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} \int_{m_e c^2}^{\Delta} \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4} (\Delta - \epsilon_e)^2 \epsilon_e d\epsilon_e = \\ &= \frac{G_W^2 (1 + 3g_A^2) m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_1^{\delta} \sqrt{u^2 - 1} (\delta - u)^2 u du, \\ u &= \epsilon_e / m_e c^2, \quad \delta = \Delta / m_e c^2 = 2,531. \end{aligned} \quad (18.62)$$

Подынтегральная функция в (18.62) определяет спектр электронов при бета-распаде нейтрона. Интеграл в (18.62) берется аналитически и называется функцией Ферми без учета кулоновского взаимодействия F_0

$$\begin{aligned} F_0(u) &= \int_1^u \sqrt{x^2 - 1} (\delta - x)^2 dx = \frac{1}{60} \sqrt{u^2 - 1} [12u^4 - 30u^3 \delta + \\ &+ 4(5\delta^2 - 1)u^2 + 15u\delta - 4(5\delta^2 + 2)] + \frac{\delta}{4} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \end{aligned} \quad (18.63)$$

$$F_0(\delta) = F_0 = \frac{1}{60} \sqrt{\delta^2 - 1} (2\delta^4 - 9\delta^2 - 8) + \frac{1}{4} \delta \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}).$$

Период полураспада нейтрона $t_{1/2}$ есть

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{W_n}. \quad (18.64)$$

Величина

$$(F t_{1/2})_n = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{G_W^2 (1 + 3g_A^2) m_e^5 c^4} \approx 1083^{**}) \quad (18.65)$$

*) Если при бета-взаимодействии барионы или массивные лептоны являются нерелятивистскими, то

$$|M|^2 = G_W^2 (\tilde{g}_V^2 + 3\tilde{g}_A^2 + \text{н.ч.}) g_V^2 (1 + \delta_{mm'})^2 \quad (18.60a)$$

при

$$H = \frac{G_W}{\sqrt{2}} \int [g_V \bar{\psi}_\nu \gamma_4 (1 + \gamma_5) \psi_{\nu'}] \cdot [\bar{\psi}_m \gamma_i (\tilde{g}_V + \tilde{g}_A \gamma_5) \psi_{m'}] (1 + \delta_{mm'}) d^3x,$$

где m — барионы, массивные лептоны, н.ч. — члены, обращающиеся в нуль после усреднения для неполяризованных частиц. Запись H в виде (18.60a) всегда возможна с учетом (18.39).

**) Здесь использовано бета-распадное G_W из (18.28) и значение $g_A = 1,25$, полученное усреднением результатов различных опытов. Экспериментальное значение $(F t_{1/2})_n$ для распада нейтрона, равное 1187, требует несколько меньшей постоянной $g_A = 1,18$ [232].

зависит только от физических констант и постоянной части матричного элемента взаимодействия, не зависит от фазовых соотношений и находится экспериментально измерением периода полураспада $t_{1/2}$ и вычислением функции Ферми F .

При бета-распаде нейтрона нейтрон и протон расположены в одной точке, так что происходит полное перекрытие волновых функций и достигается максимум $|H|^2$. Это соответствует равенству $\int_{V_n} \psi_n + \psi_p d^3x = 1$

в (18.27). Если происходит бета-распад ядер, где нуклоны нельзя считать свободными, то волновые функции нейтрона и протона перекрываются не полностью и $(Ft_{1/2})_{A,Z}$ обычно больше $(Ft_{1/2})_n$. Иногда $(Ft_{1/2})_{A,Z}$ оказывается меньше $(Ft_{1/2})_n$ (табл. 20). Это объясняется тем, что в бета-распаде ядра может принимать участие несколько нейтронов, поэтому, например, $(Ft_{1/2})_{^6\text{He}} < (Ft_{1/2})_n$ несмотря на неполное перекрытие n и p волновых функций; здесь участие в бета-распаде принимают два нейтрона ядра ^6He , расположенных на второй нейтронной оболочке. Измерения $(Ft_{1/2})_{A,Z}$ служат источником информации о волновых функциях нуклонов внутри ядер.

д) Классификация бета-распадов, правила отбора. Степень перекрытия волновых функций ядра до и после бета-распада определяется в основном соотношением между спинами и четностями этих ядер. Подробное объяснение причин такой зависимости можно найти в специальной литературе [213, 171, 69, 230, 86, 84], мы ограничимся здесь изложением результатов и их качественной интерпретацией.

Если экспоненциальные множители в волновых функциях лептонов заменяются единицей, то это означает, что лептонная пара не уносит орбитальный угловой момент. При этом унесенный ею суммарный спин

Таблица 20

Данные о некоторых сверхразрешенных переходах

Переход	Спин	$t_{1/2}$, с	E_{max} , кэВ	$Ft_{1/2}$, с
$^1_0\text{n} \rightarrow ^1_1\text{H}$	1/2	11,7 мин	782	1187
$^3_1\text{H} \rightarrow ^3_2\text{He}$	1/2	$3,87 \cdot 10^8$	18,65	1132
$^{11}_6\text{C} \rightarrow ^{11}_5\text{B}$	3/2	1224	968	4030
$^{13}_7\text{N} \rightarrow ^{13}_6\text{C}$	1/2	603	1202	4700
$^{15}_8\text{O} \rightarrow ^{15}_7\text{N}$	1/2	124	1739	4475
$^{17}_9\text{F} \rightarrow ^{17}_8\text{O}$	5/2	66	1748	2380
$^{23}_{12}\text{Mg} \rightarrow ^{23}_{11}\text{Na}$	3/2	12	3056	4480
$^{25}_{13}\text{Al} \rightarrow ^{25}_{12}\text{Mg}$	5/2	7,23	3239	4280
$^{27}_{14}\text{Si} \rightarrow ^{27}_{13}\text{Al}$	5/2	4,19	3793	4500
$^{35}_{16}\text{Ar} \rightarrow ^{35}_{15}\text{Cl}$	3/2	1,804	4448	5680
$^{41}_{21}\text{Sc} \rightarrow ^{41}_{20}\text{Ca}$	7/2	0,87	4940	2560
$^6_2\text{He} \rightarrow ^6_3\text{Li}$	$0 \rightarrow 1$	0,813	3500	808
$^{10}_6\text{C} \rightarrow ^{10}_5\text{B}^*$	$0 \rightarrow 1$	19,1	2100	1700
$^{18}_{10}\text{Ne} \rightarrow ^{18}_9\text{F}$	$0 \rightarrow 1$	1,6	3200	794,4
$^{52}_{25}\text{Mn} \rightarrow ^{52}_{24}\text{Cr}$	$1 \rightarrow 0$	0,2857	6609	3082
$^{54}_{27}\text{Co} \rightarrow ^{54}_{26}\text{Fe}$	$1 \rightarrow 0$	0,1937	7229	2966

$$E_{\text{max}} = \Delta - m_e c^2$$

равен либо нулю, либо единице со знаком "+" или "-"). Векторный член (V) в токе $j_{l,l}$ из (18.20) не равен нулю, если входящие в него лептоны имеют одинаковые спины, для бета распада это соответствует суммарному нулевому спину электрона и антинейтрино. Таким образом V -взаимодействие, введенное Ферми, требует неизменности ядерного спина I , а также четности ядра. Таким образом, правило отбора Ферми имеет вид

$$|\Delta I| = 0, |\Delta I| = 0, \text{ четность сохраняется.} \quad (18.66)$$

Псевдовекторное A -взаимодействие в (18.20), введенное Гамовым и Теллером (1936 г.), меняет спины ядер, т.е. сумма спинов лептонов при бета-распаде равна единице. При этом величина спина ядра может измениться на единицу, но может остаться постоянной по модулю, изменив лишь направление, с тем чтобы единице равнялась их векторная разность. Последнее возможно только в случае ненулевого спина исходного ядра. Таким образом, правила отбора Гамова-Теллера имеют вид

$$\left. \begin{aligned} |\Delta I| &= \pm 1, \quad |\Delta I| = 1, \\ |\Delta I| &= 0, \text{ если } I \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{ четность сохраняется.} \quad (18.67)$$

При выполнении правил отбора (18.66), (18.67) величина $Ft_{1/2}$ определяется степенью перекрытия волновых функций. Если перекрытие велико, как при распаде нейтрона, то такой переход называется *сверхразрешенным*. Ему соответствуют значения $\lg (Ft_{1/2}) = 3.5 \pm 0.7$ [84], см. табл. 19. Эти переходы встречаются только в сравнительно легких ядрах. К ним относятся зеркальные переходы в нечетно-четных ядрах, где число нейтронов-протонов исходного ядра равно числу протонов-нейтронов ядра конечного, например, позитронный распад ${}^1_9\text{F}_8 \rightarrow {}^1_8\text{O}_9$. Другой тип сверхразрешенных переходов встречается в четных ядрах с $A = 4n + 2$, где в распадах участвуют два нейтрона на внешней оболочке. К ним относится рассмотренный выше переход ${}^6_2\text{H}_4 \rightarrow {}^6_3\text{Li}_3$. Позитронные распады в зеркальных ядрах связаны с энергией кулоновского отталкивания протонов в ядре.

Переходы с существенно большими $\lg (Ft_{1/2}) = 5.7 \pm 2$, для которых выполняются указанные выше правила отбора, называются *разрешенными*. Разрешенные и сверхразрешенные переходы характеризуются формой спектра электронов, определяемой подынтегральным выражением в (18.62) (о влиянии кулоновских поправок см. ниже).

Если правила отбора (18.66), (18.67) не выполняются, то бета-распады ядер происходят только за счет отклонения внутри ядра экспоненты волновых функций лептонов от единицы, что эквивалентно уносу орбитального момента лептонной парой. При этом в выражении для вероятности перехода возникает малый множитель

$$(R_n/\lambda_l)^2 \approx 10^{-3} \div 10^{-4}, \quad (18.68)$$

где R_n — размер ядра, $\lambda_l = \frac{\hbar}{p_l}$ — характерный размер периода лептонной

*) В единицах $\hbar$.

волновой функции. Переходы, связанные с первым членом разложения экспоненты, называются однократно запрещенными с $\lg(Ft_{1/2}) = 7,5 \pm 2$. Лептонная пара здесь уносит помимо спинов, единственный орбитальный угловой момент. Правила отбора для этих переходов таковы:

$$\Delta|I| = 0, \pm 1, \text{ четность меняется,} \quad (\Phi) \quad (18.69)$$

$$|\Delta I| = 1, \text{ переходы } 0 \rightarrow 0 \text{ запрещены.}$$

$$\Delta|I| = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ четность меняется,} \quad (\Gamma-T) \quad (18.70)$$

$$|\Delta I| = 0, 2, \text{ переходы с } |I_1| + |I_2| < 2 \text{ запрещены для } |\Delta I| = 2.$$

Если изменение спина превышает на единицу степень запрещения, то такой переход называется уникальным. Для перехода с $\Delta I = \pm 2$ в (18.70) имеет место $\lg(Ft_{1/2}) = 8,5 \pm 1$. Спектры электронов в однократно запрещенных переходах определяются произведением подынтегрального выражения в (18.62) на сомножитель [23]

$$(p_e + p_\nu)^2 \sim p_e^2 + p_\nu^2 \sim (u^2 - 1) + (\delta - u)^2. \quad (18.71)$$

Релятивистские эффекты и кулоновское поле приводят к смещению состояний $p_{1/2}$ и $s_{1/2}$ с $j = 1/2$ на величину $\sim \alpha Z$. Это приводит к тому, что наряду со вторым членом разложения экспоненты $\sim \frac{1}{\hbar} p_e R_n$ вклад в матричный элемент дает постоянное значение лептонной волновой функции с малостью $\sim \alpha Z$. При этом вероятность распада приобретает малость $\sim \alpha^2 Z^2$, а спектр электронов при $|\Delta I| = 0, \pm 1$ остается близким к разрешенному.

Матричные элементы n -кратно запрещенных переходов определяются n -м членом разложения лептонной экспоненты со следующими правилами отбора:

$$\Delta|I| = 0, \pm 1, \dots \pm n \quad (\Phi);$$

$$|\Delta I| = n, \text{ переходы с } |I_1| + |I_2| < n \text{ запрещены;}$$

$$\Delta|I| = 0, \pm 1, \dots \pm n, \pm(n+1) \quad (\Gamma-T); \quad (18.72)$$

$$|\Delta I| = n \pm 1, \text{ где переходы с } |I_1| + |I_2| < n \pm 1 \text{ запрещены,}$$

$$\text{четность } \pi_2 = (-1)^n \pi_1.$$

Здесь при $\pi_2 = \pi_1$ четность сохраняется, $\pi_2 = -\pi_1$ — изменяется. Каждая степень запрещения увеличивает $Ft_{1/2}$ на 3–4 порядка. Данные об известных бета-переходах ядер приведены в [99].

е) Кулоновские поправки. Кулоновское взаимодействие между ядрами и заряженными лептонами приводит к отклонениям волновой функции распределения от свободной, что увеличивает вероятность электронного распада ядер за счет увеличения волновой функции электрона в ядре и, соответственно, уменьшает вероятность позитронного распада. Правочный множитель кулоновского взаимодействия $\Phi(Z, \epsilon)$ находится аналогично кулоновскому подбарьерному множителю в ядерных реакци-

ях (см. гл. 4). Для нерелятивистских электронов и позитронов $e^\mp$ имеем

$$\Phi_{\mp}(Z, \epsilon) = \frac{|\psi_e(0)|^2}{|\psi_e(0)|_{\text{своб}}^2} = \frac{2\pi\eta}{|\exp(\mp 2\pi\eta) - 1|},$$

$$\eta = \frac{Ze^2}{\hbar v} = \alpha Z \frac{c}{v}. \quad (18.73)$$

Здесь Z заряд конечного ядра, для релятивистских $e^\mp$ функций $\frac{v}{c} \Phi_{\mp} = \frac{pc}{\epsilon} \Phi_{\mp} = 2\pi\alpha Z (\Phi_{\mp}/2\pi\eta)$ затабулированы (см. [363]). Учет кулоновского

взаимодействия в бета-распаде ядра сводится к умножению подынтегрального выражения на $\Phi_{\mp}(Z, \epsilon)$ при вычислении функции Ферми F , что дает для разрешенных переходов

$$F_{\mp} = 2\pi\alpha Z \left\langle \frac{\Phi_{\mp}}{2\pi\eta} \right\rangle \left(\frac{\delta^5}{30} - \frac{\delta^2}{3} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{5} \right). \quad (18.74)$$

Интегрирование с учетом таблиц для $Z = 26$ дает $\langle \Phi_{-}/2\pi\eta \rangle = 1,6$, $\langle \Phi_{+}/2\pi\eta \rangle = 0,5$, причем в таблицах электронный сомножитель меняется на $\sim 10\%$, а позитронный — на $\sim 50\%$ в интервале энергий $e^\mp$, дающих основной вклад в скорость бета-распада [93]. Отметим, что кулоновские поправки существенно меняют спектр бета-электронов при малых энергиях, но их влияние на скорость бета-распада не столь велико, поэтому в астрофизических расчетах этой поправкой часто пренебрегают и используют функцию Ферми F_0 .

ж) **Нейтральные токи.** В лептонных токах типа (18.20), описывающих распады лептонов и ядер, а также в адронном токе (18.21), входящем в вероятность бета-распада, заряды начальной и конечной частицы различны, поэтому такие токи называются заряженными. Возможность существования нейтральных токов с одинаковыми зарядами начальной и конечной частиц была высказана Бладманом в 1958 г., однако лишь после создания теории Вайнберга—Салама в 1967 г., объединяющей слабые и электромагнитные взаимодействия, и экспериментального открытия рассеяния мюонного нейтрино на электроне в 1973 г. существование нейтральных токов стало общепризнанным [231]. Ввиду того что электрон, мюон и тау-лептон с соответствующими нейтрино обладают различными сохраняющимися лептонными зарядами, нейтральные токи могут лишь переводить частицы самих в себя. Например, сечение реакции рассеяния

$$\nu_e + \nu_\mu \rightarrow \nu_e + \nu_\mu \quad (18.75)$$

определяется только произведением токов $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_{\nu_\mu} O_i \psi_{\nu_\mu})$, а токи вида $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_{\nu_\mu})$ отсутствуют. В некоторые процессы, например рассеяние

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e, \quad (18.76)$$

дают вклад как заряженные токи $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_e)(\bar{\psi}_e O_i \psi_{\nu_e})$, так и нейтральные $(\bar{\psi}_{\nu_e} O_i \psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_e O_i \psi_e)$. В то же время сечение рассеяния

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e \quad (18.77)$$

определяется только нейтральными токами $(\bar{\psi}_{\nu\mu} O_i \psi_{\nu\mu})(\bar{\psi}_e O_i \psi_e)$, так как заряженные токи $(\bar{\psi}_{\nu\mu} O_i \psi_e)$ или $(\bar{\psi}_e O_i \psi_{\nu\mu})$ отсутствуют ввиду различных лептонных зарядов мюонного нейтрино и электрона.

Из теории Вайнберга—Салама, подтвержденной экспериментами, следует, что нейтральные токи создаются не только левым оператором $O_i^L = \gamma_i (1 + \gamma_5)$, соответствующим $(V - A)$ -взаимодействию, но и правым оператором $O_i^R = \gamma_i (1 - \gamma_5)$, отражающим вклад $(V + A)$ -взаимодействия. Другой особенностью нейтральных токов является их зависимость от зарядов элементарных частиц, поэтому универсальность слабого взаимодействия следует понимать здесь в обобщенном смысле. Нейтральные токи для лептонов и кварков имеют вид [172]

$$\begin{aligned} j_i^{(n)} &= \sum_{\lambda} [g_L^{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\lambda} + g_R^{\lambda} \bar{\psi}_{\lambda} \gamma_i (1 - \gamma_5) \psi_{\lambda}], \\ g_L^{\lambda} &= 1/2, \quad g_R^{\lambda} = 0 \text{ для } \lambda = \nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}; \quad g_L^{\lambda} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \\ g_R^{\lambda} &= \sin^2 \theta_W \text{ для } \lambda = e, \mu, \tau; \quad g_L^{\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \\ g_R^{\lambda} &= -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \text{ для } \lambda = u, c, t \text{ (кварки)}; \quad g_L^{\lambda} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W, \\ g_R^{\lambda} &= \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \text{ для } \lambda = d, s, b \text{ (кварки)}. \end{aligned} \quad (18.78)$$

Здесь θ_W — угол Вайнберга, отражающий перемешивание слабых и электромагнитных взаимодействий. Член с $\sin^2 \theta_W$ в $j_i^{(n)}$ является чисто векторным, как j_i^{em} в электродинамике. Из экспериментов следует [120]

$$\sin^2 \theta_W = 0,224 \pm 0,020. \quad (18.79)$$

Нейтральные токи нуклонов*) получают суммированием кварковых токов и учетом формфакторов типа (18.22) — (18.25). Для малых переданных импульсов имеем (см., например [73])

$$\begin{aligned} j_{p,i}^{(n)} &= \bar{\psi}_p \left[\frac{1}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta_W) \gamma_i + \frac{1}{2} g_A \gamma_i \gamma_5 \right] \psi_p = \\ &= \bar{\psi}_p \left[\frac{1}{2} \gamma_i (1 + g_A \gamma_5) - 2 \sin^2 \theta_W \gamma_i \right] \psi_p, \\ j_{n,i}^{(n)} &= -\frac{1}{2} \bar{\psi}_n \gamma_i (1 + g_A \gamma_5) \psi_n. \end{aligned} \quad (18.80)$$

При написании матричного элемента следует учесть, что прямой и обратный переходы реакций, описываемых нейтральными токами (18.75) — (18.77) тождественны. Вследствие этого произведение неодинаковых токов входят в матричный элемент с коэффициентом 2 [172, 231]. Произведение одинаковых токов входит единожды, так как тождественность

*) Кварковая структура нуклонов имеет вид

$p = uud, \quad n = udd, \quad Q_u = Q_c = Q_t = 2/3,$

$Q_d = Q_s = Q_b = -1/3$ в единицах e .

прямой и обратной реакции компенсируется коэффициентом $1/2$ из-за тождественности вступающих в реакцию частиц, например, при рассеянии $\nu_e + \nu_e \rightarrow \nu_e + \nu_e$. Отметим, что произведение заряженных токов реакции (18.76) входит в матричный элемент также единожды, так как снова возникает коэффициент $1/2$ из-за тождественности токов в этом произведении [172]. В итоге, матричный элемент, соответствующий бета-реакции, связанной с нейтральными токами, записывается в виде

$$H^{(n)} = \sum_{\sigma} \int \frac{G_W}{\sqrt{2}} \frac{2}{1 + \delta_{\lambda 0}} j_{\lambda, i}^{(n)} j_{0, i}^{(n)} d^3 x. \quad (18.81)$$

Если в реакцию с нейтральными токами вступают ядра, то необходимо интегрирование по объему ядра, аналогично (18.27).

В реакциях рассеяния вместо вероятности W удобнее использовать сечение σ . Дифференциальные величины связаны соотношением $dW = j d\sigma$, где j — плотность потока частиц. В лабораторной системе, где частица 0 покоится, а частица 1 налетает со скоростью v_1 , имеет место, в силу выбранной нормировки волновых функций, $j = v_1$. Если выразить величины в лабораторной системе через инвариантные

$$\begin{aligned} m_0 c^2 \epsilon_1 v_1 &= m_0 c^4 |\vec{p}_1| = c^3 \sqrt{(p_0 p_1)^2 - p_0^2 p_1^2} = \\ &= c^3 \sqrt{(p_0 p_1)^2 - m_0^2 m_1^2 c^4}, \end{aligned}$$

то с учетом выражения для W типа (18.6), (18.31) или (18.61) получим [172] сечение рассеяния частиц 0 и 1 (2 и 3 — частицы после рассеяния)

$$\sigma_B = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 |H|_{01}^2 d\phi}{c^3 \sqrt{(p_0 p_1)^2 - m_0^2 m_1^2 c^4}}, \quad (18.82)$$

$$d\phi = \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi\hbar)^6} \delta\left(\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}\right) (1 - f_2)(1 - f_3).$$

Здесь $d\phi$ — элемент фазового объема рассеянных частиц с включением δ -функций от энергии. Сечение поглощения записывается аналогично (18.82) при соответствующем выборе $d\phi$. Отметим, что статстические веса здесь, так же как в (18.7), не входят в определение $d\phi$ ввиду суммирования по спинам в матричном элементе.

Рассмотрим сечения некоторых процессов. Для рассеяния нейтрино на лептонах квадрат матричного элемента заряженного тока получается из (18.43) простой заменой переменных. Интегрирование в (18.82) при $f_2 = f_3 = 0$ приводит к следующим выражениям для инвариантных сечений, связанных с заряженными токами [172]:

$$\sigma_{\nu_e}^{(ch)} = \sigma_{s0} \frac{s_{\nu_e}^2}{s_{\nu_e} + 1/2} = \begin{cases} \sigma_{s0} s_{\nu_e} & \text{при } s_{\nu_e} \gg 1 \\ 2 \sigma_{s0} s_{\nu_e}^2 & \text{при } s_{\nu_e} \ll 1, \end{cases} \quad (18.83)$$

$$\sigma_{\bar{\nu}_e}^{(ch)} = \frac{1}{3} \sigma_{s0} s_{\nu_e}^- [1 - (1 + 2s_{\nu_e}^-)^{-3}] \approx \begin{cases} \frac{1}{3} \sigma_{s0} s_{\nu_e}^- & \text{при } s_{\nu_e}^- \gg 1 \\ 2 \sigma_{s0} s_{\nu_e}^2 & \text{при } s_{\nu_e}^- \ll 1. \end{cases} \quad (18.84)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_{s0} &= \frac{2G_W^2 m_e^2}{\pi \hbar^4} = 0,876 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 \\ s_{\nu_e} &= u_e u_{\nu_e} - \vec{\pi}_e \vec{\pi}_{\nu_e}, \quad s_{\tilde{\nu}_e} = u_e u_{\tilde{\nu}_e} - \vec{\pi}_e \vec{\pi}_{\tilde{\nu}_e}, \\ u_e &= \epsilon_e / m_e c^2, \quad u_{\nu_e} = \epsilon_{\nu_e} / m_e c^2, \quad u_{\tilde{\nu}_e} = \epsilon_{\tilde{\nu}_e} / m_e c^2, \\ \vec{\pi}_e &= \vec{p}_e / m_e c, \quad \vec{\pi}_{\nu_e} = \vec{p}_{\nu_e} / m_e c, \quad \vec{\pi}_{\tilde{\nu}_e} = \vec{p}_{\tilde{\nu}_e} / m_e c. \end{aligned} \quad (18.85)$$

В системе покоя электрона ($u_e = 1$, $\vec{\pi}_e = 0$) имеем

$$s_{\nu_e} = u_{\nu_e}, \quad s_{\tilde{\nu}_e} = u_{\tilde{\nu}_e}. \quad (18.86)$$

Отметим, что при малых энергиях $\sigma_{e^- \nu_e}^{(\text{ch})} = \sigma_{e^- \tilde{\nu}_e}^{(\text{ch})}$, а при больших $\sigma_{e^- \nu_e}^{(\text{ch})} = 3 \sigma_{e^- \tilde{\nu}_e}^{(\text{ch})}$

Вычисления, аналогичные тем, что проведены в п. в, с использованием (18.78)–(18.81) дают значение матричного элемента, соответствующего нейтральным токам. Полное сечение рассеяния согласно [172, 86] равно

$$\sigma_{ev}^{\text{tot}} \sim |H^{(\text{ch})} + H^{(n)}|^2, \quad (18.87)$$

$$\sigma_{e^- \nu_e}^{\text{tot}} = d_{\nu_e} \sigma_{e^- \nu_e}^{(\text{ch})}, \quad \sigma_{e^- \tilde{\nu}_e}^{\text{tot}} = d_{\tilde{\nu}_e} \sigma_{e^- \tilde{\nu}_e}^{(\text{ch})},$$

$$\left. \begin{aligned} d_{\nu_e} &= \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{3} \sin^4 \theta_W \approx 0,541 \\ d_{\tilde{\nu}_e} &= \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + 3 \sin^4 \theta_W \approx 0,675 \end{aligned} \right\} \text{ при } s_{\nu_e}, s_{\tilde{\nu}_e} \gg 1, \quad (18.88)$$

$$d_{\nu_e} = d_{\tilde{\nu}_e} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 \right] \approx 0,412 \text{ при } s_{\nu_e}, s_{\tilde{\nu}_e} \ll 1.$$

Здесь учтено (18.79), учет нейтральных токов уменьшает сечение рассеяния, ввиду их отрицательного вклада в матричный элемент. Рассеяние ($e^- \nu_\mu$) в реакции (18.77) связано только с нейтральными токами и имеет сечение [172, 86]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{e^- \nu_\mu} &= d_{\nu_\mu} \sigma_{e^- \nu_\mu}^{(\text{ch})}, \quad \sigma_{e^- \tilde{\nu}_\mu} = d_{\tilde{\nu}_\mu} \sigma_{e^- \tilde{\nu}_\mu}^{(\text{ch})}, \\ d_{\nu_\mu} &= \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{3} \sin^4 \theta_W \approx 0,093 \\ d_{\tilde{\nu}_\mu} &= \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + 3 \sin^4 \theta_W \approx 0,227 \end{aligned} \right\} \text{ при } s_{\nu_\mu}, s_{\tilde{\nu}_\mu} \gg 1, \quad (18.89)$$

$$d_{\nu_\mu} = d_{\tilde{\nu}_\mu} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 \right] \approx 0,188 \text{ при } s_{\nu_\mu}, s_{\tilde{\nu}_\mu} \ll 1.$$

В (18.89) $\sigma_{e^- \nu_\mu}^{(\text{ch})}$ зависит от u_{ν_μ} вместо u_{ν_e} (см. (18.85)). Как видно из (18.89), сечение ($e^- \nu_\mu$)-рассеяния примерно в пять раз меньше, чем ($e^- \nu_e$)-рассеяния.

Интересным эффектом, связанным с нейтральными токами, является когерентное упругое рассеяние нейтрино на ядрах, амплитуда которого растет линейно, а сечение квадратично с массой ядра. Проведенный в [73] расчет дает для полного сечения рассеяния (с учетом аксиального тока, см. (18.60a) и (18.80))*)

$$\sigma_{N\nu} = \frac{1}{2} \sigma_{s0} u_\nu^2 \left\{ \left[A \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \theta_W) (N - Z) \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} g_A^2 (N - Z)^2 \xi_J \right\} \approx \sigma_{s0} u_\nu^2 \left[0,025 \left(A + \frac{N - Z}{0,81 A} \right)^2 + \xi_J \cdot 0,586 (N - Z)^2 \right]. \quad (18.90)$$

Здесь учтено (18.79), $g_A = 1,25$, $\xi_J \approx 0,1$ при $J = 1/2$, $\xi_J \ll 1$ при $J \neq 1/2$, $\xi_J = 1$ для нуклонов. Для нерелятивистских ядер $\sigma_{N\nu} = \sigma_{N\nu}^{\text{нр}}$, как для электронов в (18.83), (18.84). Отметим, что для векторного тока рассеяние определяется s -волной, поэтому интеграл в (18.27) имеет максимальное значение, как при распаде нейтрона. При $J \neq 1/2$ в аксиальном переходе вклад в упругое рассеяние начинается с p -волны и всегда $\xi_0 \ll 1$. При $J = 1/2$ и наличии одиночного (без пары) нуклона на внешней ядерной оболочке возможно рассеяние s -волной с поворотом спина нуклона, когда $\xi_J \sim 0,1$.

3) О теории Вайнберга–Салама. Теория универсального слабого взаимодействия (УСВ), несмотря на хорошее согласие с экспериментами по бета-распаду ядер и распадам многих элементарных частиц, встречается с принципиальными трудностями при переходе к высоким энергиям. Все расчеты в этой теории делаются в первом порядке по теории возмущений. При высоких энергиях сечение слабого взаимодействия растет (см. (18.83)) и при $E \gtrsim 100$ ГэВ в системе центра масс становится необходимым учет более высоких порядков. При этом появляются расходимости, которые не удастся обойти, как в квантовой электродинамике, с помощью перенормировок. Преодоление данной трудности и построение перенормируемой теории слабых взаимодействий было сделано С. Вайнбергом и А. Саламом в 1967 г. Их теория объединила электромагнитные и слабые взаимодействия и потому называется электрослабой.

В теории УСВ рассматривается четырехфермионное точечное взаимодействие, для которого перенормируемость отсутствует. По аналогии с электродинамикой было предположено, что носителем слабого взаимодействия является векторный бозон W , который в силу малого радиуса слабого взаимодействия должен быть массивным с $M_W > 10$ ГэВ [172]. Однако теории взаимодействия с массивными бозонами также являются перенормируемыми.

Для преодоления этой трудности было предположено, что векторные бозоны – носители взаимодействия, изначально являются безмассовыми. Та видимая масса, которой они должны сейчас обладать, приобретена ими в результате спонтанного нарушения симметрии при взаимодействии поля векторных бозонов с существующим независимо скалярным полем φ . Потенциал скалярного поля симметричен, но имеет минимумы при ненуле-

*) Используется (18.60a) для суммы вкладов от Z протонов и $N = A - Z$ нейтронов.

вых значениях $\varphi = \pm \varphi_0$. Симметрия спонтанно нарушается, когда поле переходит в один из минимумов с ненулевым вакуумным средним $\varphi = \varphi_0$. Член взаимодействия бозонного векторного поля D_i с полем φ , имеющий вид $d\varphi D_i D_i$ (d — константа взаимодействия), вблизи $\varphi = \varphi_0$ ведет себя так, как будто бозоны обладают массой m_D , т.е. $m_D^2 = \frac{1}{2} d\varphi_0$. Эта масса интер-

претируется, как масса покоя бозонов D_i . Такой механизм спонтанного нарушения симметрии и приобретения массы был предложен П. Хиггсом в 1964 г. Если масса приобретается механизмом Хиггса, то становится возможным построение перенормируемой теории с тяжелыми бозонами на основе взаимодействий, обладающих локальной калибровочной инвариантностью и рассмотренных Ц. Янгом и Р. Миллсом в 1954 г. Данный тип взаимодействия и рассматривается в теории Вайнберга—Салама. Теми же свойствами обладает квантовая хромодинамика — создаваемая сейчас теория сильных взаимодействий, а также различные варианты единых теорий, объединяющих три или четыре (включая гравитацию) взаимодействия. Помимо векторных бозонов, массу при спонтанном нарушении симметрии приобретают также скалярные бозоны хиггсовского поля.

Условие калибровочной инвариантности, связанное с необходимостью перенормируемости теории, требует наличия четырех промежуточных бозонов, т.е. помимо фотона, $W^\pm$ -бозонов необходимо предположить существование нейтрального бозона Z , который будет ответственен за слабые нейтральные токи.

Рассмотрим, как строится лагранжиан электрослабой теории [86]. Помимо обычного пространства, вводится слабое изоспиновое пространство, в котором матрицы $\vec{\tau}$, тождественно равные матрицам Паули $\vec{\sigma}$ из (18.36), являются матрицами вращений в изоспиновом пространстве. Вместо спиноров ν_e и e рассматривается изотопический дублет

$$L = \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad (18.91)$$

и изотопический синглет *)

$$R = \frac{1 - \gamma_5}{2} e, \quad (18.92)$$

изотопические компоненты которых взаимодействуют с матрицами $\vec{\tau}$ как обычные спиноры и скаляры с матрицами Паули $\vec{\sigma}$. Слабый ток j_l и чисто векторный электромагнитный ток j_{em} выражаются через $L, R, \vec{\tau}$ в виде

$$j_l^- = \bar{e} \gamma_i (1 + \gamma_5) \nu_e = 2 \bar{L} \gamma_i \tau_- L, \\ j_l^+ = \bar{\nu}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) e = 2 \bar{L} \gamma_i \tau_+ L, \quad (18.93)$$

$$j_{em} = \bar{e} \gamma_i e = \frac{1}{2} (\bar{L} \gamma_i L - \bar{L} \gamma_i \tau_3 L) + \bar{R} \gamma_i R.$$

Здесь

$$\bar{L} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_e \bar{e}) (1 - \gamma_5), \quad \bar{R} = \frac{1}{2} \bar{e} (1 + \gamma_5) \quad (18.94)$$

*) В этом разделе e и ν_e означают соответствующие биспинорные волновые функции и используется система единиц с $\hbar = c = 1$.

означают величины, дираковски сопряженные относительно обычных спиноров аналогично (18.18), матрицы $\tau_{\pm}$ равны

$$2\tau_- = \tau_1 - i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2\tau_+ = \tau_1 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.95)$$

Компоненты токов в (18.93) объединяются в изовектор $\bar{L} \gamma_i \vec{\tau} L$

$$\text{и} \quad \text{изоскаляр} \quad \frac{1}{2} (\bar{L} \gamma_i L) + \bar{R} \gamma_i R. \quad (18.96)$$

Четыре векторных бозона также образуют в изоспиновом пространстве изовектор $\vec{C}_i$ и изоскаляр B_i , где i — векторный индекс. Лагранжиан взаимодействия лептонов с векторными бозонами, инвариантный относительно вращений в изоспиновом пространстве, имеет вид (калибровочно инвариантный) *)

$$\mathcal{L}_1 = \frac{g}{2} \bar{L} \gamma_i \vec{\tau} L \vec{C}_i + g' \left(\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_i L + \bar{R} \gamma_i R \right) B_i, \quad (18.97)$$

где g и g' — независимые константы связи. В обычной записи (без изопространства) $\mathcal{L}_1$ должен содержать члены типа $j_{l,i}^{\pm} W_{i,i}^{\pm}, j_{l,i}^n Z_i$ и $j_{em,i} A_i$, где A_i — вектор электромагнитного поля (фотон). Из сопоставления (18.93) и (18.97) видно, что $W^{\pm}, Z$ и A_i представляют собой следующие линейные комбинации $\vec{C}_i$ и B_i :

$$W_i^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_i^{(1)} \pm i C_i^{(2)}). \quad (18.98)$$

$$C_i^{(3)} = \cos \theta_W Z_i - \sin \theta_W A_i, \quad B_i = \sin \theta_W Z_i + \cos \theta_W A_i.$$

Учтя (18.93) и (18.98) в (18.97), получим $\mathcal{L}_1$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \frac{g}{2\sqrt{2}} (j_{l,i}^- W_i^- + j_{l,i}^+ W_i^+) + \\ & + \left[\cos \theta_W \frac{g}{2} \bar{L} \gamma_i \tau_3 L + \sin \theta_W g' \left(\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_i L + \bar{R} \gamma_i R \right) \right] Z_i + \\ & + \left[\cos \theta_W g' \left(\frac{1}{2} \bar{L} \gamma_i L + \bar{R} \gamma_i R \right) - \sin \theta_W \frac{g}{2} \bar{L} \gamma_i \tau_3 L \right] A_i. \end{aligned} \quad (18.99)$$

Для того чтобы коэффициент при A_i был электромагнитным током j_{em} из (18.93) и входил в лагранжиан с константой связи e (заряд электрона), нужно, чтобы

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \sqrt{4\pi}. \quad (18.100)$$

*) В теории возмущений вероятности слабых распадов и сечения слабых процессов определяются матричным элементом перехода от одного из слагаемых лагранжиана [144].

С учетом (18.100) коэффициент перед Z_i , пропорциональный слабым нейтральным токам, примет вид

$$\frac{g}{4 \cos \theta_W} [\bar{\nu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \nu - \bar{e} \gamma_i (1 - 4 \sin^2 \theta_W + \gamma_5) e]. \quad (18.101)$$

Очевидно, что из (18.101) следует структура лептонных нейтральных токов, приведенная в (18.78).

Для построения калибровочно инвариантного лагранжиана хиггсовского поля его волновая функция φ должна представлять собой скалярный изодублет, одна компонента которого может быть взята нулем:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\varphi}^0 \end{pmatrix}. \quad (18.102)$$

Простейший потенциал $V(\varphi)$, приводящий к спонтанному нарушению симметрии, и соответствующий вклад в лагранжиан имеют вид

$$\mathfrak{L}_2 = -V(\varphi) = \mu^2 |\varphi|^2 - h |\varphi|^4, \quad |\varphi|^2 = |\varphi^+|^2 + |\varphi^0|^2. \quad (18.103)$$

Минимум потенциала находится в точке

$$|\varphi|_{\min} = \lambda / \sqrt{2} = \sqrt{\mu^2 / 2h}. \quad (18.104)$$

Представив

$$\tilde{\varphi}^0 = \lambda + \chi, \quad (18.105)$$

получаем $\mathfrak{L}_2$, опуская постоянные члены, в виде

$$\mathfrak{L}_2 = -h\lambda^2 \chi^2 - h\lambda \chi^3 - \frac{h}{4} \chi^4. \quad (18.106)$$

Для массивных скаляров вклад массового члена в лагранжиан равен $-m^2 \chi^2 / 2$. Сопоставляя это с (18.106), получаем, что в результате спонтанного нарушения симметрии частицы хиггсовского поля приобретают массу

$$m_\chi = \lambda \sqrt{2h}. \quad (18.107)$$

Взаимодействию хиггсовского поля с векторными бозонами отвечает лагранжиан $\mathfrak{L}_3$, который в калибровочно инвариантной форме имеет вид

$$\mathfrak{L}_3 = \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{C}_i + i \frac{g'}{2} B_i \right) \varphi \right|^2 \quad (18.108)$$

Учтя здесь (18.98), (18.102)–(18.105), получаем, что в $\mathfrak{L}_3$ отсутствует фотон A_i :

$$\mathfrak{L}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{g^2}{4} \left(W_i^\dagger W_i + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_W} Z_i Z_i \right) (\lambda^2 + 2\lambda\chi + \chi^2). \quad (18.109)$$

Для векторных массивных изосинглета Z_i и изодублета $W_i^\pm$ вклад массовых членов в лагранжиан равен $\frac{1}{2} m_Z^2 Z_i Z_i + m_W^2 W_i^\dagger W_i$. Сопоставляя с (18.109), получаем, что эффективные массы бозонов равны

$$m_W = \frac{g\lambda}{2}, \quad m_Z = \frac{g\lambda}{2 \cos \theta_W} = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (18.110)$$

Для того чтобы масса электрона также приобреталась из-за спонтанного нарушения симметрии, в лагранжиан вводится инвариантный член*)

$$\mathcal{L}_4 = \frac{f}{\sqrt{2}} (\bar{R} \varphi^\dagger L + \bar{L} \varphi R), \quad (18.111)$$

который, с учетом (18.91) – (18.94), (18.102), принимает вид

$$\mathcal{L}_4 = \frac{f\lambda}{2} \left(1 + \frac{\chi}{\lambda}\right) \bar{e} e. \quad (18.112)$$

Массовый член электрона, как компонента спинорного изодублета в лагранжиане равен $m_e \bar{e} e$, что из сопоставления с (18.112) дает

$$m_e = \frac{f\lambda}{2}. \quad (18.113)$$

При малых энергиях $\epsilon \ll m_W$ лагранжиан взаимодействия (18.99) может привести к виду теории УСВ [86]. При этом константа слабого взаимодействия выражается через константы лагранжиана (18.99) в виде

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \quad (18.114)$$

с учетом (18.100) и (18.110) имеем

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{4\pi e^2}{8m_W^2 \sin^2 \theta_W}. \quad (18.115)$$

Из (18.115) и (18.110) с учетом (18.79) следуют оценки массы

$$m_W = \left(\frac{4\pi e^2}{4\sqrt{2} G_W \sin^2 \theta_W} \right)^{1/2} \approx 78,8 \text{ ГэВ},$$

$$m_Z = \left(\frac{4\pi e^2}{4\sqrt{2} G_W \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \right)^{1/2} \approx 89,5 \text{ ГэВ}. \quad (18.116)$$

Фотоны A_μ в силу (18.109) и нейтрино в силу (18.102) в данном варианте теории оказываются безмассовыми, но масса нейтрино может быть приобретена, если в теорию добавить правый нейтринный синглет $R_\nu = \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu$

аналогично (18.92), и лагранжиан его взаимодействия с хиггсовским полем (18.102) аналогично (18.111) (см. [172]). Полный лагранжиан электро-слабых взаимодействий лептонов с учетом (18.97), (18.103), (18.108), (18.111) или в другой записи (18.99), (18.106), (18.109), (18.112) имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{(b)} + \sum_l (\mathcal{L}_0^{(l)} + \mathcal{L}_1^{(l)} + \mathcal{L}_2^{(l)} + \mathcal{L}_3^{(l)} + \mathcal{L}_4^{(l)}), \quad (18.117)$$

*) Здесь $\dagger$ означает эрмитовски сопряженный дублет в пространстве слабого изоспина.

где $\Omega_0^{(b)}$ соответствует свободным векторным бозонам [86]

$$\begin{aligned}\Omega_0^{(b)} &= \frac{1}{4} \vec{C}_{ik} \vec{C}_{ik} + \frac{1}{4} B_{ik} B_{ik}, \\ \vec{C}_{ik} &= \frac{\partial \vec{C}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \vec{C}_k}{\partial x_i} + g [\vec{C}_i \times \vec{C}_k], \\ \vec{B}_{ik} &= \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_i},\end{aligned}\quad (18.118)$$

$\Omega_0^{(l)}$ — свободным лептонам [86]

$$\Omega_0^{(l)} = i\bar{R} \gamma_i \frac{\partial R}{\partial x_i} + i\bar{L} \gamma_i \frac{\partial L}{\partial x_i}. \quad (18.119)$$

Суммирование в (18.117) осуществляется по трем сортам лептонов.

Слабое взаимодействие с адронами включается в теорию Вайнберга—Салама через кварки. Шесть кварков разделяются на три левых дублета, например $\frac{1+\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, типа (18.91) и каждому кварку соответствует правый синглет типа (18.92), например $\frac{1-\gamma_5}{2} u$ и $\frac{1-\gamma_5}{2} d$, так как все

кварки являются заряженными и массивными. Лагранжиан взаимодействия Ω_6 слабого кваркового тока с векторными бозонами $\vec{C}_i$ и B_i строится аналогично Ω_1 из (18.99) инвариантным в изотопическом пространстве и также разделяется на заряженный и нейтральный слабые токи и электромагнитный ток. Усложнение по сравнению с лептонными токами состоит в том, что нужно учесть возможность слабых переходов между кварками не только внутри каждого дублета, но и между дублетами. Это достигается введением двух углов смешивания, первый из которых, определяющий переходы с изменением странности, называется углом Кабибо (см. конец п. б). Введение смешивания не нарушает перенормируемости теории и не вносит принципиальных трудностей. Смешивание, приводящее к превращению различных типов нейтрино друг в друга, также может быть введено в теорию [544а]. Структура кварковых и адронных слабых нейтральных токов (18.78) и (18.80) определяется структурой лагранжиана Ω_6 , аналогично лагранжиану Ω_1 для лептонов.

Требования калибровочной инвариантности, накладываемые на лагранжиан, в сочетании с экспериментальными ограничениями привели к предсказанию в 1970 г. существования четвертого кварка, который был открыт в 1974 г., и шестого кварка, который не наблюдался до сих пор.

Отметим, что для условий, реализующихся в звездах с $\epsilon \leq 100$ МэВ дополнительный вклад теории Вайнберга—Салама, по сравнению с теорией УСВ состоит в установлении существования и вида нейтральных токов, играющих существенную роль на поздних стадиях эволюции и, особенно, при взрывах сверхновых.

Задача 1. Доказать, что V_i из (18.19) является вектором.

Решение. Согласно [17, 230], преобразование Лоренца для дираковски сопряженного спинора $\bar{\psi}$ из (18.18) есть

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}.$$

Тогда преобразование V_i с учетом (18.11), (18.14) имеет вид

$$\begin{aligned} V'_i &= (\bar{\psi} \gamma_i \psi)' = \bar{\psi} S^{-1} \gamma_i S \psi = \bar{\psi} L_{ik} \gamma_k \psi = \\ &= L_{ik} \bar{\psi} \gamma_k \psi = L_{ik} V_k. \end{aligned}$$

Таким образом матрица преобразований V_i совпадает с лоренцевской для вектора (18.12), что доказывает его векторную природу.

Задача 2. Найти сечение захвата стабильным ядром (A, Z) электрона с энергией ϵ_e , считая $(Ft_{1/2})_{Z-1}$ известным, а переход разрешенным.

Решение. Вероятность распада ядра $(A, Z-1)$, согласно (18.61) равна

$$\begin{aligned} W_{Z-1}^{\text{расп}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int |M|_{Z-1}^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\epsilon_e + \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= \frac{|M|_{Z-1}^2}{2\pi^3 \hbar^7} m_e^5 c^4 F_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $|M|_{Z-1}^2 = \text{const}$, F_0 определено в (18.63). Вероятность захвата ядром (A, Z) электрона $W_Z^{\text{захв}}$ с энергией ϵ_e при концентрации n_e по аналогии с (1) равна

$$\begin{aligned} W_Z^{\text{захв}} &= \frac{2\pi}{\hbar} n_e \int |M|_Z^2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\epsilon_e - \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= \frac{n_e |M|_Z^2}{\pi \hbar^4 c^3} (\epsilon_e - \Delta_{Z-1, Z})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $|M|_Z^2 = \frac{1}{2} |M|_{Z-1}^2 g_{Z-1}/g_Z$ ввиду усреднения по спинам электронов в (2) вместо суммирования в (1) и возможной разницы статистических весов начального и конечного ядра. Находя $(Ft_{1/2})_{Z-1}$ из (1) с учетом (18.64) и подставляя в (2), получаем

$$W_Z^{\text{захв}} = \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \pi^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{n_e \ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{(\epsilon_e - \Delta_{Z-1, Z})^2}{(m_e c^2)^2}. \quad (3)$$

Сечение захвата электрона ядром, согласно (18.82) с учетом (18.62) равно

$$\begin{aligned} \sigma_e^{\text{захв}} &= \frac{W_Z^{\text{захв}}}{n_e v_e} = \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{\pi^2}{c} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{(\epsilon_e - \Delta_{Z-1, Z})^2}{(m_e c^2)^2 \sqrt{1 - (m_e c^2/\epsilon_e)^2}} = \\ &= \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{1,313 \cdot 10^{-41}}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{(u_e - \delta)^2}{\sqrt{1 - u_e^{-2}}} \quad (\text{см}^2), \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_e = \epsilon_e/m_e c^2, \quad \delta = \Delta_{Z-1, Z}/m_e c^2, \quad u_e > \delta > 1.$$

При $0 \leq \delta \leq 1$ ядро $(A, Z-1)$ стабильно относительно излучения e^- , но ядро (A, Z) может захватить покоящийся электрон (К-захват) [212]. Для этого случая (3), (4) неприменимы, так как бета-распад ядра $(A, Z-1)$ отсутствует.

Задача 3. Найти вероятность захвата электрона ядром с атомной К-орбиты.

Решение. Размер К-оболочки атома равен $\frac{a_0}{Z} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 Z}$ (см. § 4, п. ж),

а средняя плотность электронов внутри заполненной К-оболочки с двумя электронами есть $\bar{n}_e = \frac{3}{2\pi} \frac{Z^3}{a_0^3}$. При расчете вероятности К-захвата нужно

учесть $n_e(0) = \frac{4}{3} \bar{n}_e = \frac{2}{\pi} \frac{Z^3}{a_0^3}$ [84]. Используя это в (2) задачи 2 получим

$$W_Z^K = \frac{2|M|_Z^2}{\pi^2} (\alpha Z)^3 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \frac{m_e^2 c}{\hbar^4} (u_e - \delta)^2 =$$

$$= 2 \frac{|M|_Z^2}{|M|_n^2} \frac{G_W^2 (1+3g_A^2)}{\pi^2} (\alpha Z)^3 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \frac{m_e^2 c}{\hbar^4} (u_e - \delta)^2 \quad (c^{-1}),$$

$\delta < u_e \lesssim 1$ для связанного электрона.

Задача 4. Найти вероятность захвата электрона ядром (A, Z) в вырожденном веществе с плотностью ρ .

Решение (Франк-Каменецкий, 1962 [216]). В вырожденном веществе при $f_e = 1$ при $\epsilon_e < \epsilon_{Fe} + m_e c^2$ (см. (2.2)) вероятность захвата электрона определяется аналогично (2) задачи 2 формулой

$$W_Z^B = \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{2\pi}{\hbar} \int |M|_{Z-1}^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \delta(\epsilon_e - \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) p_\nu^2 dp_\nu p_e^2 dp_e =$$

$$= \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{|M|_{Z-1}^2}{2\pi^3 \hbar^7} m_e^5 c^4 [F_0(u_{Fe}) - F_0(\delta)] =$$

$$= \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \ln 2 \frac{F_0(u_{Fe}) - F_0(\delta)}{(F_{1/2})_{Z-1}}, \quad u_{Fe} = (\epsilon_{Fe}/m_e c^2) + 1. \quad (1)$$

Здесь $F_0(u)$ определено в (18.68). При $u_{Fe} \gg \delta$ приближенно получаем

$$W_Z \approx \frac{g_{Z-1}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(F_{1/2})_{Z-1}} (u_{Fe}^5 - \delta^5). \quad (2)$$

Задача 5. Найти полную вероятность захвата вырожденных электронов ядром в газовой модели с учетом возбужденных уровней конечного ядра.

Решение [54]. Ядро представляется в виде однородной сферы радиуса

$$R = \frac{e^2}{2 m_e c^2} A^{1/3} = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (1)$$

Граничные значения импульса Ферми протонов p_0 и нейтронов q_0 в ядре равны

$$p_0 = 3 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} m_e c \approx 417 \left(\frac{2Z}{A} \right)^{1/3} m_e c, \\ q_0 \approx 417 \left(\frac{2N}{A} \right)^{1/3} m_e c, \quad N = A - Z. \quad (2)$$

Вероятность захвата электрона в вырожденной плазме, после интегрирования по объему ядра V_n и фазовому объему dN_n равна

$$W_e = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 V_n \int dN_\nu dN_p dN_e \delta(E_e + E_p - E_\nu - E_n), \\ E_n = E_p + \frac{p_{ev}^2}{2m} + \frac{p_p p_{ev} z_p}{m}, \quad p_{ev} = |\vec{p}_e - \vec{p}_\nu|, \quad (3) \\ z_p = \cos(\vec{p}_{ev}, \vec{p}_p), \quad V_n = \frac{3Z}{8\pi} \left(\frac{2\pi\hbar}{p_0} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Здесь $m \approx m_p/2$ – эффективная масса нуклона в ядре, V_n – объем ядра, $|M|^2 = \text{const} < |M|_n^2$ из (18.60) – средний квадрат матричного элемента (рп) – перехода, просуммированный по спинам e, ν и n и усредненный по спинам p . Учитывая

$$dN_e = \frac{d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi p_e^2 dp_e dz_e}{(2\pi\hbar)^3}, \quad dN_\nu = \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi p_\nu^2 dp_\nu dz_\nu}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (4) \\ dN_p = 2 \frac{d^3 p_p}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{4\pi p_p^2 dp_p dz_p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad dN_n = \frac{d^3 p_n}{(2\pi\hbar)^3}$$

и интегрируя по азимутальным углам, получаем

$$W_e = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 2 \frac{(2\pi)^3}{(2\pi\hbar)^9} V_n \int p_e^2 dp_e dz_e p_\nu^2 dp_\nu dz_\nu p_p^2 \times \\ \times dp_p dz_p \delta(E_e - E_\nu - \frac{p_{ev}^2}{2m} - \frac{p_p p_{ev} z_p}{m}). \quad (5)$$

Найдем пределы интегрирования в (5). Очевидно, что

$$p_e \leq p_{Fe}, \quad p_p \leq p_0, \quad p_n \geq q_0. \quad (6)$$

Приближенно примем нуклоны нерелятивистскими, а электроны – ультрарелятивистскими. Для нахождения нижнего предела интегрирования

по dp_p запишем закон сохранения энергии в четырехфермионном процессе в виде

$$p_p^2 = p_n^2 - 2mc(p_e - p_\nu). \quad (7)$$

В силу условия $p_n > q_0$ получаем

$$p_p^2 > q_0^2 - 2mc(p_e - p_\nu) = p_1^2. \quad (8)$$

С другой стороны, из δ -функции в (5), связанной с законом сохранения энергии, следует

$$p_p = \frac{mc(p_e - p_\nu)}{p_{e\nu} z_p} - \frac{1}{2} \frac{p_{e\nu}}{z_p}. \quad (9)$$

Очевидно, что минимум p_p достигается при $z_p = 1$,

$$p_p > \frac{mc(p_e - p_\nu)}{p_{e\nu}} - \frac{p_{e\nu}}{2} = p_2. \quad (10)$$

При интегрировании по dp_p выбирается $\max(p_1, p_2)$. Интегрируя в (5) по $dz_p dp_p$ с учетом полученных пределов, имеем

$$W_e = \frac{4\pi}{\hbar} |M|^2 \frac{(2\pi)^3}{(2\pi\hbar)^9} V_n \int p_e^2 dp_e dz_e p_\nu^2 dp_\nu dz_\nu \frac{m}{2p_{e\nu}} \times$$

$$\times \begin{cases} (p_0^2 - p_1^2) & \text{при } p_1 > p_2 \\ (p_0^2 - p_2^2) & \text{при } p_1 < p_2 \end{cases} \quad (11)$$

Найдем теперь пределы интегрирования по $dz_\nu dp_\nu p_e$. Из (8), (10) следуют условия

$$p_1 < p_0 \quad \text{при} \quad p_\nu < p_{\nu 2}, \quad (12)$$

$$p_2 < p_0 \quad \text{при} \quad z_\nu < z_{\nu 0}, \quad (13)$$

где

$$z_\nu = \cos(\vec{p_e} \hat{p_\nu}),$$

$$p_{\nu 2} = p_e - (q_0^2 - p_0^2)/2mc,$$

$$z_{\nu 0} = (p_e^2 + p_\nu^2 - x_0^2)/2p_e p_\nu, \quad (14)$$

$$x_0 = \sqrt{p_0^2 + 2mc(p_e - p_\nu)} - p_0.$$

Найдем условия использования верхнего выражения в (11):

$$p_1 > p_2 \quad \text{при} \quad z_\nu < z_{\nu 1}, \quad (15)$$

где

$$z_{\nu 1} = (p_0^2 + p_\nu^2 - x_1^2)/2p_e p_\nu,$$

$$x_1 = q_0 - \sqrt{q_0^2 - 2mc(p_e - p_\nu)}. \quad (16)$$

Из (13), (15) следует неравенство

$$z_{\nu 1} < z_{\nu 0} \quad \text{при} \quad p_{\nu} < p_{\nu 2}, \quad (17)$$

выполняющееся при том же условии, что и (12). Очевидное условие $z_{\nu 1} > -1$ дает

$$z_{\nu 1} > -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} > p_{\nu 1}, \quad (18)$$

где

$$p_{\nu 1} = q_0 - p_e + mc - \sqrt{(q_0 + mc)^2 - 4mc p_e}. \quad (19)$$

Сопоставление (12), (17), (18) дает

$$p_{\nu 1} < p_{\nu 2} \quad \text{при} \quad p_e < p_{e1}, \quad (20)$$

где

$$p_{e1} = \frac{q_0 + p_0}{2} + \frac{q_0^2 - p_0^2}{4mc}. \quad (21)$$

Условие $z_{\nu 0} > -1$ дает

$$z_{\nu 0} > -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} > p_{\nu 0}, \quad (22)$$

где

$$p_{\nu 0} = [(mc + p_0)^2 + 4mc p_e]^{1/2} - p_e - p_0 - mc. \quad (23)$$

Из (17), (18), (22) следует

$$p_{\nu 1} > p_{\nu 0} \quad \text{при} \quad p_e > p_{e0}, \quad (24)$$

где

$$p_{e0} = \frac{q_0 - p_0}{2} + \frac{q_0^2 - p_0^2}{4mc}. \quad (25)$$

Верхнее соотношение (11) дает вклад в W_e при следующих пределах интегрирования:

$$p_{e0} < p_e < p_{e1}, \quad p_{\nu 1} < p_{\nu} < p_{\nu 2}, \quad -1 < z_{\nu} < z_{\nu 1} \quad (26)$$

Использование нижнего соотношения (11) требует

$$p_1 < p_2 \quad \text{при} \quad z_{\nu} > z_{\nu 1} \quad (27)$$

наряду с неравенствами (12) и (13). Следует различать два случая:

$$z_{\nu 1} > -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} > p_{\nu 1}, \quad \text{тогда} \quad z_{\nu} > z_{\nu 1} \quad (28)$$

$$\text{и} \quad z_{\nu 1} < -1 \quad \text{при} \quad p_{\nu} < p_{\nu 1}, \quad \text{тогда} \quad z_{\nu} > -1. \quad (29)$$

Из (28) и (13) следуют условия (17) и (20), остается справедливым также условие (24). Тогда при выполнении (28) используются следующие пределы интегрирования:

$$p_{e0} < p_e < p_{e1}, \quad p_{\nu 1} < p_{\nu} < p_{\nu 2}, \quad z_{\nu 1} < z_{\nu} < z_{\nu 0}. \quad (30)$$

Условие (29) при выполнении (12) приводит к двум вариантам:

$$p_{\nu 1} < p_{\nu 2} \quad \text{при} \quad p_e < p_{e1}, \quad \text{тогда} \quad p_{\nu} < p_{\nu 1}; \quad (31)$$

$$p_{\nu 1} > p_{\nu 2} \quad \text{при} \quad p_e > p_{e1}, \quad \text{тогда} \quad p_{\nu} < p_{\nu 2}. \quad (32)$$

При условии (31) справедливы неравенства (137), (22), (24), (29), из которых следуют пределы интегрирования

$$p_{e0} < p_e < p_{e1}, \quad p_{\nu 0} < p_\nu < p_{\nu 1}, \quad -1 < z_\nu < z_{\nu 0}. \quad (33)$$

Из условия (32) совместно с (22) следует неравенство

$$p_{\nu 2} > p_{\nu 0} \quad \text{при} \quad p_e > p_{e1}, \quad (34)$$

совпадающее с условием $p_{\nu 2} < p_{\nu 1}$. Условия (29), (32), (13), (22), (34), (6) приводят к следующим пределам интегрирования:

$$p_{e1} < p_e < p_{Fe}, \quad p_{\nu 0} < p_\nu < p_{\nu 2}, \quad -1 < z_\nu < z_{\nu 0}. \quad (35)$$

Очевидно, что $-1 < z_e < 1$. При $p_{Fe} > p_{e1}$ вероятность захвата (11) состоит из четырех интегралов: одного с верхним членом в (11) и пределами интегрирования (26) и трех с нижним членом в (11) и пределами интегрирования (30), (33), (35). При $p_{Fe} < p_{e1}$ интеграл с (35) выпадает, а в (26), (30), (33) нужно взять $p_e < p_{Fe}$ вместо $p_e < p_{e1}$. В общем виде W_e приведено в [54]. Для практически интересного случая

$$p_{\nu e}^2 \ll mc(p_e - p_\nu) \ll p_0^2, \quad q_0^2 \quad (36)$$

получаем

$$W_e = \frac{4\pi}{\hbar} \frac{(2\pi)^3}{(2\pi\hbar)^9} |M|^2 V_n m^2 c \frac{8mcq_0^2}{3(mc + q_0)^3} p_{K,e}^4 \varphi_e, \quad p_{K,e} = p_{Fe} - p_{e0}, \quad (37)$$

$$\varphi_e = \frac{1}{6} p_{K,e}^2 + \frac{1}{5} p_{e0} p_{K,e} \left(2 - \frac{q_0}{mc} \right) + \frac{1}{4} p_{e0}^2 \left(1 - \frac{q_0}{mc} \right),$$

$$p_{e0} = \frac{q_0^2 - p_0^2}{4} \left(\frac{1}{mc} + \frac{1}{q_0} \right).$$

Выражая $|M|^2$ через вероятность захвата мюона из K -оболочки, вычисленную в той же газовой модели ядра, получаем

$$W_e = W_\mu \frac{1}{2\pi} \left(\frac{137}{Z_e m_\mu c} \right)^3 \frac{Z}{Z_e} \frac{8mcq_0^2}{3(mc + q_0)^3} \frac{p_{K,e}^4}{p_{K,\mu}} \frac{\varphi_e}{\varphi_\mu}, \quad (38)$$

где

$$Z_e = Z [1 + (Z/42)^{1,47}]^{-1/1,47},$$

$$\begin{aligned} \varphi_\mu = & \frac{1}{3} p_{K,\mu}^2 + p_{\nu 1\mu} p_{K,\mu} + \frac{1}{2} (p_0^2 - m^2 c^2 + m m_\mu c^2) \frac{p_{\nu 1\mu}^2 - p_{\nu 0\mu}^2}{m c p_{K,\mu}} + \\ & + 2 m m_\mu c^2 \frac{p_{\nu 1\mu} - p_{\nu 0\mu}}{p_{K,\mu}} - \frac{p_{\nu 1\mu}^3 - p_{\nu 0\mu}^3}{3 p_{K,\mu}} - \frac{p_{\nu 1\mu}^4 - p_{\nu 0\mu}^4}{16 m c p_{K,\mu}} - \\ & - \frac{m m_\mu^2 c^3}{p_{K,\mu}} \ln \frac{p_{\nu 1\mu}}{p_{\nu 0\mu}}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$p_{K,\mu} = m_\mu c - (q_0^2 - p_0^2)/2mc - p_{\nu 1\mu},$$

$$p_{\nu 1\mu} = mc + q_0 - [(mc + q_0)^2 - 2 m m_\mu c^2]^{1/2},$$

$$p_{\nu 0\mu} = -mc - p_0 + [(mc + p_0)^2 + 2 m m_\mu c^2]^{1/2}.$$

Из (37) следует, что учет возбужденных состояний повышает степень зависимости W_e от p_{Fe} : $\sim p_{Fe}^6$ в (37) вместо $\sim p_{Fe}^5$ в задаче 4, при $p_{Fe} \gg (\delta m_{e\bar{e}}, p_{e0})$. Экспериментальные величины W_μ для различных ядер даны в [74]. Сравнение с расчетами по более сложной оболочечной модели ядра [73] показывает удовлетворительную точность формулы (38).

§ 19. Нейтринное охлаждение звезд

На всех стадиях эволюции вплоть до образования плотного ядра при коллапсе, нейтрино свободно уходят из звезды и являются источником охлаждения. Рассмотрим наиболее важные процессы образования нейтрино в звездах.

а) Аннигиляция пар $e^+ e^-$. При высоких температурах и небольших плотностях идет процесс рождения нейтрино при аннигиляции пар

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}. \quad (19.1)$$

Сечение реакции (19.1) определяется произведением заряженных токов $(\bar{\nu}^- O_i^L e^-)(\bar{e}^+ O_i^L e^+)$ и нейтральных $(\bar{e}^- O_i^{n,e} e^-)(\bar{\nu} O_i^{n,\nu} \nu)$. Здесь O_i^L — левый оператор из (18.20), а $O_i^{n,e}$ и $O_i^{n,\nu}$ приведены в (18.78). Последнее произведение дает вклад в сечение реакции (19.1) ввиду того, что рождение $\bar{e}^-$ эквивалентно уничтожению e^+ , а уничтожение ν — рождению $\bar{\nu}$. Сечение (19.1) за счет заряженных токов рассчитано в [268]. В [336] были учтены нейтральные токи типа $\bar{\nu}_e O_i \nu_e$, а в [496] сделан учет нейтральных токов, связанных со всеми типами нейтрино. Выражение для сечения, полученное в [496], с учетом (18.82) имеет вид

$$\sigma = \frac{G_W^2 c (m_e c / \hbar)^4}{6 \pi v \epsilon \epsilon'} \left| \frac{r_+ + r'_+}{2} \left[1 + 3 \frac{p_i p'_i}{m_e^2 c^2} + 2 \frac{(p_i p'_i)^2}{m_e^4 c^4} \right] + \right. \\ \left. + 3 \frac{r_- + r'_-}{2} \left(1 + \frac{p_i p'_i}{m_e^2 c^2} \right) \right| \text{см}^2, \quad (19.2)$$

Здесь $p_i, p'_i, \epsilon, \epsilon'$ — 4-импульсы и энергия электронов и позитронов, соответственно, v — относительная скорость e^+, e^- .

$$r_\pm = \frac{c_V^2 \pm c_A^2}{2}, \quad r'_\pm = n \frac{c_V'^2 \pm c_A'^2}{2}, \\ c_V = \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad c_A = 1/2, \\ c_V' = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad c_A' = -1/2. \quad (19.3)$$

Величины c_V и c_A соответствуют сумме заряженного и нейтрального токов, связанных с ν_e , а c_V' и c_A' отражают вклады нейтральных токов других сортов нейтрино, n — число сортов нейтрино, отличных от ν_e , сейчас известно $n = 2$ (см. (18.3)). Для заряженного тока [268] сечение получается из (19.2) при $r_+ = 1, r_- = 0$ и $n = 0$. Скорость потери энергии за счет реакции (19.1) есть

$$Q_{\text{pair}} = f(\epsilon + \epsilon') \sigma v dn_{e^-} - dn_{e^+}. \quad (19.4)$$

Здесь

$$dn_{e^{\pm}} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2 dp d\varphi \cos\theta d\varphi}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon \pm \mu_{te^{\pm}}}{kT}\right)} \quad (19.5)$$

определяется с учетом (2.2), (2.4), (2.11), но в отличие от (2.4) сохраняются угловые дифференциалы в импульсном пространстве. В (19.2) по спинам e^+ , e^- проведено усреднение, поэтому в (19.5) учтена двойка за счет статистического веса. Интегрируя в (19.4) с учетом (19.5), имеем [496]

$$\begin{aligned} Q_{\text{pair}} = & \frac{G_W^2}{18\pi^5 m_e c} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^{10} \{ (r_+ + r'_+) [5(G_0^- G_{-1/2}^+ + G_{-1/2}^- G_0^+) + \\ & + 7(G_0^- G_{1/2}^+ + G_{1/2}^- G_0^+) - 2(G_1^- G_{-1/2}^+ + G_{-1/2}^- G_1^+) + \\ & + 8(G_1^- G_{1/2}^+ + G_{1/2}^- G_1^+)] + (r_- + r'_-) [9(G_{1/2}^- G_0^+ + \\ & + G_0^- G_{1/2}^+ + G_0^- G_{-1/2}^+ + G_{-1/2}^- G_0^+)] \} \text{ (зрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}). \end{aligned} \quad (19.6)$$

Функции $G_n^{\pm}(\alpha, \beta)$ аналогичны интегралам (2.10) и имеют вид

$$G_n^{\pm}(\alpha, \beta) = \alpha^{-3-2n} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{2n+1} (x^2 - \alpha^2)^{1/2}}{1 + \exp(x \pm \beta)} dx. \quad (19.7)$$

Здесь $\alpha = m_e c^2 / kT$ и $\beta = \mu_{te} / kT$ определены в (2.8), $x = \epsilon / kT = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} / kT$. Асимптотические значения Q_{pair} даны в [268] для заряженных токов и в [336] с учетом нейтральных токов при $n = 0$. В случае $n \neq 0$ в различных пределах имеем для Q_{pair}

$$(c_V^2 + nc_V'^2) \frac{G_W^2}{\pi^4 m_e c} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^{10} \frac{1}{\alpha^3} e^{-2\alpha}, \quad \alpha \gg 1, \quad \beta \ll \alpha, \quad (\text{HРНВ})$$

$$(c_V^2 + nc_V'^2) \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi^3} \frac{G_W^2}{m_e c} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^7 \frac{1}{\alpha^{3/2}} \frac{\rho}{\mu_Z m_u} e^{-(\alpha+\beta)}, \quad \alpha \gg 1, \quad 1 + \alpha \ll \beta \ll 2\alpha, \quad (\text{НРВ})$$

$$(r_+ + r'_+) \frac{\sqrt{2\pi}}{10\pi^3} \frac{G_W^2}{m_e c} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^7 \frac{1}{\alpha^{3/2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{\rho}{\mu_Z m_u} e^{-(\alpha+\beta)}, \quad \alpha \gg 1, \quad \beta/\alpha \gg 1, \quad (\text{РВ})$$

(19.8)

$$(r_+ + r'_+) \frac{127,8}{\pi^5} \frac{G_W^2}{m_e c} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^{10} \frac{1}{\alpha^9}, \quad \alpha \ll 1, \quad \beta \ll 1, \quad (\text{РНВ})$$

(19.9)

$$(r_+ + r'_+) \frac{8}{5\pi^3} \frac{G_W^2}{m_e c} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^7 \frac{1}{\alpha^4} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{\rho}{\mu_Z m_u} e^{-\beta}, \quad \alpha \ll 1, \quad \beta \gg 1. \quad (\text{РВ})$$

Отличие первых сомножителей от единицы в (19.8) происходит за счет нейтральных токов. При выводе (19.8) разложения в (19.7) проводились с помощью формул, аналогичных (2.50), (2.51), (2.24), (2.40), (2.43), μ_Z — число нуклонов на один электрон из (2.17), (Н)Р — (не) релятивистский, (Н)В — (не) вырожденный случаи.

б) **Фоторождение нейтрино.** При низкой плотности и не очень высоком температуре $T \leq 4 \cdot 10^8$ К важным источником нейтрино является реакция

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}, \quad (19.9)$$

называемая фотонейтринной. Сечение этой реакции вычисляется значительно сложнее предыдущего и сводится к пятимерному интегралу, который вычисляется методом Монте-Карло [336, 496, 543, 562]. Интерполяционные формулы, составленные на основе этих расчетов в [268, 562] даны ниже. В предельных случаях фотонейтринные потери с учетом только заряженных токов определяются формулами [543, 185]

$$Q_{\text{photo}}^{\text{ch}} (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}) = \begin{cases} 0,976 \cdot 10^8 T_9^8 \rho / \mu_Z, & \alpha \gg 1, \beta \ll \alpha & (\text{HPHB}) \\ 4,851 \cdot 10^{11} T_9^9 (\rho / \mu_Z)^{1/3}, & \alpha \gg 1, 1 + \alpha \ll \beta \ll 2\alpha & (\text{HPB}) \\ 1,477 \cdot 10^{13} T_9^9 (\lg T_9 - 0,536), & \alpha \ll 1, \beta \ll 1 & (\text{PHB}) \\ 1,514 \cdot 10^{13} T_9^9, & \beta \gg 1, \beta / \alpha \gg 1. & (\text{PB}) \end{cases} \quad (19.10)$$

Нейтральные токи в предельных формулах можно учесть с помощью (19.28), (19.29).

в) **Плазменные нейтрино.** В плазме электромагнитные волны испытывают дисперсию и поглощение и называются плазмонами Г. Дисперсионное уравнение для плазмонов содержит член $\sim \hbar \omega_p$, эквивалентный энергии покоя, что допускает рождение нейтрино при распаде плазмона [185]

$$\Gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}. \quad (19.11)$$

В случае нерелятивистских невырожденных электронов электронная плазменная частота $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / m_e$ (см. (8.60)). В общем случае для поперечных (I) и продольных (I) плазмонов имеют место дисперсионные уравнения [268]

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + k^2 c^2 + \frac{1}{5} (\omega_1 / \omega)^2 k^2 c^2, & (I) \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \frac{3}{5} (\omega_1 / \omega)^2 k^2 c^2. & (I) \end{aligned} \quad (19.12)$$

Здесь k — волновой вектор. Соотношения (19.12) записаны без учета теплового движения электронов, члены с ω_1 определяют релятивистские поправки к плазменной частоте. Величины ω_0 и ω_1 равны

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar \omega_0}{m_e c^2} \right)^2 &= \frac{4e^2}{3\pi \hbar c} [2G_{-1/2}^+ + 2G_{-1/2}^- + G_{-3/2}^+ + G_{-3/2}^-], \\ \left(\frac{\hbar \omega_1}{m_e c^2} \right)^2 &= \frac{4e^2}{3\pi \hbar c} [2G_{-1/2}^+ + 2G_{-1/2}^- + G_{-3/2}^+ + G_{-3/2}^- - 3G_{-5/2}^+ - 3G_{-5/2}^-], \end{aligned} \quad (19.13)$$

где функции $G_n^\pm$ определены в (19.7). Потери энергии из-за реакции (19.11) для заряженных токов имеют вид [268]

$$Q_t^{\text{ch}} = A_0 \gamma^6 \alpha^{-9} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{x(x^2 - \gamma^2)^{1/2}}{e^x - 1} dx, \quad (19.14)$$

$$Q_l^{\text{ch}} = A_0 \gamma^9 \alpha^{-9} \left(\frac{5}{3} \right)^{7/2} \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^7 \int_1^a \frac{y^{10} (y^2 - a^2)^2 (y^2 - 1)^{1/2}}{e^{\gamma y} - 1} dy,$$

где

$$A_0 = \frac{G_W^2 c}{48 \pi^4 e^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^9 \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ (эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}), \quad (19.15)$$

$$\gamma = \frac{\hbar \omega_0}{kT}, \quad a^2 = 1 + \frac{3}{5} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2.$$

В предельных случаях имеем [268]

$$(\gamma/\alpha)^2 \equiv \left(\frac{\hbar \omega_0}{m_e c^2} \right)^2 \approx \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \approx 0,0031 \left(\frac{\epsilon_{Fe}}{m_e c^2} \right)^2 = \left(\frac{\rho/\mu_Z}{6,05 \cdot 10^9} \right)^{2/3} \text{ (PB)}$$

$$\text{при } \beta/\alpha \gg 1, \quad \alpha \ll 1 \quad (19.16)$$

$$\gamma^2 \equiv \left(\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right)^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\alpha} \left(\frac{\epsilon_{Fe}}{kT} \right)^{3/2} = \frac{\rho}{\mu_Z m_u} 4\pi \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \alpha^2 \text{ (HPB)}$$

$$\text{при } \alpha \ll \beta \ll 2\alpha, \quad \alpha \gg 1, \quad (19.17)$$

$$Q_i^{\text{ch}} = \begin{cases} A_0 \gamma^6 \alpha^{-9} 2\xi(3) & \text{при } \gamma \ll 1^*, \\ A_0 \gamma^6 \alpha^{-9} e^{-\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \gamma^{3/2} & \text{при } \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (19.18)$$

$$Q_i^{\text{ch}} = \begin{cases} A_0 \gamma^8 \alpha^{-9} \frac{4}{105} & \text{при } \gamma \ll 1, \\ A_0 \gamma^9 \alpha^{-9} (5/3)^{3/2} e^{-\gamma} \gamma^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} & \text{при } \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (19.19)$$

С учетом нейтральных токов (19.3) потери энергии за счет плазменных нейтрино равны [496]

$$Q_{\text{plasm}} = (c_V^2 + n c_V'^2) (Q_i^{\text{ch}} + Q_i^{\text{ch}}) \quad (19.20)$$

г) **Интерполяционные формулы.** Интерполяционные формулы для трех рассмотренных выше процессов потери энергии за счет рождения нейтрино получены для заряженных токов в [268] и с учетом нейтральных токов в [496]. Более детальные расчеты в [562] аппроксимируются интерполяционными формулами, причем

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{pair}} + Q_{\text{photo}} + Q_{\text{plasm}}. \quad (19.21)$$

Для всех видов потерь эти формулы записываются в виде

$$Q_d = K(\rho, \alpha) e^{-c\xi} \frac{a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2}{\xi^3 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + b_3 \alpha^3}. \quad (19.22)$$

При этом

$$K(\rho, \alpha) = g(\alpha) e^{-2\alpha} \quad \text{для } d = \text{pair}, \quad (19.23)$$

*) Здесь использовано равенство [145] $\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^x - 1} = \Gamma(\nu) \zeta(\nu)$, см. также (2.37).

где

$$g(\alpha) = 1 - \frac{13,04}{\alpha^2} + \frac{133,5}{\alpha^4} + \frac{1534}{\alpha^6} + \frac{918,6}{\alpha^8}; \quad (19.24)$$

$$K(\rho, \alpha) = (\rho/\mu_Z) \alpha^{-5} \quad \text{для} \quad d = \text{photo}; \quad (19.25)$$

$$K(\rho, \alpha) = (\rho/\mu_Z)^3 \quad \text{для} \quad d = \text{plasm}; \quad (19.26)$$

$$\xi = \left(\frac{\rho/\mu_Z}{10^9} \right)^{1/3} \alpha. \quad (19.27)$$

Коэффициенты c , a_i , b_i для различных d даны в табл. 21 из [562]. Формулы (19.22)–(19.27) аналогичны формулам работы [268] для заряженных токов. В предельных случаях учет нейтральных токов сводится к умножению результатов [268] на постоянный коэффициент. В нерелятивистском случае этот коэффициент D_a^{HP} есть

$$D_{\text{pair}}^{\text{HP}} = c_V^2 + nc_V'^2 = 0,925,$$

$$D_{\text{photo}}^{\text{HP}} = \frac{1}{6} (c_V^2 + nc_V'^2) + \frac{5}{6} (c_A^2 + nc_A'^2) = 0,7791, \quad (19.28)$$

$$D_{\text{plasm}}^{\text{HP}} = c_V^2 + nc_V'^2 = 0,925.$$

В ультрарелятивистском случае коэффициенты D_a^{P} равны

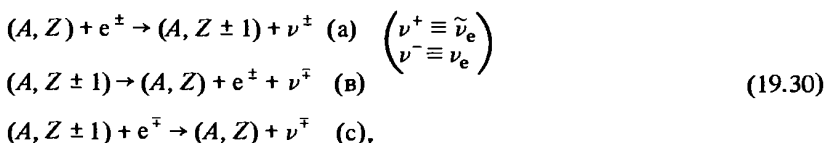
$$D_{\text{pair}}^{\text{P}} = \frac{1}{2} (c_V^2 + nc_V'^2 + c_A^2 + nc_A'^2) = 0,8375,$$

$$D_{\text{photo}}^{\text{P}} = \frac{1}{2} (c_V^2 + nc_V'^2 + c_A^2 + nc_A'^2) = 0,8375, \quad (19.29)$$

$$D_{\text{plasm}}^{\text{P}} = c_V^2 + nc_V'^2 = 0,925.$$

При этом для коэффициентов из (19.3) положено $\sin^2 \theta_W = 0,23$, $n = 2$. Коэффициенты (19.28), (19.29) можно использовать для учета нейтральных токов в (19.8), (19.10). Формулы (19.21)–(19.27) определяют нейтринные потери за счет указанных процессов в области $10 \leq \rho \leq 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $10^{8,2} \leq T \leq 10^{11} \text{ К}$ с точностью $\leq 20\%$ для всех видов потерь [562]. Интерполяционные формулы для Q_{pair} , дающие высокую точность в области больших температур, получены в [67].

д) Потери энергии за счет урка-процессов. При температуре $T \geq 10^9 \text{ К}$ важную роль в охлаждении начинают играть захваты $e^\pm$ ядрами и следующие за ними $e^\pm$ -распады и $e^\mp$ -захваты:



Реакции (19.30) с участием электронов впервые рассмотрены Г. Гамовым

Коэффициенты в формуле (19.22) из [562]

Процесс	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3	c
$10^8 \text{ K} < T < 10^{10} \text{ K}$							
пары (pair)	5,026 (19)	1,745 (20)	1,568 (21)	9,383 (-1)	-4,141 (-1)	5,829 (-2)	5,5924
фото (photo)	3,897 (10)	5,906 (10)	4,693 (10)	6,290 (-3)	7,483 (-3)	3,061 (-4)	1,5654
плазма (plasm)	2,146 (-7)	7,814 (-8)	1,653 (-8)	2,581 (-2)	1,734 (-2)	6,990 (-4)	0,56457
$10^{10} \text{ K} < T < 10^{11} \text{ K}$							
пары (pair)	5,026 (19)	1,745 (20)	1,568 (21)	1,2383	-8,1141 (-1)	0,0	4,9924
фото (photo)	3,897 (10)	5,906 (10)	4,693 (10)	6,290 (-3)	7,483 (-3)	3,061 (-4)	1,5654
плазма (plasm)	2,146 (-7)	7,814 (-8)	1,653 (-8)	2,581 (-2)	1,734 (-2)	6,990 (-4)	0,56457

и М. Шенбергом (1941) в качестве механизма охлаждения звезд. Идея пришла к ним в казино Де Урка в Рио-де-Жанейро, давшем название этому процессу. Реакции с участием позитронов в (19.30) были учтены позднее В.С. Пинаевым (1963). Скорости $e^\pm$ -захватов определяются интегралом (1) задачи 4 § 18, в котором нужно учесть дополнительный множитель f_e из (2.2). Аналогично скорости $e^\pm$ -распадов в веществе определяются интегралом (18.61) с дополнительным множителем $(1 - f_e)$.

Потери энергии за счет урка-процессов существенно зависят от ядерного состава вещества, который в свою очередь зависит от реакций (19.30). В общей самосогласованной постановке задачи в условиях ядерного равновесия состав определяется решением уравнений (3.3), (3.6). Выражения для скоростей потери энергии нейтрино отличаются от соответствующих скоростей реакций наличием в подинтегральных выражениях дополнительных сомножителей (см. (18.52)) $(\epsilon_e - \Delta_{Z'Z})$ для реакции (а), $(\Delta_{Z'Z} - \epsilon_e)$ для реакции (в) и $(\Delta_{Z'Z} + \epsilon_0)$ для реакции (с) из (19.30)*. Если считать известными значения $(Ft_{1/2})_{Z'}$ (см. (18.62)–(18.65) и задачи 2–4 к § 18) то вероятности реакций и скорости потери энергии на одно ядро можно представить в виде [85]

$$\begin{aligned}
 W^{(a)} &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^5 I_2, \\
 Q^{(a)} &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^6 m_e c^2 I_3,
 \end{aligned} \tag{19.31}$$

* Ядро (A, Z) считается стабильным, так что $\Delta_{Z'Z} > m_e c^2$.

$$W^{(b)} = \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^5 I'_2,$$

$$Q^{(b)} = \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^6 m_e c^2 I'_3,$$

$$W^{(c)} = \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^5 J_2,$$

$$Q^{(c)} = \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^6 m_e c^2 J_3.$$

При интегрировании по спектру $\epsilon^\pm$ значения энергии ϵ_e лежат в пределах

$$\Delta_{Z'Z} < \epsilon_e < \infty \quad (\text{a}),$$

$$m_e c^2 < \epsilon_e < \Delta_{Z'Z} \quad (\text{b}), \quad (19.32)$$

$$m_e c^2 < \epsilon_e < \infty \quad (\text{c}).$$

С учетом (19.32) интегралы в (19.31) имеют вид^{*})

$$I_k = \int_0^\infty \frac{x^k (x + x_0) \sqrt{(x + x_0)^2 - \alpha^2} dx}{1 + \exp(x + x_0 - \beta_\pm)}, \quad k = 2, 3$$

$$J_k = \int_0^\infty \frac{(x + x_0 + \alpha)^k (x + \alpha) \sqrt{x^2 + 2\alpha x} dx}{1 + \exp(x + \alpha - \beta_\pm)}, \quad k = 2, 3 \quad (19.33)$$

$$I'_k = \int_0^{x_0 - \alpha} \frac{(x_0 - \alpha - x)^k (x + \alpha) \sqrt{x^2 + 2\alpha x} dx}{1 + \exp(\beta_\pm - x - \alpha)}, \quad k = 2, 3.$$

Здесь

$$x_0 = \Delta_{Z'Z}/kT, \quad \beta_- \equiv \beta, \quad \beta_+ = -\beta, \quad \text{см. (2.11)} \quad (19.34)$$

В [85] выписаны аналитические выражения для I_k и J_k , полученные разложением в ряд подынтегральных выражений при $\alpha \ll x$. В общем случае I_k, J_k , а также I'_k могут вычисляться численно с помощью (2.57).

В [111] сделан приближенный расчет нейтринных урка-потерь, где вещество предполагалось состоящим из смеси нуклонов и железа, концентрация которых определяется уравнениями (3.3) и (3.5) с $\mu_\nu = 0$. Результирующая интерполяционная формула имеет вид [111]

$$Q_{\text{URCA}} = 1,3 \cdot 10^9 \rho \alpha(T) \Phi(x) T_9^6 \text{ зрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (19.35)$$

^{*}) Без учета кулоновских поправок.

где

$$\alpha(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } T_9 < 7 \\ 664,31 + 51,024(T_9 - 20) & \text{при } 7 < T_9 < 20 \\ 664,31 & \text{при } T_9 > 20, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lg x \leq -0,2 \\ -0,128334(\lg x)^2 - 0,036 \lg x + 0,997933 & \text{при } -0,2 \leq \lg x \leq 0,8 \\ -0,348 \lg x + 1,1654 & \text{при } 0,8 \leq \lg x \leq 2,3 \\ 0,0601682(\lg x)^2 - 0,543177 \lg x + 1,29602 & \text{при } 2,3 \leq \lg x \leq 4,2, \end{cases}$$

(19.36)

$$x = \frac{\pi^2}{m_p} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^3 \rho = 7,08595 \cdot 10^{-5} \frac{\rho}{T_9^3}.$$

В [168] аналогичные расчеты были проделаны с учетом большего числа сортов ядер в соответствии с [224]. Отличие от (19.36) имеет место при $\rho \sim 10^9$ г/см³ и $T_9 \leq 5$, где расчет [168] дает некоторое увеличение Q_{URCA} , связанное с бета-распадом ядер ^{55}Cr и ^{53}V , у которых $\epsilon_\beta = 2,6$ МэВ и 3,4 МэВ соответственно (см. (4.1)). Подробные таблицы скоростей реакций (19.30) и нейтринных потерь отдельных ядер с учетом возбужденных состояний начального и конечного ядра приведены в работе [367] для переходов $^{26}\text{Al} \leftrightarrow ^{26}\text{Mg}$, $^{30}\text{P} \leftrightarrow ^{30}\text{Si}$, $^{31}\text{S} \leftrightarrow ^{31}\text{P}$, $^{32}\text{S} \leftrightarrow ^{32}\text{P}$, $^{33}\text{S} \leftrightarrow ^{33}\text{P}$, $^{35}\text{Cl} \leftrightarrow ^{35}\text{S}$. При этом учтены как e^- -распады, так и e^+ -захваты. Расчет проводился с помощью значений $F_{T1/2}$ между различными ядерными уровнями при учете кулоновских поправок. В работах [368–370] аналогичные расчеты были проделаны для 226 ядер с $A = 21 \div 60$. Урка-процессы для наиболее распространенных в природе ядер ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne и др. исследованы в [269].

Интересная особенность урка-процессов и их роль в охлаждении очень плотного вещества с $\epsilon_{Fe} \gg kT$ рассмотрена в [217]. При низкой температуре концентрация позитронов мала (см. § 2, п. а), а фазовое пространство электронов почти заполнено, так что электронный захват в реакции (19.30а) при той же плотности не сопровождается реакциями (в) и (с). Ситуация меняется, если в звезде имеется конвекция и вещество совершает колебательное движение. Вокруг границы $\epsilon_{Fe} = \Delta_{Z'Z} - m_e c^2$ при больших плотностях происходит e^- -захват, а при меньших — e^- -распад. Таким образом, нейтринные потери происходят в результате реакций с e^- из (19.30), проходящих по разные стороны от границы $\epsilon_{Fe} = \Delta_{Z'Z} - m_e c^2$. В [217] оболочка звезды вблизи $\epsilon_{Fe} = \Delta_{Z'Z} - m_e c^2$ была названа урка-оболочкой. Учет нейтринных потерь из урка-оболочек может быть существенным на стадии вырожденных предсверхновых звезд перед термоядерным взрывом [526, 349]. В [217] рассматривались урка-оболочки элементов с нечетными A , обладающие невысоким порогом захвата электрона: $^{35}\text{Cl} \leftrightarrow ^{35}\text{S}$ с $\Delta = m_e c^2 + 0,168$ МэВ, $^{31}\text{P} \leftrightarrow ^{31}\text{Si}$ с $\Delta = m_e c^2 + 1,48$ МэВ и др.

е) Другие механизмы охлаждения за счет излучения нейтрино. В работе [363] указаны другие механизмы нейтринного охлаждения звезд: тормозное излучение

$$e^{\pm} + (A, Z) \rightarrow e^{\pm} + (A, Z) + \nu + \bar{\nu}, \quad (19.37)$$

фотон-фотонное взаимодействие

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma &\rightarrow \nu + \bar{\nu} \quad \text{и} \\ \gamma + \gamma &\rightarrow \gamma + \nu + \bar{\nu}, \end{aligned} \quad (19.38)$$

фоторождение нейтрино в поле ядра

$$\gamma + (A, Z) \rightarrow (A, Z) + \nu + \bar{\nu}. \quad (19.39)$$

Расчеты показали [363, 268], что охлаждение за счет реакций (19.37)–(19.39) всегда мало по сравнению с реакциями, рассмотренными выше.

§ 20. Нагрев вещества при неравновесных бета-процессах

Когда реакции слабых взаимодействий протекают в условиях, далеких от термодинамического равновесия, их результатом может явиться нагрев вещества, несмотря на нейтринные потери энергии. Наиболее простым является пример распада бета-радиоактивных ядер при малых температурах вещества $kT \ll \epsilon_{\beta}$ (см. (4.1)). Рост температуры происходит за счет термализации быстрых электронов, возникающих при бета-распадах. В астрофизических условиях неравновесными процессами часто являются бета-захваты при высоких плотностях, когда $\epsilon_{Fe} > \epsilon_{\beta}$.

Рассмотрим вещество, состоящее из ядер (A, Z) , при нулевой температуре с электронной функцией распределения f_e из (2.2) в виде ступеньки (рис. 23, а). Пусть в результате сжатия ϵ_{Fe} превысила величину ϵ_{β} . Если сжатие происходит медленно (адиабатически), то электроны с края ступеньки успевают захватываться ядрами. При этом энергия вылетающих



Рис. 23. Нагрев холодного вещества при неравновесном бета-захвате

нейтрино $\epsilon_{\nu} \approx 0$, ступенька сохраняет свою форму, энтропия и температура остаются нулевыми. При быстром сжатии возникает конечная разность $\epsilon_{Fe} - \epsilon_{\beta}$ и все электроны с $\epsilon_{\beta} < \epsilon_e < \epsilon_{Fe}$ могут быть захвачены ядром (A, Z) . В результате захватов возникают дырки в функции распределения f_e (рис. 23, б). Тепловая релаксация приводит к сглаживанию функции f_e , которая примет форму, отличную от первоначальной ступеньки, с ненулевой температурой и энтропией [282] (рис. 23, в). Таким образом, быстрое сжатие является неравновесным и сопровождается необратимым ростом энтропии.

а) **Скорость неравновесного нагрева.** Для вывода скорости нагрева при неравновесном бета-захвате электронов в реакции (19.30а) воспользуемся вторым законом термодинамики для системы частиц переменного состава [145, 56, 503], записанным для единицы массы:

$$dE - \frac{P}{\rho^2} d\rho = TdS + \sum_i \mu_{ti} dn_i = dQ = - \frac{Q_\nu}{\rho} dt. \quad (20.1)$$

Пренебрегая влиянием температуры на скорость реакции и скорость нейтринных потерь, получаем из (19.31), (1) задачи 4 § 18

$$\begin{aligned} W^{(a)} &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} \int_{\delta}^{u_{Fe}} (u^2 - 1)^{1/2} u(u - \delta)^2 du = \\ &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} [F_0(u_{Fe}) - F_0(\delta)] \quad (\text{реакций в 1 с на 1 ядро}), \end{aligned} \quad (20.2)$$

$$\begin{aligned} Q^{(a)} &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} m_e c^2 \int_{\delta}^{u_{Fe}} (u^2 - 1)^{1/2} u(u - \delta)^3 du = \\ &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} [F_\epsilon(u_{Fe}) - F_\epsilon(\delta)] \quad (\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \text{ на 1 ядро}), \end{aligned} \quad (20.3)$$

где $F_0(u)$ определено в (18.63), а

$$\begin{aligned} F_\epsilon(u) &= \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{240} [40u^5 - 144\delta u^4 + 10u^3(18\delta^2 - 1) + \\ &+ 16\delta u^2(3 - 5\delta^2) - 15u(1 + 6\delta^2) + 16\delta(6 + 5\delta^2)] - \\ &- \frac{1 + 6\delta^2}{16} \ln(\sqrt{u^2 - 1} + u). \end{aligned} \quad (20.4)$$

С учетом (20.2), (20.3) имеем

$$Q_\nu = n_{A,Z} Q^{(a)}. \quad (20.5)$$

Химические потенциалы нерелятивистских ядер и холодных электронов равны

$$\mu_{t,Z} \approx m_{A,Z} c^2, \quad \mu_{t,Z-1} \approx m_{A,Z-1} c^2, \quad \mu_{te} \approx \epsilon_{Fe} + m_e c^2. \quad (20.6)$$

С учетом (20.2)–(20.6) получаем из (20.1)

$$\begin{aligned} \rho T \frac{dS}{dt} &= [(\epsilon_{Fe} + m_e c^2 - \Delta_{Z'Z}) W^{(a)} - Q^{(a)}] n_{A,Z} = \\ &= \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} n_{A,Z} m_e c^2 \{ (u_{Fe} - \delta) [F_0(u_{Fe}) - F_0(\delta)] - F_\epsilon(u_{Fe}) + F_\epsilon(\delta) \}. \end{aligned} \quad (20.7)$$

При $u_{Fe} \gg \delta \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} F_0(u_{Fe}) &\approx \frac{u_{Fe}^5}{5}, \quad F_0(\delta) \approx \frac{\delta^5}{5}, \quad F_\epsilon(u_{Fe}) \approx \frac{u_{Fe}^6}{6}, \quad F_\epsilon(\delta) \approx \frac{\delta^6}{6}, \\ \rho T \frac{dS}{dt} &\approx \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z'}} n_{A,Z} m_e c^2 \frac{u_{Fe}^6 - \delta^6}{30}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Таким образом, при $u_{Fe} \gg \delta \gg 1$ на нагрев вещества идет в 5 раз меньше энергии, чем на нейтринное излучение. В [108] отмечалось, что при $u_{Fe} \gg \delta$ нейтрино уносит $5/6 \epsilon_{Fe}$ энергии на каждый акт захвата электрона. При $u_{Fe} \approx \delta$ имеем

$$F_0(u) \approx \delta \sqrt{\delta^2 - 1} \frac{(u - \delta)^3}{3},$$

$$F_e(u) \approx \delta \sqrt{\delta^2 - 1} \frac{(u - \delta)^4}{4}, \quad (20.9)$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{g_{Z'}}{g_Z} \frac{\ln 2}{(F_{t1/2})_{Z'}} n_{A,Z} m_e c^2 \frac{(u_{Fe} - \delta)^4}{12},$$

т.е. на нагрев идет в три раза меньше энергии, чем на нейтринное излучение. В общем случае при учете температурных поправок вместо (20.7) имеем

$$\rho T \frac{dS}{dt} = [(\mu_{te} - \mu_{t,Z-1} + \mu_{t,Z}) W^{(a)} - Q^{(a)}] n_{A,Z} \quad (20.7a)$$

с общими формулами (2.9) и (3.2) для μ_t . В [186] исследовалась зависимость неравновесного нагрева от температуры и показано, что при $kT > 0,24 m_e c^2$ для реакции (20.14d) нагрев сменяется нейтринным охлаждением.

б) Учет захвата на возбужденные уровни конечного ядра. При захвате на возбужденные уровни энергия возбуждения переходит в тепло и эффективность неравновесного нагрева увеличивается. Эта роль возбужденных уровней отмечалась в работах [56, 187]. В [54] неравновесный нагрев с учетом возбужденных уровней рассчитан в газовой модели ядра (см. задачу 5, § 18). Для вычисления мощности нейтринного излучения следует вычислить интеграл, получающийся из (5) данной задачи умножением подынтегральной функции на cp_ν . Выполняя расчет в приближении (36) задачи 5 § 18, получаем [54]

$$Q^{(a)} = \frac{W_\mu}{2\pi} \left(\frac{137}{Z_e m_\mu c} \right)^3 \frac{Z}{Z_e} \frac{8m^2 c^3 q_0^2}{3(mc + q_0)^4} \frac{p_{\kappa,e}^4}{p_{\kappa,\mu}} \frac{\varphi_L}{\varphi_\mu} \quad (20.10)$$

где $Z_e, \varphi_\mu, p_{\kappa,e}, p_{\kappa,\mu}$ определены в (37), (39) задачи 5 § 18, а

$$\varphi_L = \left(\frac{1}{7} + \frac{x^2}{35} \right) p_{\kappa,e}^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{30} \right) p_{e0} p_{\kappa,e}^2 +$$

$$+ \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}x + \frac{x^2}{5} \right) p_{e0}^2 p_{\kappa,e} + \frac{1}{4} (1-x)^2 p_{e0}^3; \quad x = \frac{q_0}{mc}. \quad (20.11)$$

При $p_{\kappa,e} \gg p_{e0}$ средняя энергия испускаемого нейтрино с учетом (38) задачи 5, § 18 и (20.10) есть

$$\bar{\epsilon}_\nu = \frac{Q^{(a)}}{W_e} = \frac{6m^2 c^2 + 0,2q_0^2}{7mc(mc + q_0)} \epsilon_{Fe} \approx 0,6 \epsilon_{Fe} \quad (20.12)$$

вместо $\bar{\epsilon}_\nu = \frac{5}{6} \epsilon_{Fe}$ в аналогичном случае без учета возбужденных уровней.

Уравнение для изменения энтропии с учетом возбужденных уровней опре-

деляется первым равенством в (20.7) или (20.7a) при $W^{(a)} = W_e$ из (38) задачи 5 § 18 и $Q^{(a)}$ из (20.10). Величина $\Delta_{Z',Z}$ по-прежнему определяется разностью энергий основных состояний ядер (18.5).

в) **Двуступенчатый неравновесный захват электронов в белых карликах вблизи чандрасекаровского предела.** В центральных областях массивных белых карликов с массой, близкой к предельной M_{Ch} , происходит реакция нейтронизации, причем при малом, но конечном ядре новой фазы белый карлик остается устойчивым ([191], см. § 45). Ввиду большей устойчивости четно-четных ядер по сравнению с нечетно-нечетными, пороговая энергия электрона, необходимая для его захвата четно-четным ядром (A, Z) , больше соответствующей энергии для нечетно-нечетного ядра $(A, Z-1)^*$:

$$\Delta_{Z-1,Z} > \Delta_{Z-2,Z-1}. \quad (20.13)$$

Тогда при $\epsilon_{Fe} = \epsilon_\beta(A, Z) > \epsilon_\beta(A, Z-1)$ (см. (4.1)) захват электрона ядром $(A, Z-1)$ происходит неравновесно и сопровождается нагревом. В [56] рассмотрен тепловой эффект данной реакции для некоторых цепочек:

- (a) ${}^{32}_{16}\text{S}(0^+) \rightarrow {}^{32}_{15}\text{P}(1^+) \rightarrow {}^{32}_{14}\text{Si}(0^+)$, (1708; 213)
- (b) ${}^{38}_{18}\text{Ar}(2^-) \rightarrow {}^{38}_{17}\text{Cl}(2^-) \rightarrow {}^{38}_{16}\text{S}(0^+)$, (4810; 3000)
- (c) ${}^{42}_{20}\text{Ca}(0^+) \rightarrow {}^{42}_{19}\text{K}(2^-) \rightarrow {}^{42}_{18}\text{Ar}(0^+)$, (3524; 583)
- (d) ${}^{56}_{26}\text{Fe}(0^+) \rightarrow {}^{56}_{25}\text{Mn}^*(1^+) \rightarrow {}^{56}_{25}\text{Mn}(3^+) \rightarrow {}^{56}_{24}\text{Cr}(0^+)$, (3809; 109; 1610)
- (e) ${}^{60}_{28}\text{Ni}(0^+) \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co}^*(2^+) \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co}(5^+) \rightarrow {}^{60}_{26}\text{Fe}(0^+)$, (2890; 60; 260)
- (f) ${}^{60}_{30}\text{Zn}(0^+) \rightarrow {}^{60}_{29}\text{Cu}(1^+) \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni}(0^+)$, (2630, 200).

Здесь справа в скобках указаны ϵ_β (в кэВ) для двух последовательных переходов. При образовании возбужденных ядер ${}^{56}\text{Mn}^*$ и ${}^{56}\text{Co}^*$ вторая цифра в скобках определяет энергию возбуждения промежуточного ядра. Рядом с названием элемента указаны спин и четность ядра в основном состоянии или в соответствующем возбужденном. Принимая приближенно

$$(20.8), \text{ что на нагрев идет } \sim \frac{1}{6} \epsilon_{Fe} \text{ на один захват электрона, получим, что}$$

в реакциях (20.14) выделяется 249; 302; 490; 476; 498; 405 кэВ соответственно. При этом в реакциях (d) и (e) учтен нагрев за счет возбужденного уровня промежуточного ядра, энергия возбуждения которого переходит в тепло. О влиянии этого эффекта на остывание белых карликов см. § 39.

г) **Неравновесный нагрев при коллапсе вещества.** Рост плотности, происходящий в коллапсирующем ядре звезды после потери гидродинамической устойчивости (см. гл. 10), приводит к сильной неравновесности с $\epsilon_{Fe} \gg \epsilon_\beta$ и быстрому нагреву. Решение уравнения (20.7) совместно с уравнениями химической кинетики типа (13.6) при свободном коллапсе сделано в [187, 501]. Самосогласованная звезда с уравнениями движения для усредненных по звезде параметров по методу [26] решалась в [19, 20]. Решение задачи в точной постановке сделано в [66]. Как следует из этих работ, первоначально холодное железное ядро звезды, начиная коллапсировать при $\rho = 1, 3 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, нагревается до $T = 4 \cdot 10^9 \text{ К}$ при $\rho = 2 \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, когда устанавливается ядерное равновесие.

* Имеются в виду ядра с нечетными Z и $N = A - Z$.

§ 21. Нейтринный перенос и нейтринная теплопроводность

В центральных областях горячей нейтронной звезды, образующейся в результате коллапса, температура и плотность столь велики, что нейтрино не вылетают свободно, а находятся в состоянии, близком к термодинамическому равновесию [28, 111]. Если принять нейтрино безмассовыми, то для них в условиях ЛТР справедливо уравнение переноса, аналогичное (5.9) и имеющее вид [115, 430, 301]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu\epsilon}}{\partial t} + \frac{\partial I_{\nu\epsilon}}{\partial s} = & -\alpha_{\nu\epsilon}^* \rho (I_{\nu\epsilon} - I_{\nu\epsilon}^P) + \\ & + \rho \int \left[\frac{\epsilon_\nu}{\epsilon'_\nu} K_\nu(l_i \cdot l'_i, \epsilon'_\nu \rightarrow \epsilon_\nu) I'_{\nu\epsilon'} \left(1 - \frac{c^2 h^3}{\epsilon_\nu^3} I_{\nu\epsilon} \right) - \right. \\ & \left. - K_\nu(l_i \cdot l'_i, \epsilon_\nu \rightarrow \epsilon'_\nu) I_{\nu\epsilon} \left(1 - \frac{c^2 h^3}{\epsilon_\nu'^3} I'_{\nu\epsilon'} \right) \right] d\epsilon'_\nu d\Omega' / 4\pi. \end{aligned} \quad (21.1)$$

Здесь индекс ν означает нейтрино, а не частоту, как в (5.9). Интенсивность нейтринного излучения $I_{\nu\epsilon} \equiv I_\nu(l_i, \epsilon_\nu)$ эрг $\cdot$ см $^{-2} \cdot$ с $^{-1} \cdot$ стер $^{-1} \cdot$ эрг $^{-1}$ нормирована к единице интервала энергии, а не частоты, как в (5.4). Уравнение (21.1) справедливо и при $m_{\nu 0} \neq 0$, если $\epsilon_\nu \gg m_{\nu 0} c^2$. Левая часть (21.1) равна (5.11) и (5.12) для плоского и сферического случаев, соответственно. Равновесная интенсивность нейтрино $I_{\nu\epsilon}^P$ аналогично (5.14) равна

$$I_{\nu\epsilon}^P = \frac{\epsilon_\nu^3}{c^2 h^3} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon_\nu - \mu_\nu}{kT}\right)}. \quad (21.2)$$

Величины l_i, l'_i, μ_ν имеют тот же смысл, что и в § 5. Коэффициент нейтринного поглощения с учетом индуцированных процессов есть [430]

$$\alpha_{\nu\epsilon}^* = \frac{\sigma_\nu^a N_a}{\rho} \left[1 + \exp\left(\frac{\mu_\nu - \epsilon_\nu}{kT}\right) \right], \quad \alpha_{\nu\epsilon} = \frac{\sigma_\nu^a N_a}{\rho}, \quad (21.3)$$

где σ_ν^a — сечение поглощения, N_a — концентрация поглощающих частиц. Таким образом, для фермионов индуцированные процессы усиливают поглощение, в отличие от фотонов (бозонов) в (5.13а).

Выведем формулы (5.13а) и (21.3) для коэффициентов поглощения с учетом вынужденных процессов. Члены, учитывающие излучение и поглощение в правых частях (5.9) и (21.1), соответственно равны

$$\begin{aligned} \rho \left[j_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \alpha_\nu I_\nu \right] \quad \text{и} \quad (21.4) \\ \rho \left[j_{\nu\epsilon} \left(1 - \frac{c^2 h^3}{\epsilon_\nu^3} I_{\nu\epsilon} \right) - \alpha_{\nu\epsilon} I_{\nu\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

В условиях ЛТР j_ν и $j_{\nu\epsilon}$ совпадают с равновесными, тогда величины в квадратных скобках равны нулю при $I_\nu = B_\nu, I_{\nu\epsilon} = I_{\nu\epsilon}^P$ из (5.14) и (21.2).

Для равновесных J_ν и $J_{\nu\epsilon}$ имеем

$$j_\nu = \alpha_\nu \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) B_\nu, \quad j_{\nu\epsilon} = \alpha_{\nu\epsilon} \left(1 + e^{\frac{\mu_\nu - \epsilon_\nu}{kT}} \right) I_{\nu\epsilon}^P. \quad (21.5)$$

Учет (21.5) позволяет представить (21.4) в искомом виде:

$$\begin{aligned} \rho \alpha_\nu \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) (B_\nu - I_\nu) &= \rho \alpha_\nu^* (B_\nu - I_\nu), \\ \rho \alpha_{\nu\epsilon} \left(1 + e^{\frac{\mu_{\nu\epsilon} - \epsilon_\nu}{kT}} \right) (I_{\nu\epsilon}^P - I_{\nu\epsilon}) &= \rho \alpha_{\nu\epsilon}^* (I_{\nu\epsilon}^P - I_{\nu\epsilon}). \end{aligned} \quad (21.6)$$

Последний член с рассеянием в (21.1) выписан с учетом вынужденных процессов для фермионов, аналогично (5.16) для бозонов, при этом

$$\int K_\nu(l_i \cdot l'_i, \epsilon_\nu \rightarrow \epsilon'_\nu) d\epsilon'_\nu \frac{d\Omega'}{4\pi} = \sigma_{\nu\epsilon} = \frac{\sigma_\nu^s N_s}{\rho}, \quad (21.7)$$

где σ_ν^s — сечение рассеяния, N_s — число рассеивающих частиц, $\sigma_{\nu\epsilon}$ — усредненный по углам коэффициент рассеяния нейтрино, аналогично (5.8). Из принципа детального равновесия следует соотношение [430, 301]

$$K_\nu(l_i \cdot l'_i, \epsilon_\nu \rightarrow \epsilon'_\nu) \epsilon_\nu^2 e^{-\frac{\epsilon_\nu}{kT}} = K_\nu(l_i \cdot l'_i, \epsilon'_\nu \rightarrow \epsilon_\nu) \epsilon_\nu'^2 e^{-\epsilon'_\nu/kT}. \quad (21.8)$$

Равновесная интенсивность (21.2) обращает в нуль последний член в (21.1) с учетом (21.8). Отметим, что соотношение, аналогичное (21.8) с заменой $\epsilon \rightarrow \nu$ справедливо и для рассеяния фотонов, что приводит к занулению (5.16) планковской интенсивностью (5.14).

В отличие от фотонов нейтрино имеет античастицу $\bar{\nu}$. Для антинейтрино можно также написать кинетическое уравнение, аналогичное (21.1). При большой нейтринной толще, когда функция распределения близка к равновесной, (21.2), справедливо равенство $\mu_{\bar{\nu}} = -\mu_\nu$ (см. (3.5)), а для нахождения μ_ν нужно использовать первое соотношение (2.56), где в левой части стоит $2(n_\nu - n_{\bar{\nu}})$. Диффузия нейтрино сопровождается переносом не только энергии, как в случае переноса фотонов, но и лептонного заряда $Q_{\nu\epsilon}$, что является аналогом обычной диффузии (см. (8.13)). Систему уравнений переноса энергии и лептонного заряда, полученную в [115] для сферической звезды удобно записать в виде [498]

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{Q_{\nu\epsilon}}{\rho} &= \frac{n_\nu + n_{e-} - n_{\bar{\nu}} - n_{e+}}{\rho}, \\ \frac{dE}{dt} + P \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} &= -4\pi \frac{\partial}{\partial m} (r^2 H), \end{aligned} \quad (21.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial}{\partial m} (r^2 F) &= 0, \\ dm &= 4\pi c^2 \rho r^2. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Здесь E , P — удельная энергия и давление с учетом вклада нейтрино (см. гл. 1). Величины теплового H и диффузионного F нейтринного потоков

записываются в виде [115]

$$H = -\frac{7}{8} \frac{4acT^3}{3} 4\pi r^2 \rho \left(l_T \frac{\partial T}{\partial m} + T l_\psi \frac{\partial \beta_\nu}{\partial m} \right),$$

$$F = -\frac{7}{8} \frac{4acT^3}{3k} 4\pi r^2 \rho \left(\frac{\lambda_T}{T} \frac{\partial T}{\partial m} + \lambda_\psi \frac{\partial \beta_\nu}{\partial m} \right), \quad (21.11)$$

$$\beta_\nu = \mu_\nu / kT.$$

Усреднение по Росселанду аналогично (6.8) дает для средних пробегов нейтрино

$$l_T = l_{T\nu} + l_{T\tilde{\nu}}, \quad l_\psi = l_{\psi\nu} + l_{\psi\tilde{\nu}},$$

$$\lambda_T = \lambda_{T\nu} + \lambda_{T\tilde{\nu}}, \quad \lambda_\psi = \lambda_{\psi\nu} + \lambda_{\psi\tilde{\nu}}, \quad (21.12)$$

где

$$l_{T\nu} = \frac{15}{7\pi^4} \int_0^\infty l_{\nu 0} \frac{x^4 \exp[2(x - \beta_\nu)]}{[1 + \exp(x - \beta_\nu)]^3} dx,$$

$$l_{\psi\nu} = \lambda_{T\nu} = \frac{15}{7\pi^4} \int_0^\infty l_{\nu 0} \frac{x^3 \exp[2(x - \beta_\nu)]}{[1 + \exp(x - \beta_\nu)]^3} dx, \quad (21.13)$$

$$\lambda_{\psi\nu} = \frac{15}{7\pi^4} \int_0^\infty l_{\nu 0} \frac{x^2 \exp[2(x - \beta_\nu)]}{[1 + \exp(x - \beta_\nu)]^3} dx.$$

Величины $l_{T\tilde{\nu}}$, $l_{\psi\tilde{\nu}}$, $\lambda_{T\tilde{\nu}}$, $\lambda_{\psi\tilde{\nu}}$ для антинейтрино получаются из (21.13) заменой $\beta_\nu \Rightarrow (-\beta_\nu)$, $l_{\nu 0} \Rightarrow l_{\tilde{\nu} 0}$. Пробег нейтрино до взаимодействия с ядром $(A, Z-1)$ есть

$$l_{\nu 0}^{A, Z-1} = \frac{1}{\sigma_\nu^{A, Z-1} n_{A, Z-1}}, \quad l_{\tilde{\nu} 0}^{A, Z} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}^{A, Z} n_{A, Z}}. \quad (21.14)$$

Сечение захвата нейтрино, аналогичное захвату электрона (4) задачи 2 § 18 есть

$$\sigma_\nu^{A, Z-1} = \frac{W_\nu^{A, Z-1}}{n_\nu c}, \quad (21.15)$$

а $W_\nu^{A, Z-1}$ получается из вероятности электронного захвата $W_Z^{\text{захв}}$ в (2) задачи 2 § 18, если заменить

$$n_e \Rightarrow n_\nu, \quad \delta(\epsilon_e - \epsilon_\nu - \Delta_{Z-1, Z}) \Rightarrow \delta(\epsilon_\nu + \Delta_{Z-1, Z} - \epsilon_e),$$

$$p_\nu^2 dp_\nu \Rightarrow (1 - f_e) p_e^2 dp_e = \frac{1}{c^3} (1 - f_e) \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4} \epsilon_e d\epsilon_e, \quad (21.16)$$

$$|M|_Z^2 \Rightarrow |M|_{Z-1}^2 *).$$

* $W_{\tilde{\nu}}^{A, Z}$ получается из $W_\nu^{A, Z-1}$ заменой $\nu \Rightarrow \tilde{\nu}$, $e^- \Rightarrow e^+$ и переменной знака у члена с $\Delta_{Z-1, Z}((A, Z) + \tilde{\nu} \rightarrow (A, Z-1) + e^+)$.

Тогда получим с учетом f_e из (2.2)

$$\sigma_{\nu}^{A, Z-1} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{h}{m_e c} \right)^3 \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} \frac{\epsilon_e \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4}}{(m_e c^2)^2} \exp\left(\frac{\epsilon_e - \mu_{te}}{kT}\right) \times \\ \times \left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon_e - \mu_{te}}{kT}\right) \right]^{-1} \quad \text{при} \quad \epsilon_e = \epsilon_{\nu} + \Delta_{Z-1, Z}. \quad (21.17)$$

Учитывая (21.17) в (21.14), имеем

$$l_{\nu 0}^{A, Z-1} = \frac{(m_e c^2)^2}{\epsilon_e \sqrt{\epsilon_e^2 - m_e^2 c^4}} \frac{1}{\sigma_0 n_{A, Z-1}} \frac{1 + \exp\left(\frac{\epsilon_e - \mu_{te}}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\epsilon_e - \mu_{te}}{kT}\right)}, \quad (21.18)$$

$$\epsilon_e = \epsilon_{\nu} + \Delta_{Z-1, Z},$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{h}{m_e c} \right)^3 \frac{\ln 2}{(Ft_{1/2})_{Z-1}} (\approx 2 \cdot 10^{-44} \text{ см}^2 \text{ для } Ft_{1/2} \text{ из распада нейтрона}).$$

При наличии нескольких сортов ядер имеем

$$l_{\nu 0} = \left(\sum l_{\nu 0}^{A, Z-1} \right)^{-1}. \quad (21.19)$$

Если в веществе присутствуют одни нуклоны, то введем, с учетом (3.2), (3.5),

$$\theta = \frac{n_n}{n_p} = \exp[(\mu_{te} - \mu_{\nu} - \Delta_n)/kT]. \quad (21.20)$$

Для ультрарелятивистских электронов и нейтрино, когда $m_e c^2$ и Δ_n пренебрежимо малы по сравнению с $\epsilon_{e, \nu}$ и $\mu_{e, \nu}$, интегралы в (21.13) выражаются аналитически [115, 498]:

$$l_{T\nu} = \frac{15}{7\pi^4} \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^2 \frac{1}{\sigma_0 n_n} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{x^2 \{ \exp[2(x - \beta_{\nu})] + \exp(\beta - \beta_{\nu}) \exp(x - \beta_{\nu}) \}}{[1 + \exp(x - \beta_{\nu})]^3} dx = \\ = \frac{15}{7\pi^4} \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^2 \frac{1}{\sigma_0} \left[\frac{F_0(\beta_{\nu}) + F_1(\beta_{\nu})}{n_n} - \frac{F_0(\beta_{\nu}) - F_1(\beta_{\nu})}{n_p} \right]. \quad (21.21)$$

Аналогично

$$l_{T\bar{\nu}} = \frac{15}{7\pi^4} \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^2 \frac{1}{\sigma_0} \left[\frac{F_0(-\beta_{\nu}) + F_1(-\beta_{\nu})}{n_p} - \frac{F_0(-\beta_{\nu}) - F_1(-\beta_{\nu})}{n_n} \right]. \quad (21.22)$$

Отсюда с учетом (21.12), (2.55) получаем

$$I_T = B(1 + \theta) \left[\frac{1 + \theta}{2\theta} \left(\beta_\nu^2 + \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{\theta - 1}{\theta} \beta_\nu \right], \quad (21.23)$$

$$B = \frac{15}{7\pi^4} \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^2 \frac{m_p}{\sigma_0 \rho}.$$

Остальные коэффициенты из (21.12), (21.13) вычисляются аналогично [115]:

$$\begin{aligned} I_\psi &= \lambda_T = \frac{1}{2} B \frac{(1 + \theta)^2}{\theta} \left(\beta_\nu - \frac{\theta - 1}{\theta + 1} \right) \\ \lambda_\psi &= \frac{1}{2} B \frac{(1 + \theta)^2}{\theta}. \end{aligned} \quad (21.24)$$

Учет рассеяния нейтрино на электронах производится добавлением к (21.19) члена $(1/I_{\nu 0}^s)$ под знак суммы, где

$$I_{\nu 0}^s = \frac{1}{\langle \sigma_\nu^s \rangle n_e},$$

а сечения рассеяния с учетом (18.82) берутся усредненными по распределению рассеивающих электронов. Здесь необходимо, согласно (18.82) учесть заполненность фазового пространства рассеянных нейтрино множителем $\left(1 - \frac{c^2 h^3}{\epsilon_\nu^3} I_{\nu e}^p\right)$, наряду с $(1 - f_e)$ в (21.16). Интегрирование по фазовому пространству усложняется по сравнению с $W_\nu^{A, Z-1}$ из-за необходимости учета релятивизма в величинах, характеризующих e и ν . Аналитических выражений типа (21.23) здесь получить не удастся. Ввиду того, что сечение рассеяния с учетом нейтральных токов в несколько раз меньше сечения поглощения на нуклонах, учет рассеяния важен для электронных нейтрино только при столь высоких температурах, когда количество $e^+ e^-$ пар значительно превосходит число нуклонов. Для других типов нейтрино, не испытывающих поглощения на нуклонах, учет рассеяния за счет нейтральных токов необходим всегда. При $\tau_\nu > 1$ учет $\nu\nu$ -рассеяния столь же важен, как и νe -рассеяния. Приближенный метод учета рассеяния нейтрино при $\tau_\nu \leq 1$ развит в [430].

ГЛАВА 6

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ЗВЕЗДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

§ 22. Сферически-симметричные звезды

В подавляющем большинстве существующих эволюционных расчетов рассматриваются неврацающие, сферически-симметричные звезды. В рамках этой модели были получены эволюционные треки на диаграмме Герцшпрунга—Рессела $\lg L - \lg T_{\text{eff}}$ (см. § 6, п. б), которые хорошо объяснили наблюдательные особенности звезд: главную последовательность, как самую продолжительную стадию жизни звезды, на которой горит водород, превращаясь в гелий; ветвь гигантов и сверхгигантов, как звезд с плотными горячими ядрами из гелия или углерода и протяженными оболочками, богатыми водородом; белые карлики, как звезды закончившие ядерную эволюцию и излучающие за счет остывания; звезды типа Т Тельца, как молодые сжимающиеся звезды, светящиеся за счет гравитационной энергии при сжатии, и др.

Уравнения звездной эволюции в сферически-симметричном приближении имеют вид [229, 165]

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \text{уравнение равновесия;} \quad (22.1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 - \text{уравнение неразрывности;} \quad (22.2)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \left(\epsilon_n - \epsilon_v - \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \text{уравнение энергии;} \quad (22.3)$$

$$L_r = L_r^{\text{rad}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} - \text{уравнение лучистого равновесия,}$$

$$\nabla_{\text{rad}} < \nabla_a + \nabla_{\mu} \quad (\text{см. (10.11)}) \quad (22.4a)$$

$$L_r = 4\pi r^2 F_{\text{conv}} + L_r^{\text{rad}} =$$

$$= 4\pi r^2 c_p \rho \left[-\frac{Gm}{\rho r^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right]^{1/2} \frac{l^2}{4} (\Delta \nabla T)^{3/2} + L_r^{\text{rad}} - \text{уравнение конвекции по теории пути перемешивания;} \quad (22.46)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S, \mu} \frac{dP}{dr} - \text{уравнение адиабатической конвекции}; \quad (22.4\text{в})$$

$$\frac{\partial x_H}{\partial t} = -4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right) - \text{уравнение горения водорода}; \quad (22.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} &= 4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right) - \\ &- \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - m_\alpha \epsilon_{1^2\text{C}\alpha} / Q_{1^2\text{C}\alpha} \\ \frac{\partial x_{1^2\text{C}}}{\partial t} &= \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - \frac{m_{1^2\text{C}} \epsilon_{1^2\text{C}\alpha}}{Q_{1^2\text{C}\alpha}} \end{aligned} \right\} - \text{уравнения горения гелия и углерода}; \quad (22.6)$$

$$\epsilon_n = \epsilon_{\text{pp}} + \epsilon_{\text{CNO}} + \epsilon_{3\alpha} + \epsilon_{1^2\text{C}\alpha}.$$

Аналогичные уравнения можно записать для других ядерных реакций. Здесь m — масса внутри данного радиуса r , $L_r \equiv L(r)$, ϵ_n и ϵ_ν — скорости ядерного выделения энергии и нейтринных потерь. Два последних члена в (22.3) представляют собой выделение или поглощение тепла при сжатии или расширении звезды (гравитационный источник энергии). Конвективный поток из (22.4б) для смеси идеального полностью ионизованного газа с излучением приведем в (10.20). Выражения для c_p , $(\partial T / \partial P)_S = \frac{T}{P} \gamma_2$ для $\mu = \text{const}$ даны в (1.12), (1.15), (1.20); $\Delta \nabla T$ определено в (10.6).

Уравнения (22.1)–(22.4) служат для расчета структуры каждой эволюционной модели. Уравнения (22.5)–(22.6) нужны для нахождения химического состава при переходе к последующей по времени эволюционной модели. В конвективных областях, где химический состав постоянен из-за перемешивания, вместо (22.6), (22.5) следует использовать уравнения, усредненные по конвективной области с добавлением членов, учитывающих поступление нового вещества при расширении конвективной зоны по массе.

Для смеси идеального газа с излучением при полной ионизации (1.1)–(1.3), (1.7) логарифмические градиенты в (22.4) имеют вид

$$\nabla_{\text{ad}} = \gamma_2 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S = \frac{2(4 - 3\beta_g)}{32 - 24\beta_g - 3\beta_g} \quad (\text{см. (1.20)}), \quad (22.7)$$

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P, S} \frac{d \ln \mu}{d \ln P} = \frac{\beta_g}{4 - 3\beta_g} \frac{d \ln \mu}{d \ln P} \quad (\text{см. (10.11)}), \quad (22.8)$$

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{\kappa L_r}{16\pi c G m (1 - \beta_g)} \quad (\text{см. (22.1), (22.4a)}). \quad (22.9)$$

Скорости энерговыделения ϵ_{pp} , ϵ_{CNO} , $\epsilon_{3\alpha}$, $\epsilon_{1^2\text{C}\alpha}$ и выходы энергии Q_{pp} , Q_{CNO} , $Q_{3\alpha}$, $Q_{1^2\text{C}\alpha}$ на одну реакцию приведены в (14.4)–(14.6),

(14.12)–(14.14), (14.38)–(14.41). Термодинамические функции вещества $P(\rho, T, x_i)$, $E(\rho, T, x_i)$ даны в гл. 1, вычисление непрозрачности κ приведено в § 7, скорости нейтринных потерь даны в § 19.

Эволюционный расчет начинается обычно с однородной модели постоянного химического состава. Если рассматривается стадия эволюции до главной последовательности, то начальное распределение массы берется из расчетов коллапса газовых облаков. Если расчет начинается с главной последовательности, то в качестве начальной рассматривается химически однородная модель, находящаяся в тепловом равновесии без источников гравитационного сжатия. При расчете модели требуется задание граничных условий. В центре, очевидно, имеем

$$L_r = 0, \quad m = 0, \quad \text{при } r = 0. \quad (22.10)$$

Внешнее граничное условие задается на радиусе фотосферы, который отождествляется с радиусом звезды R

$$L = 4\pi c R^2 T_{\text{ef}}^4, \quad T = T_{\text{ef}} \quad \text{при } m = M. \quad (22.11)$$

Второе условие на внешней границе следует из приближенного решения уравнения равновесия в области, почти прозрачной для излучения. Для смеси идеального газа с излучением при $L_r = L = \text{const}$ и $m = M$ из (22.1), (22.4а), (6.17) получаем уравнение равновесия в виде

$$\frac{dP_g}{dr} = \frac{GM}{\kappa R^2} \cdot \left(1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}}\right), \quad L_{\text{cr}} = \frac{4\pi c GM}{\kappa}, \quad \tau = \int_r^\infty \kappa \rho dr. \quad (22.12)$$

Здесь L_{cr} – критическая эддингтоновская светимость. Из (22.12) видно, что при $L > L_{\text{cr}}$ отсутствует статическое равновесие*). Подставляя приближенное

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_0 P_g \quad (22.13)$$

получаем решение (22.12) в виде

$$P_g = g \frac{\tau_0}{\kappa} \frac{L}{L_{\text{cr}}} \left(\frac{L_{\text{cr}}}{L} \frac{\kappa}{\kappa - \kappa_1} \ln \left(\frac{1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}} \frac{\kappa_1}{\kappa}}{1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}}} \right) - 1 \right)^{-1}, \quad P = \frac{P_g}{\beta_g}, \quad (22.14)$$

где $g = GM/R^2$, $\tau_0 = 2/3$ (6.21) или $\tau_0 = 0,756$ (6.23). При $L \ll L_{\text{cr}}$ выражение в скобках (22.14) равно $\frac{\kappa + \kappa_1}{2\kappa} \frac{L}{L_{\text{cr}}}$, что приводит к граничному условию

$$P_g = \frac{2g\tau_0}{\kappa + \kappa_1}, \quad P = P_g/\beta_g, \quad (22.15a)$$

полученному в [165]. При $(\kappa - \kappa_1)/\kappa \ll 1 - L/L_{\text{cr}}$ выражение в скобках

*) При $\kappa = \text{const}$.

(22.14) равно $\left(\frac{\kappa + \kappa_1}{2\kappa} - L/L_{\text{cr}}\right) \frac{L/L_{\text{cr}}}{(1 - L/L_{\text{cr}})^2}$, что дает граничное условие

$$P_g = g \frac{\tau_0}{\kappa} \frac{(1 - L/L_{\text{cr}})^2}{\frac{\kappa + \kappa_1}{2\kappa} - L/L_{\text{cr}}}, \quad P = \frac{P_g}{\beta_g}. \quad (22.156)$$

При $\kappa = \kappa_1 = \text{const}$; $\beta = 1$ и $L/L_{\text{cr}} \ll 1$ из (22.15а, б) следует граничное условие $P = g\tau_0/\kappa$, приведенное в [229].

На стадии красных гигантов звезды имеют протяженные оболочки, где нужно учитывать эффекты сферичности. В этом случае граничное условие задается

$$T = T_0, \quad \rho = \rho_0 (\approx 0) \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad (22.16)$$

а при $\tau > 0$ решается уравнение (6.34). При $\tau \geq 2/3$ уравнение (6.34) плавно переходит в уравнение лучистой теплопроводности (22.4а). В [520] вместо (6.33) на внешней границе принималось

$$T_0 = \left(\frac{L}{2\pi a c R^2}\right)^{1/4}, \quad (22.17)$$

аналогично в плоской атмосфере (6.16)–(6.21). Граничное условие для P_g также задается при $\tau = 0$, а при $\tau > 0$ интегрируется уравнение

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{Gm}{\kappa r^2} \left(1 + f \frac{2aT^3 r^{1/2} T_0 R^{1/2}}{3Gm\rho}\right), \quad (22.18)$$

$\rho(\tau = 0)$ задается.

Это уравнение применимо в прозрачных областях $\tau < 2/3$ при выполнении (22.12), (6.34) и учитывает изменение массы $m(\tau)$ при $\tau > 0$. Уравнения (6.34), (22.18) решаются совместно с (22.2) и соотношением для τ из (22.12) при $\tau \leq 2/3$. При $\tau > 2/3$ они совпадают с равновесными уравнениями (22.1)–(22.4). Плотность на внешней границе задается отличной от нуля для удобства расчетов. В [520] принималось $\rho(\tau = 0) = 10^{-12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Радиус звезды R и светимость L являются собственными числами задачи и определяются в результате построения модели. Учет конвекции по теории пути перемешивания (22.4б) требует решения кубического уравнения для явной записи дифференциального уравнения относительно dT/dr . Это приближение применяется в конвективных оболочках. В конвективных ядрах обычно используется приближение адиабатической конвекции (22.4б). При проведении эволюционных вычислений методом Хенби (см. ниже) модели оболочек часто рассчитываются заранее для широкого набора L и R вплоть до заданных значений m или τ (см. напр. [241]), что сдвигает внешнюю границу рассчитываемой модели ядра в область более высоких температур и плотностей.

Для решения сферически-симметричных уравнений звездной эволюции используются методы Шварцшильда [229] и Хенби [194]. В методе Шварцшильда дифференциальные уравнения (22.1)–(22.4) интегрируются из центра и с поверхности навстречу друг другу и из условия сшивки функций находятся параметры модели R и L , а также центральные значения T_c и P_c .

Метод Хеньи основан на замене дифференциальных уравнений разностными и решением полученной алгебраической системы методом итераций. Последний метод легче позволяет автоматизировать эволюционные расчеты на ЭВМ и используется чаще. На критических стадиях эволюции (формирование плотных ядер, горение нескольких слоевых источников) использование метода Хеньи иногда затрудняется из-за малого радиуса сходимости итераций и метод Шварцшильда может стать более эффективным.

а) **Метод Шварцшильда.** Этот метод основан на решении системы дифференциальных уравнений (22.1)–(22.4) стандартными методами при построении каждой эволюционной модели. Интегрирование из центра требует задания, помимо (20.10), центральных значений P_c и T_c . Интегрирование от поверхности внутрь с использованием граничных условий (22.11), (22.15) (или (22.16)), (22.17) для уравнений (6.34), (22.18)) требует задания радиуса R и светимости L . В качестве независимой переменной вместо радиуса r обычно выбирается внутренняя масса m .

Наиболее простая процедура построения модели состояла бы в задании P_c , T_c , проведении пробных интегрирований от центра и нахождения единственных P_c и T_c , которые позволили бы удовлетворить граничным условиям на поверхности. Аналогичное интегрирование от поверхности к центру позволило бы найти R и L при удовлетворении граничных условий в центре. К сожалению, эти простые процедуры неприемлемы вследствие расходимости в центре в уравнении (22.1) и на поверхности в уравнении (22.4) из-за нулевого r и малого T , соответственно. Шварцшильдом была использована процедура нахождения решений после задания пробных значений

$$P_c, T_c, L, R \quad (22.19)$$

с помощью встречных интегрирований до некоторой промежуточной массы m_f . В этой точке требуется непрерывность функций P , T , L и r

$$P_{if} = P_{ef}, T_{if} = T_{ef}, L_{if} = L_{ef}, r_{if} = r_{ef}. \quad (22.20)$$

где индексы i и e относятся к внутренним и внешним величинам соответственно. После шести пробных интегрирований, трех из центра и трех от поверхности до точки сшивки, находятся частные производные от невязок по параметрам

$$\frac{\partial \Delta_q}{\partial P_c}, \quad \frac{\partial \Delta_q}{\partial T_c}, \quad \frac{\partial \Delta_q}{\partial R}, \quad \frac{\partial \Delta_q}{\partial L}, \quad q = P, T, L, r, \quad (22.21)$$

$$\Delta_P = P_{if} - P_{ef}, \quad \Delta_T = T_{if} - T_{ef}, \quad \Delta_L = L_{if} - L_{ef}, \quad \Delta_r = r_{if} - r_{ef}.$$

Поправки к параметрам (22.19)

$$\Delta P_c, \Delta T_c, \Delta L, \Delta R \quad (22.22)$$

находятся методом Ньютона из условия равенства нулю невязок

$$\Delta_q + \frac{\partial \Delta_q}{\partial P_c} \Delta P_c + \frac{\partial \Delta_q}{\partial T_c} \Delta T_c + \frac{\partial \Delta_q}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial \Delta_q}{\partial L} \Delta L = 0, \quad (22.23)$$

$$q = P, T, L, r.$$

Решение линейной неоднородной системы (22.23) позволяет найти поправ-

ки к предыдущим значениям (22.19) и приступить к следующей итерации. Итерации прекращаются после достижения заданной точности ϵ , когда

$$\delta = \sqrt{\sum_q \left(\frac{\Delta q}{\bar{q}} \right)^2} < \epsilon, \quad q = P, T, L, r, \quad \bar{q} = \frac{1}{2}(q_i + q_e). \quad (22.24)$$

Данная процедура изложена в работе [154] и приспособлена для счета на ЭВМ, введением безразмерных переменных.

Шварцшильдом [229] первоначально рассматривались степенные функции ϵ_n , κ , $P(\rho, T)$ и $\epsilon_\nu = 0$. Это позволяло с помощью преобразования подобия уменьшить число искомых параметров от четырех в (22.19) до двух^{*)}, что давало большие преимущества при интегрировании уравнений вручную. Однако при этом в оболочке и ядре используются различные переменные и процедура сшивки усложняется. Как отмечалось в [229], усложнение сшивки сводит на нет преимущества данной схемы при расчетах на ЭВМ. Для реальных функций ϵ_n , κ , $P(\rho, T)$, ϵ_ν , которые не являются степенными, преобразование подобия отсутствует и уменьшить число искомых функций не удается.

Важным средством улучшения сходимости итераций является использование логарифмических переменных вместо обычных, которые изменяются в звезде на много порядков. Шварцшильдом [229] рассматривались переменные

$$l_P = \lg P, \quad l_T = \lg T, \quad l_L = \lg L, \quad l_r = \lg r, \quad l_m = \lg m. \quad (22.25)$$

В работе [80] использовались четыре логарифмических переменных из (22.25) (кроме l_m) в описанном выше методе [154]. Это позволило продвинуть расчеты вплоть до начала горения гелия, что существенно дальше, чем удавалось сделать в простых переменных. Отметим, что при интегрировании из центра первый шаг делается по разложению [229]

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho_c r^3,$$

$$P = P_c - \frac{2}{3} \pi G \rho_c^2 r^2,$$

$$L_r = \frac{4}{3} \pi \rho_c \left(\epsilon_{nc} - \epsilon_{\nu c} - \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{P_c}{\rho_c^2} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \right) r^3, \quad (22.26)$$

$$T = T_c - \frac{2}{3} \gamma_{2c} \pi G \frac{T_c \rho_c^2}{P_c} r^2 \quad (\text{адиабатическая конвекция}),$$

$$T = T_c - \frac{\kappa_c \epsilon_c \rho_c^2}{8acT_c^3} r^2 \quad (\text{лучистый перенос}),$$

$$\epsilon_c = \epsilon_{nc} - \epsilon_{\nu c} - \partial E_c / \partial t + P_c / \rho_c^2 \cdot \partial \rho_c / \partial t.$$

^{*)} Сшивка проводится по безразмерным величинам [229]

$$U = \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2}{m}, \quad V = -\frac{r}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{\rho}{P} \frac{Gm}{r} \quad \text{и} \quad n+1 = \frac{T}{P} \frac{dP}{dT}.$$

Значение производных $\partial E/\partial t$, $\partial \rho/\partial t$, а также химический состав данной эволюционной модели находятся с помощью предыдущей модели после временного шага Δt . В (22.3) используется

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E(m, t) - E(m, t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho(m, t) - \rho(m, t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (22.27)$$

а химический состав в момент времени t в каждой точке звезды есть

$$x_i(m, t) = x_i(m, t - \Delta t) + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Delta t, \quad i = \text{H}, \alpha, {}^{12}\text{C}. \quad (22.28)$$

Здесь функции $f(m, t - \Delta t)$ считаются известными, а $f(m, t)$ искомыми. Производные $\partial x_i/\partial t$ находятся из (22.5), (22.6). В явной схеме счета эти производные берутся в момент времени $t - \Delta t$ и считаются известными. В неявной схеме их значения берутся в момент времени t или в промежуточный момент (см. (22.41), (22.42)). Это делает численную схему более устойчивой, но несколько усложняет решение. Значения $E(m)$, $P(m)$, $x_{\text{H}}(m)$, $x_{\alpha}(m)$, $x_{{}^{12}\text{C}}(m)$, $r(m)$ с предыдущего временного шага $t - \Delta t$ должны запоминаться в таком наборе точек m_i , чтобы можно было провести достаточно точную интерполяцию между ними. Отметим, что необходимость запоминания значений с предыдущего эволюционного шага является общим для всех методов. В методе Хеньи точки, где необходимы значения с предыдущего шага определяются самой структурой метода.

Метод Шварцшильда применим для эволюционных расчетов, если детерминант системы (22.23) отличен от нуля. Обращение его в нуль указывает на неустойчивость модели и требует специального исследования [527].

б) Метод Хеньи. Предложенный Хеньи [393] метод решения уравнений звездной эволюции основан на разбиении звезды на J счетных интервалов и замене дифференциальных уравнений (22.1)–(22.4) разностными. Для решения системы линеаризованных разностных уравнений используется разработанный советскими математиками метод прогонки (см., например, [92]), который позволяет экономичным образом найти решение. Варианты данного метода, используемые различными авторами [112, 406, 522], близки друг другу.

Масса выбирается в качестве независимой переменной и интервал масс от 0 до M (масса звезды) разбивается на J , вообще говоря не равных интервалов. Масса задается в целых точках M_j , причем $M \equiv M_J$. Разности масс определяются как в целых, так и полужелых точках:

$$\begin{aligned} \Delta M_{j+1/2} &= M_{j+1} - M_j, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ \Delta M_j &= \frac{1}{2}(\Delta M_{j+1/2} + \Delta M_{j-1/2}) = \frac{1}{2}(M_{j+1} - M_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ \Delta M_J &= \frac{1}{2} \Delta M_{J-1/2}. \end{aligned} \quad (22.29)$$

Уравнения (22.1)–(22.4) в разностном представлении записываются в виде [112]

$$P_{j+1/2} - P_{j-1/2} + \frac{GM_j \Delta M_j}{4\pi r_j^4} = 0, \quad j = 1, 2 \dots J; \quad (22.30)$$

$$\rho_{j+1/2} - \frac{\Delta M_{j+1/2}}{\pi(r_{j+1} - r_j)(r_{j+1} + r_j)^2} = 0, \quad j = 0, 1 \dots J-1; \quad (22.31)$$

$$L_{j+1} - L_j - \Delta M_{j+1/2} \cdot \epsilon_{j+1/2} = 0, \quad j = 0, 1 \dots J-1; \quad (22.32)$$

$$T_{j+1/2} - T_{j-1/2} + \frac{G}{4\pi} \frac{\Delta M_j M_j \cdot T_j}{r_j^4 P_j} (\nabla_{\text{ad}})_j = 0, \quad (22.33a)$$

$j = 1, 2 \dots J$ (адиабатическая конвекция);

$$T_{j+1/2} - T_{j-1/2} + \frac{3}{64\pi^2 a c} \frac{\Delta M_j \kappa_j L_j}{r_j^4 T_j^3} = 0$$

$$j = 1, 2, \dots J \quad (\text{лучистое равновесие}). \quad (22.33b)$$

Здесь

$$\epsilon = \epsilon_n - \epsilon_v - \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (22.34)$$

Уравнение состояния, непрозрачность и скорость энерговыделения записываются в виде

$$P_{j+1/2}, \epsilon_{j+1/2} = P, \epsilon(T_{j+1/2}, \rho_{j+1/2}, x_{k,j+1/2}),$$

$$j = 0, 1 \dots J-1; \quad k = \text{H}, \alpha, \text{C}^{12}; \quad (22.35)$$

$$\kappa_j, P_j = \kappa, P(T_j, \rho_j, x_{k,j}), \quad j = 1, 2 \dots J,$$

причем

$$(T_j, \rho_j, x_{k,j}) = \left[\frac{1}{2} (T_{j+1/2} + T_{j-1/2}), \dots, \frac{1}{2} (x_{k,j+1/2} + x_{k,j-1/2}) \right],$$

$$j = 1, 2 \dots J; \quad (22.36)$$

$$(\nabla_{\text{ad}})_j = \nabla_{\text{ad}}(\beta_{gj}), \quad \beta_{gj} = \frac{(P_g)_j}{P_j}. \quad (22.37)$$

Центральные граничные условия в точке $j = 0$: $r_0 = 0$, $L_0 = 0$ – следует учесть в (22.31) и (22.32). Внешние граничные условия в точке $J + 1/2$ записываются в виде

$$\frac{L_J}{4\pi \left(\frac{3}{2} r_J - \frac{1}{2} r_{J-1} \right)^2} = \sigma T_{J+1/2}^4 \quad (\text{из (22.11)}), \quad (22.38)$$

$$P_{J+1/2} = \frac{2/3 GM_J}{\beta_{J+1/2} \left(\frac{3}{2} r_J - \frac{1}{2} r_{J-1} \right)^2 \kappa_{J+1/2}}. \quad (22.39)$$

Здесь принято $k + k_1 = 2k$, $\tau_0 = 2/3$ в (22.15а), внешний радиус находится линейной экстраполяцией $r_{J+1/2} = \frac{3}{2} r_J - \frac{1}{2} r_{J-1}$ и $L_J = L_{J+1/2}$.

Соотношение (22.38) служит для определения $T_{J+1/2} = T_{ef}$, а (22.39) — для $P_{J+1/2}$; $P_{J+1/2}$ определяется как неявная функция из уравнения состояния. Значения $T_{J+1/2}$ и $P_{J+1/2}$ используются в (22.30), (22.33). После учета граничных условий (22.38), (22.39) и задания таблиц M_j , ΔM_j и $\Delta M_{j+1/2}$ система (22.30)–(22.33) из $4J$ уравнений содержит $4J$ неизвестных $\rho_{j+1/2}$, $T_{j+1/2}$ ($j = 0, 1 \dots J-1$) и r_j, L_j ($j = 1, 2 \dots J$). Для решения этой системы проводится ее линеаризация и используется итеративный процесс по методу Ньютона, аналогично (22.23). Для решения системы $4J$ линейных уравнений на каждом шаге итерации используется метод прогонки [92]. Эволюционные изменения химического состава и выделение гравитационной энергии рассчитываются в каждой полуцелой точке, параметры в которой запоминаются после каждого эволюционного шага. Для хорошей точности расчетов и сходимости итераций изменение функций от точки к точке не должно быть большим, предельное относительное изменение определяется числом счетных интервалов. В [112] при $J = 150$ налагалось требование

$$\frac{L_{j+1} - L_j}{L_j} \leq 0,05, \quad \frac{P_{j+3/2} - P_{j-1/2}}{P_{j+1/2}} \leq 0,2. \quad (22.40)$$

Условия (22.40) проверялись после каждого эволюционного шага и при их нарушении производилась перестановка точек, чтобы они снова выполнялись. С ростом J условия (22.40) могут быть выбраны более жесткими. Так же как в методе Шварцшильда, эволюционное изменение химического состава может быть вычислено явным или неявным способом. В [522, 112] использовалась явная по времени схема счета. В [406] химический состав в момент времени t_{n+1} в каждой точке лучистой зоны вычислялся по формуле

$$x_i^{(n+1)}(j+1/2) = x_i^{(n)}(j+1/2) + \dot{x}_i^{(n+1/2)}(j+1/2) \Delta t, \quad (22.41)$$

где

$$\dot{x}_i^{(n+1/2)}(j+1/2) = \frac{1}{2} [\dot{x}_i^{(n)}(j+1/2) + \dot{x}_i^{(n+1)}(j+1/2)]. \quad (22.42)$$

Точка означает производную по времени (22.5), (22.6). При счете конвективной зоны ее граница считается фиксированной и уточняется после окончания итераций.

в) Метод Хенни с пришивкой оболочки. Опыт расчетов показал, что сходимость и точность метода улучшаются, если внешнюю оболочку звезды, содержащую $(3 \div 10)\%$ массы с постоянной светимостью L рассчитывать отдельно путем решения дифференциальных уравнений [446, 522, 52]. Рассмотрим модификацию метода Хенни с учетом пришивки оболочки [52]. Интегрирование уравнений равновесия оболочки (22.1)–(22.4) с $L = \text{const}$, $\epsilon = 0$ и с граничными условиями (22.11), (22.15) на $\tau = \tau_0$ или (22.17), (22.18) на $\tau = 0$ для уравнений (22.18),

(6.34) позволяет найти зависимости (R – внешний радиус)

$$T = f_1(m, L, R), \quad (22.43)$$

$$P = f_2(m, L, R), \quad (22.44)$$

$$r = f_3(m, L, R). \quad (22.45)$$

В точке $m = M_1 < M$, $M_1 = M_{J+1/2}$, выбранной в качестве границы между ядром и оболочкой, должны выполняться три условия:

$$\begin{aligned} S_1 &= T_{J+1/2} - f_1(M_1, L_{J+1/2}, R) = 0, \\ S_2 &= P_{J+1/2} - f_2(M_1, L_{J+1/2}, R) = 0, \\ S_3 &= r_{J+1/2} - f_3(M_1, L_{J+1/2}, R) = 0. \end{aligned} \quad (22.46)$$

Здесь индексом $J + 1/2$ обозначена точка сшивки, в которой нужно выразить светимость $L_{J+1/2}$ и радиус $R_{J+1/2}$ через их значения в целой точке J . В силу постоянства L имеем

$$L_{J+1/2} = L_J = L. \quad (22.47)$$

Запишем закон сохранения массы в виде

$$4\pi \frac{r_{J+1/2}^3 - r_J^3}{3 \Delta M_{J+1/2}} = \frac{1}{\rho_{J+1/4}}, \quad (22.48)$$

где $\Delta M_{J+1/2}$ – масса в полуинтервале $[J, J + 1/2]$. Для малых $r_{J+1/2} - r_J$ можно записать

$$r_{J+1/2}^3 = r_J^3 + 3r_J^2(r_{J+1/2} - r_J). \quad (22.49)$$

Определяя $\rho_{J+1/4}$ линейной интерполяцией по массе, получим окончательно для радиуса сшивки

$$\begin{aligned} r_{J+1/2} &= \\ &= r_J + \frac{\Delta M_{J+1/2}}{4\pi r_J^2} \frac{1}{\rho_{J+1/2} + \frac{\Delta M_{J+1/2}}{\Delta M_{J-1/2} + 2\Delta M_{J+1/2}} (\rho_{J-1/2} - \rho_{J+1/2})}. \end{aligned} \quad (22.50)$$

После подстановки (22.47), (22.50) в (22.46) получаем три соотношения, содержащих шесть неизвестных

$$T_{J+1/2}, \quad \rho_{J+1/2}, \quad r_J, \quad L_J, \quad \rho_{J-1/2}, \quad R.$$

Все эти неизвестные, кроме R , входят также в $4J$ разностных уравнения для внутренней части звезды (22.30)–(22.33), содержащие $4J + 2$ неизвестных (см. п. б). Вместе с уравнениями (22.46) получается $4J + 3$ уравнения с тем же числом неизвестных, т.е. замкнутая система. Решение этой системы проводится итеративным методом Ньютона с решением линейризованных уравнений [52] методом прогонки. Большая часть машинного времени тратится при этом на решение уравнений в оболочке. Для экономии машинного времени модели оболочек могут быть рассчитаны заранее и соотношения (22.46) заданы в виде таблиц.

г) Особенности пришивки атмосферы при построении самосогласованных моделей с потерей массы [52]. Описанный выше метод точной пришивки может быть применен для стационарно истекающей оболочки (атмосферы). Истекающую атмосферу удобно характеризовать значением плотности в критической точке ρ_{cr} вместо радиуса фотосферы R . Вторым параметром служит полный (с учетом кинетической) поток энергии от звезды L_* . Переход к истекающей атмосфере в формулах (22.43)–(22.50) осуществляется заменой R и L на ρ_{cr} и L_* . После завершения итераций и нахождения точных значений L_* и ρ_{cr} уравнения истекающей атмосферы могут быть проинтегрированы от критической точки с $r = r_{cr}$ наружу до радиуса фотосферы для определения положения звезды на диаграмме Герцшпрунга–Рессела. Данная схема расчетов применима, для оптически толстой истекающей атмосферы с $R > r_{cr}$ и использовалась в [290]. Система уравнений для истекающей атмосферы и алгоритм ее решения даны в [52] и изложены в § 32.

Методика самосогласованного расчета эволюции звезды с оптически тонкой истекающей атмосферой при $R < r_{cr}$ не разработана.

д) Метод счета эволюции, устойчивый при наличии различных характерных времен. На некоторых стадиях эволюции (красные гиганты с плотным ядром и протяженной оболочкой, фазы неустойчивого ядерного горения в вырожденных ядрах и слоевых источниках (см. гл. 9), предсверхновые с переходом от статической к динамической эволюции (см. гл. 10), звезды, аккрецирующие или теряющие массу, и т.д.) изложенные выше методы оказываются неустойчивыми и счет эволюции становится невозможным. Неустойчивость связана с большим различием характерных времен, связанных с переносом тепла,

$$\tau_h(Z) = \frac{3c_p \kappa \rho^2 Z^2}{4acT^3} \quad (Z - \text{характерный размер}) \quad (22.51)$$

в различных частях звезды (ядре и оболочке). Для устойчивости неявной по времени разностной схемы в методе Шварцшильда и Хенны необходим достаточно большой шаг по времени

$$\Delta t > \tau_h(r). \quad (22.52)$$

При быстрой эволюции с характерным временем τ_n в ядре, определяемым ядерным горением или быстрым сжатием, неравенство (22.52) может нарушиться из-за $\tau_n < \tau_h(r)$ в оболочке и расчет эволюции данными методами оказывается невозможным. В [592] предложен метод, который остается устойчивым при временном шаге $\Delta t < \tau_h$ и позволяет проводить расчет при большой разнице характерных времен $\tau_h(r)$ по звезде. Запишем уравнения равновесия (22.1)–(22.4) в виде

$$\frac{d \ln P}{d \ln m} = - \frac{Gm^2}{4\pi r^4 P}, \quad (22.53)$$

$$\frac{d \ln r}{d \ln m} = \frac{m}{4\pi r^3 \rho}, \quad (22.54)$$

$$\frac{dL_r}{d \ln m} = m \left(-T \frac{\partial S}{\partial t} + \epsilon_n - \epsilon_\nu \right), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S(t) - S(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (22.55)$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln m} = - \frac{3 \kappa L_r m}{64 \pi^2 a c T^4 r^4} \quad (\text{лучистое равновесие}), \quad (22.56a)$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln m} = \gamma_2 \frac{d \ln P}{d \ln m} \quad (\text{конвективное ядро}). \quad (22.56b)$$

Если ввести четырехкомпонентный вектор $y_j = (\ln P, \ln r, L_r, \ln T)$, независимую переменную $x = \ln m$ и соответствующий вектор правых частей $\Phi_i(x, y_i)$, то система (22.53)–(22.56) запишется в виде

$$\frac{dy_i}{dx} = \Phi_i(x, y_i). \quad (22.57)$$

Сделаем разбиение звезды на J счетных интервалов и будем рассматривать значения всех функций только в целых счетных точках. Рассмотрим следующее [592] разностное представление системы (22.57):

$$y_i^{(j+1)} - y_i^{(j)} = \Delta x^{(j)} [\beta_i \Phi_i(x^{(j)}, y_i^{(j)}) + (1 - \beta_i) \Phi_i(x^{(j+1)}, y_i^{(j+1)})], \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad \Delta x^{(j)} = x^{(j+1)} - x^{(j)}. \quad (22.58)$$

Здесь β_i — четыре произвольных числа $0 \leq \beta_i \leq 1$. Отметим, что разностное представление (22.30)–(22.33) эквивалентно выбору всех $\beta_i = 1/2$. В данном методе в разностных аналогах уравнений гидростатического равновесия (22.53) и (22.54) полагается $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. В [592] показано, что разностная схема решения системы (22.58) с помощью линеаризации и метода итераций Ньютона, аналогичная методу Хенни, оказывается устойчивой при двух выборах β_3 и β_4 :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \beta_3 = 1, \quad \beta_4 = 0; \\ (2) \quad & \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 1. \end{aligned} \quad (22.59)$$

В этом случае одна из функций $y_3 = L_r$ либо $y_4 = \ln T$ вычисляется явно, а другая неявно по пространству:

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_3^{(j+1)} - y_3^{(j)} = \Phi_3(x^{(j)}, y^{(j)}) \Delta x^{(j)}, \\ & y_4^{(j+1)} - y_4^{(j)} = \Phi_4(x^{(j+1)}, y^{(j+1)}) \Delta x^{(j)}; \\ (2) \quad & y_3^{(j+1)} - y_3^{(j)} = \Phi_3(x^{(j+1)}, y^{(j+1)}) \Delta x^{(j)}, \\ & y_4^{(j+1)} - y_4^{(j)} = \Phi_4(x^{(j)}, y^{(j)}) \Delta x^{(j)}. \end{aligned} \quad (22.60)$$

Шаг по времени можно проводить с помощью соотношений (22.27), (22.41), (22.42). В [592] рассматривались упрощенные граничные условия:

$$\begin{aligned} r = L_r = 0 \quad \text{при} \quad m = 0, \\ P = T = 0 \quad \text{при} \quad m = M. \end{aligned} \quad (22.61)$$

В [594] устойчивый метод распространен на динамические стадии эволюции. На этих стадиях в правую часть уравнения (22.53) добавляется

динамический член

$$\begin{aligned}
 & - \frac{m}{4\pi r^2 P} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \\
 & = - \frac{m}{4\pi r(t)P(t)} \left[\frac{\ln r(t) - 2 \ln r(t - \Delta t) + \ln r(t - 2 \Delta t)}{\Delta t^2} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\ln r(t) - \ln r(t - \Delta t)}{\Delta t} \right)^2 \right], \quad (22.62)
 \end{aligned}$$

а система разностных уравнений сохраняет функциональный вид (22.58). При коэффициентах (22.59) решение системы методом Хенли оказывается устойчивым и при нарушении условия (22.52), что позволяет, например, осуществить плавный переход от статической к динамической эволюции при исследовании взрывов сверхновых (см. гл. 10).

§ 23. Равновесие вращающихся замагниченных звезд

Вращение наблюдается во многих звездах и является их неотъемлемым свойством [199]. В теории равновесия роль вращения сводится к нарушению сферической симметрии и связанному с этим принципиальному усложнению методов построения равновесных решений. В достаточно широкой области угловых моментов вращающиеся звезды обладают аксиальной симметрией. При слабой сжимаемости и больших вращательных моментах устойчивыми оказываются только трехосные фигуры, аналогичные эллипсоидам Якоби несжимаемой жидкости [220]. Напротив, при большой сжимаемости истечение вещества с экватора начинается раньше, чем станет энергетически выгодным образование трехосных фигур. Для политропных звезд*) с уравнением состояния $P = K\rho^{1+1/n}$ при $n < 0,808$ раньше образуется трехосная конфигурация, а при $n > 0,808$ раньше наступает истечение с экватора [437]. Теория эволюции быстровращающихся звезд далека от своего завершения. Фактически имеется лишь теория равновесных конфигураций баротропных звезд с уравнением состояния $P(\rho)$. Расчеты эволюции в большинстве своем ведутся при упрощающих предположениях, не всегда оправданных в случае быстрого вращения.

Звезды обладают, как правило, магнитным полем. Динамическое влияние поля относительно невелико, но оно может быть важным для установления закона вращения, меридиональной циркуляции, химического перемешивания, что сильно влияет на эволюцию. Еще более важна роль магнитного поля в различных проявлениях звездной активности: вспышек, нетеплового нагрева, образования хромосферы, короны и звездного ветра, появления мощных ультрафиолетовых избытков в спектрах звезд. Магнитное поле тесно связано с вращением, так как для его усиления динамическими механизмами роль вращения является определяющей.

*) Теория равновесия невращающихся политропных звезд построена Эмденом (1907) и подробно изложена в книге [218] (см. § 34).

С математической точки зрения построение моделей в случае аксиальной симметрии для вращающихся баротропных звезд и замагниченных звезд с бесконечной проводимостью имеет много общего.

а) **Уравнения равновесия вращающихся замагниченных звезд.** Стационарное состояние звезды с магнитным полем в условиях бесконечной проводимости определяется системой уравнений [96, 124, 6, 75]

$$\nabla P + \rho \nabla \Phi + \frac{1}{4\pi} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0, \quad (23.1)$$

$$\nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (23.2)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad \Phi = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (dV - \text{элемент объема}), \quad (23.3)$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (23.4a)$$

или

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) - \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v} = 0, \quad (23.4b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (23.5)$$

Здесь $\vec{B}$ — напряженность магнитного поля, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ — векторный оператор Гамильтона. Из векторной алгебры следуют равенства

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \nabla(B^2) - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}, \quad (23.6)$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}.$$

Для аксиально симметричной ($\partial/\partial\varphi = 0$) звезды с баротропным уравнением состояния и чисто вращательным движением ($v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = \Omega r$) в цилиндрических координатах (r, φ, z) система (23.1)–(23.5) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega^2 r \right) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial B_\varphi^2}{\partial r} + \frac{\partial B_z^2}{\partial r} - 2B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} + 2 \frac{B_\varphi^2}{r} \right) = 0, \quad (23.7)$$

$$B_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{B_r B_\varphi}{r} = 0, \quad (23.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial B_\varphi^2}{\partial z} + \frac{\partial B_r^2}{\partial z} - 2B_r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) = 0, \quad (23.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho, \quad (23.10)$$

$$B_r \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + B_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0 \text{ или } B_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + B_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad (23.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (23.12)$$

Уравнение неразрывности (23.2) тождественно зануляется, оставляя некоторую свободу выбора угловой скорости $\Omega(r, z)$. Уравнение движения по углу сводится к соотношению (23.8), которое выражает условие отсутствия азимутальной магнитной силы. Из уравнения (23.12) следует, что

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (23.13)$$

Учтя (23.13) в (23.8) и (23.11), получаем решение

$$B_\varphi = \frac{F_B(\psi)}{r}, \quad \Omega = F_\Omega(\psi). \quad (23.13a)$$

Кроме того, уравнения (23.8), (23.11), (23.2) имеют частное решение

$$B_r = B_z = 0, \quad B_\varphi, \Omega \neq 0, \quad (23.14a)$$

$$B_r = 0, \quad B_z = B_z(r), \quad \Omega = \Omega(r), \quad B_\varphi = B_\varphi(r). \quad (23.14b)$$

Решение (23.13) с $\Omega = \text{const}$ рассматривалось в [492]. Для случая (23.14a) уравнения движения (23.7), (23.9) сводятся к виду

$$\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{B_\varphi^2}{8\pi} \right) + \nabla \Phi + \left(\frac{B_\varphi^2}{4\pi \rho r^2} - \Omega^2 \right) \frac{\nabla r^2}{2} = 0. \quad (23.15)$$

В случае (23.14b) из тех же уравнений имеем

$$\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \Phi + \left(\frac{B_\varphi^2}{4\pi \rho r^2} - \Omega^2 \right) \frac{\nabla r^2}{2} + \frac{1}{8\pi \rho} (\nabla B^2 \cdot \nabla r) \nabla r = 0, \quad (23.16)$$

$$B^2 = B_\varphi^2 + B_z^2.$$

При этом силовые линии магнитного поля накручиваются на круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью вращения. Аналогично можно получить уравнение равновесия, когда поле определяется соотношением (23.13). Выпишем уравнение равновесия (23.1) в сферических координатах (R, θ, φ) в аксиально-симметричном случае в отсутствие поля:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \Phi - \frac{\Omega^2}{2} \nabla (R^2 \sin^2 \theta) = 0, \quad (23.17)$$

которое решается совместно с уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 4\pi G \rho. \quad (23.18)$$

б) Условия существования стационарных решений. Для баротропной среды можно ввести энтальпию

$$H(\rho) = \int \frac{dP(\rho)}{\rho}.$$

Тогда (23.17) запишется в виде

$$\nabla (H + \Phi) - \frac{\Omega^2}{2} \nabla (R^2 \sin^2 \theta) = 0. \quad (23.19)$$

Решение уравнения (23.19) существует не при любых $\Omega(R, \theta)$. Для вывода ограничений на функцию $\Omega(R, \theta)$, возьмем ротор от уравнения (23.19). Ввиду того что $\nabla \times (\nabla S) = 0$ (S — скаляр), получаем

$$\nabla(R^2 \sin^2 \theta) \times \nabla \Omega^2 = 0. \quad (23.20)$$

Условие (23.20) сводится к тому, что $\Omega = \Omega(R \sin \theta)$. Таким образом, угловая скорость постоянна на цилиндрах, оси которых совпадают с осью вращения (теорема Пуанкаре) [199]. В цилиндрических координатах $\Omega = \Omega(r)$.

При наличии тороидального поля (23.14а) условие совместности находится аналогично из (23.15) [284]

$$\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla B_\varphi^2 - \nabla \left(4\pi \Omega^2 - \frac{B_\varphi^2}{\rho r^2} \right) \times \nabla r^2 = 0. \quad (23.21)$$

Условие (23.21) дает ограничение на совместное задание функций $\Omega(r, z)$ и $B_\varphi(r, z)$. Аналогично выводятся ограничения на функции $B_\varphi(r)$, $B_z(r)$, $\Omega(r)$, из уравнения (23.16), а также на функции ψ , $F_B(\psi)$ и $F_\Omega(\psi)$ для (23.13).

Решение уравнений равновесия (23.17), (23.15) или (23.16) при заданном $P(\rho)$ и допустимых функциях $\Omega(r, z)$, $B(r, z)$ ищется для звезды данной массы с нулевой плотностью на границе. Граничные значения полей могут быть различными в зависимости от задания поверхностных токов i_s . Вне звезды $B_\varphi = 0$. При $i_s = 0$ тороидальная компонента $B_\varphi = 0$ у поверхности внутри звезды, а граничные значения полоидальных компонент полей B_r и B_z должны удовлетворять условиям совместности. Решение уравнений равновесия звезд с магнитным полем довольно сложно. Оно может быть получено путем разложения в ряд по полиномам и присоединенным функциям Лежандра. Например, для нечетных мультиполей величину ψ из (23.13) представляют в виде [493] (i — нечетные)

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(R) \sin \theta P_i^1(\cos \theta) B_r = \sum i(i+1) \frac{b_i}{r^2} P_i(\cos \theta).$$

При этом оставляется небольшое число членов разложения. Конфигурации магнитного поля могут быть достаточно сложными, но получаемые формы звезд обычно мало отличаются от сферически-симметричных.

в) Метод самосогласованного поля. В отсутствие магнитного поля уменьшается произвол в равновесных решениях, который сводится к одной функции $\Omega(r)$. Для построения моделей вращающихся звезд с баротропным уравнением состояния предложено много методов применимых вплоть до предельного вращения [199]. Одним из лучших является метод самосогласованного поля, предложенный Острайкером и Марком [519]. Рассмотрим усовершенствованную версию этого метода, разработанную С.И. Блинниковым [64].

Исходным для решения является баротропное уравнение состояния $P(\rho)$, уравнение равновесия в виде (23.19) и интегральное представление для гравитационного потенциала (23.3). Равновесное состояние находится для звезды данной массы M с заданным распределением $\Omega(r)$

или удельного вращательного момента

$$j = \Omega^2 r = j(p), \quad p = \frac{m_r}{M}, \quad m_r - \text{масса внутри цилиндра радиуса } r. \quad (23.22)$$

Из условия (23.20) следует существование центробежного потенциала

$$\chi(r) = \int_0^r \Omega^2 r' dr', \quad \nabla \chi = \Omega^2 r. \quad (23.23)$$

Построение модели ведется методом последовательных приближений. Вначале выбирается некоторое начальное распределение плотности $\rho = \rho_0(\vec{r})$ и находится гравитационный потенциал $\Phi(r)$ из интегрального представления (23.3). Зная $\rho_0(\vec{r})$ можно найти функцию $m_r(r)$ и из (23.22) определить $\Omega(r)$ по заданному $j(p)$. После этого находится центробежный потенциал $\chi(r)$ из (23.23). При наличии центробежного потенциала можно записать интеграл уравнения равновесия

$$H + \Phi - \chi = B_s, \quad (23.24)$$

где $B_s = \Phi_s - \chi_s$ — полный потенциал на поверхности ($H_s = 0$). Определяя из (23.24) распределение $H(\vec{r})$, находим новое распределение плотности $\rho_1(\vec{r})$, обращая энтальпию $H(\rho)$. Если $\rho_1(\vec{r})$ отличается от $\rho_0(\vec{r})$ больше, чем на заданную величину, то $\rho_1(\vec{r})$ принимается за начальное приближение и итерации проводятся до получения самосогласованности в пределах заданной точности.

Для реализации данной схемы на практике необходимо вычислить потенциал $\Phi(\vec{r})$ и массу m_r по известному распределению плотности $\rho(\vec{r})$. Расчеты проводятся в безразмерных переменных

$$\rho' = \rho/\rho_c, \quad x = R/R_0, \quad s = r/R_0, \quad (23.25)$$

$$\varphi = \Phi/4\pi G \rho_c R_0^2, \quad \chi' = \chi/4\pi G \rho_c R_0^2 B'_s = B_s/4\pi G \rho_c R_0^2.$$

Здесь R_0 — максимальный радиус звезды, заранее не известный, ρ_c — центральная плотность. Для вычисления φ используется разложение по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$, $\mu = \cos \theta$. Введем величину $\rho_l(x)^*$, которую можно вычислить по формуле Гаусса [1, 137]

$$\rho_l(x) \equiv \int_0^1 \rho(x, \mu) P_{2l}(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^{N_\mu} \rho(x, \mu_j) w_j P_{2l}(\mu_j), \quad (23.26)$$

здесь μ_j — абсциссы, w_j — веса гауссовой квадратуры на отрезке $[0, 1]$. При таком определении $\rho_l(x)$ имеем

$$\rho(x, \mu) = \sum_l (4l+1) \rho_l(x) P_{2l}(\mu). \quad (23.27)$$

*) Штрихи у безразмерных функций ρ' , χ' и B'_s в дальнейшем опускаем.

Если использовать $\rho_l(x)$ в виде (23.26), (23.27), то выражение для потенциала $\varphi(x, \mu)$ с помощью интегрального представления (23.3) получается в виде

$$\varphi(x, \mu) = \sum_l \dot{\varphi}_l(x) P_{2l}(\mu), \quad (23.28)$$

$$\varphi_l(x) = - \frac{1}{x^{2l+1}} \int_0^x \rho_l(y) y^{2l+2} dy - x^{2l} \int_x^1 \rho_l(y) y^{-2l+1} dy. \quad (23.29)$$

Выражения (23.26)–(23.28) содержат только четные полиномы Лежандра ввиду симметрии относительно плоскости экватора. Значения функций $\varphi_l(x)$ необходимо знать в тех же точках, в которых задано $\rho_l(x)$. Задав функцию $\rho_l(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ с шагом $h = 1/N_x$, интегралы в (23.29) можно вычислить по формуле Симпсона [1]. После вычисления $\varphi_l(x)$ находим $\varphi(x, \mu)$ с помощью (23.28). Функции $p(s)$ по заданному распределению плотности $\rho(x, \mu)$ имеют вид (см. (23.22))

$$1 - p(s) = \frac{1}{s} \int_s^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt{1-s^2/x^2}} \rho(x, \mu) d\mu / M', \quad (23.30)$$

где

$$M' = M/4\pi\rho_c R_0^3 = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \rho(x, \mu) d\mu. \quad (23.31)$$

Внутренний интеграл в (23.30) вычисляется с помощью разложения (23.27) в виде $(h(s, \mu) = \sqrt{1-s^2/x^2})$

$$\begin{aligned} \int_0^{h(s, \mu)} \rho(x, \mu) d\mu &= \sum_l (4l+1) \rho_l(x) \int_0^{h(s, \mu)} P_{2l}(\mu) d\mu = \\ &= \sum_l \rho_l(x) \{P_{2l+1}[h(s, x)] - P_{2l-1}[h(s, x)]\}. \end{aligned} \quad (23.32)$$

Если функция $p(s)$ вычисляется в точках $s = s_i$ ($i = 1, \dots, N_x$), а значения $\rho_l(x)$ задаются в точках $x = x_k$ ($k = 1, \dots, N_x$), то удобно завести массив из $\frac{1}{2} N_x(N_x - 1)$ величин $h(s_i, x_k)$, $x_k > s_i$, чтобы не вычислять на каждом шагу одни и те же величины $\sqrt{1-s_i^2/x_k^2}$. Вычисление внешнего интеграла в (23.30) производится с помощью формулы Симпсона, аналогично (23.29).

После вычисления $p(s)$ находится $\Omega(s)$ по формуле (23.22) с помощью заданного $j(p)$ и центробежный потенциал $\chi(s) = \chi(x \sqrt{1-\mu^2})$ по формуле (23.23). Если задано твердотельное вращение, то имеем

$$\chi = \beta x^2(1-\mu^2), \quad \beta = \Omega^2/8\pi G \rho_c. \quad (23.33)$$

Если вращение задается в виде закона $\Omega = \Omega(s)$, то χ вычисляется сразу по формуле (23.23) без нахождения $p(s)$.

Следующим шагом является вычисление энтальпии H (в тех же единицах, что и потенциалы φ и χ в (23.25)). Константа B_s в (23.24) определяется как максимум величины $|\chi - \varphi|$ при $x = 1$. При этом обеспечивает

ся то, что новая конфигурация всегда будет заключена внутри сферы радиуса $x = 1$. В расчетах [65, 284] бралось $B_s = \varphi - \chi|_{x=1, \mu=0}$, т.е. на экваторе. Знание распределения размерной энтропии $H = 4\pi G \rho_c R_0^2 H'(x, \mu)$ позволяет с помощью (23.18) найти новое приближение к распределению плотности $\rho_1(x, \mu)$. Если при построении модели фиксируется ρ_c , то известно $H_c(\rho_c)$ и значение максимального радиуса R_0 находится по формуле

$$R_0^2 = H_c / 4\pi G \rho_c H'_c. \quad (23.34)$$

Если же фиксирована масса звезды M , то значение R_0 , а также ρ_c после каждой итерации находится из совместного решения уравнений (23.31), (23.34). Поверхность звезды определяется из условия $H' = 0$. Вообще говоря, поверхность не проходит через узлы сетки (x_k, μ_j) , поэтому для ее нахождения необходимо применять интерполяцию. Вне поверхности имеет место $H < 0$, в этих точках полагается $\rho_1(x, \mu) = 0$. Итерации заканчиваются, когда

$$|\rho_0 - \rho_1| / \rho_1 < \epsilon \quad (23.35)$$

во всех точках, кроме тех, где $\rho_1 < 10^{-6}$. Для не очень сжатых фигур $R_e/R_p \leq 3$ ($R_e = R_0$ — экваториальный, R_p — полярный радиусы) в [64] полагалось $\epsilon = 10^{-5}$. Для быстрого вращения и сильного сжатия требования к точности снижались до $\epsilon = 10^{-3}$. Интегральная относительная ошибка в решении Δ оценивается с помощью теоремы вириала [145, 437]

$$\Delta = (W + 2T + 3 \int P dV) / |W|, \quad (23.36)$$

где W — гравитационная, T — кинетическая энергии.

При малой сжимаемости вещества возможно существование равновесных конфигураций большой сплюснутости. В этом случае разложение плотности по полиномам Лежандра в сферических координатах (23.27) не дает достаточной точности. Для построения равновесных моделей методом самосогласованного поля можно воспользоваться сфероидальными координатами (ξ, η) , связь которых с цилиндрическими (r, z) определяется формулами [163]

$$z = R_k \xi \eta, \quad r = R_k [(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}. \quad (23.37)$$

Параметр сфероидальных координат R_k в расчетах полагается равным R_0 . В этих координатах плотность представляется в виде (вместо (23.27), (23.26)) [163]

$$(\xi^2 + \eta^2) \rho(\xi, \eta) = \sum_n d_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (23.28)$$

$$d_{2n}(\xi) = (4n+1) \int_0^1 (\xi^2 + \eta^2) \rho(\xi, \eta) P_{2n}(\eta) d\eta, \quad (23.39)$$

а потенциал (вместо (23.28), (23.29))

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_n \varphi_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (23.40)$$

$$\varphi_{2n}(\xi) = 4\pi G R_k^2 [q_{2n}(\xi) \int_0^\xi p_{2n}(x) d_{2n}(x) dx + p_{2n}(\xi) \int_\xi^\infty q_{2n}(x) d_{2n}(x) dx]. \quad (23.41)$$

Отношение полярного R_p к экваториальному R_e радиусу для политропных моделей с предельным вращением ($\Omega(r) = \text{const}$)

n	γ	R_p/R_e	Литературный источник
3	1,333	0,6516	[64]
1,5	1,6667	0,6149	[437, 64]
1	2	0,5580	[437]
0,808	2,238	0,5215	[437]
0,6	2,6667	0,465	[64]
0,5	3	0,4378	[38]

Здесь $p_n(x)$, $q_n(x)$ – функции Лежандра от мнимого аргумента первого и второго рода [140]. Однородно вращающиеся модели в сфероидальных координатах изучались в работе [38].

Расчеты, проведенные в [38, 64], позволили получить отношение R_p/R_e для предельно вращающихся моделей, приведенное в табл. 22 из [38]. Результаты в последней строке табл. 22 получены с помощью сфероидальных координат. Вариант метода самосогласованного поля, предложенный в [383а], оказался устойчивым для произвольно сплюснутых и даже для неодносвязных фигур. Этот метод, аналогично [64], использует разложение по номиналам Лежандра в сферической системе координат (23.28), но вместо задания полной массы M и распределения углового момента j в (23.22) в [64], в методе [383а] при построении модели фиксируются центральная плотность и либо отношение полуосей диска, либо положение внешней и внутренней границ в случае торообразной фигуры. Этот метод обобщен для получения равновесной трехосной фигуры в [383б].

г) **Общий интегральный метод.** Применение метода самосогласованного поля становится затруднительным или невозможным для сильно неоднородных тел (типа гало–ядро) из-за отсутствия сходимости итераций; для неосесимметричных и неодносвязных конфигураций этот метод вообще не применялся. Метод, позволяющий строить равновесные конфигурации для тел любой формы с любым распределением плотности рассмотрен в работе [351]. Он является обобщением предложенного в [352] метода построения равновесных фигур любой формы из несжимаемой жидкости.

Рассмотрим формулировку данного метода для тел с аксиальной и экваториальной симметрией [351] в сферических координатах (R, θ, φ) . По углу θ проводится разбиение на N_T эквидистантных точек

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} \frac{i-1}{N_T-1}, \quad (i = 1, \dots, N_T). \quad (23.42)$$

Радиус вдоль каждого угла θ_i разбивается на N_R точек

$$R_{ij} = R_j(\theta_i) = R_{\text{surf}}(\theta_i) \frac{j}{N_R}, \quad (j = 1, \dots, N_R). \quad (23.43)$$

Используя соотношения (23.25) – (23.29), можно найти значения гравитационного потенциала Φ_{ij} через значения плотности

$$\rho_{ij} = \rho(R_{ij}, \theta_i). \quad (23.44)$$

Получаем

$$\Phi_{00} = -4\pi G \sum_l \sin \theta_l \Delta \theta_l \sum_m R_{lm} \Delta R_{lm} \rho_{lm} \quad (\text{в центре}), \quad (23.45)$$

$$\Phi_{ij} = -4\pi G \sum_l \sin \theta_l \Delta \theta_l \sum_m R_{lm}^2 \Delta R_{lm} \sum_n f_{2n,lm}^{ij} P_{2n}(\cos \theta_i) P_{2n}(\cos \theta_l) \rho_{lm}, \quad (23.46)$$

$$(i = 1, \dots, N_T; \quad j = 1, \dots, N_R),$$

где

$$f_{2n}(R, R') = \begin{cases} R'^{2n}/R^{2n+1} & \text{при } R \geq R', \\ R^{2n}/R'^{2n+1} & \text{при } R < R', \end{cases} \quad (23.47)$$

$$f_{2n,lm}^{ij} = f_{2n}(R_{ij}, R_{lm}).$$

На поверхности, при $j = N_R$, $1 \leq i \leq N_T$ имеет место

$$\rho_{i,N_R} = \rho(R_{i,N_R}, \theta_i) = 0. \quad (23.48)$$

Значения $\Delta \theta_i$ и ΔR_{lm} – угловые и радиальные интервалы, умноженные на соответствующие веса, зависящие от применяемого метода численного интегрирования (см. например, (23.26)). В [351] использовался метод Симпсона при интегрировании по радиусу и трапеции по углу. Подставляя (23.45) – (23.47) в интеграл уравнения равновесия (23.24), записанный в каждой точке (θ_i, R_{ij}) и в центре, получаем, совместно с (23.48), нелинейную систему, состоящую из $(N_R + 1)N_T + 1$ уравнений, в которых неизвестными являются константа B_s , $N_T \cdot N_R + 1$ значений плотности ρ_{ij} , включая ρ_c , N_T значений поверхностного радиуса R_{i,N_R} и один параметр, характеризующий угловую скорость Ω_c . Общее число неизвестных на два больше, чем число уравнений, поэтому два параметра ρ_c или M , а также Ω_c или $R_{\text{surf}}(\pi/2)/R_{\text{surf}}(0)$ можно задавать произвольно, замыкая систему. При этом предполагается, что в (23.24) подставлено значение энтальпии $H(\rho)$ и однопараметрический закон $\Omega = \Omega(\Omega_c, r)$.

В [351] приведен явный вид уравнения (23.24) для политропы

$$P = K\rho^\gamma, \quad H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho^{\gamma-1} \quad (23.49)$$

и угловой скорости в виде

$$\Omega(r) = \Omega_c / (1 + r^2/A^2)^2, \quad \chi = -\frac{A^2 \Omega_c^2}{2(1 + r^2/A^2)}. \quad (23.50)$$

В этом случае получается следующая система нелинейных разностных уравнений:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho_c^{\gamma-1} + \Phi_{00} + \frac{A^2 \Omega_c^2}{2} = B_s, \quad (23.51)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho_{ij}^{\gamma-1} + \Phi_{ij} + \frac{A^2 \Omega_c^2}{2(1 + R_{ij}^2 \sin^2 \theta_i / A^2)} = B_s. \quad (23.52)$$

Решение нелинейной системы (23.51), (23.52), (23.48) проводилось в [351] итеративным методом Ньютона.

Использование общего интегрального метода требует больших затрат машинного времени. Для $N_s = 15$, $N_R = 40$ при задании ρ_c и Ω_c получается 616 нелинейных уравнений, для которых нужно $\sim 2,5$ с времени центрального процессора на одну итерацию при среднем числе операций в секунду, превышающем 50 миллионов (компьютер типа Крей-1). Для достижения относительной точности 10^{-4} требуется около десяти итераций.

§ 24. Эволюция вращающихся звезд

В реальных звездах баротропность отсутствует, $P = P(\rho, T)$ и уравнение равновесия нужно дополнить уравнениями энергии и теплопереноса. Выпишем уравнения гидродинамики, аналогичные (23.1)–(23.2), в эйлеровых сферических координатах (r, θ, φ) в отсутствие магнитного поля с оставлением членов, линейных по скоростям v_r, v_θ , которые считаются малыми. Так же как в § 23, звезда принимается аксиально симметричной, $\partial/\partial\varphi = 0$. Имеем

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega^2 r \sin^2 \theta = 0, \quad v_\varphi = \Omega r \sin \theta, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} - \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (24.2)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0 \quad (\text{лучистая зона}), \quad (24.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) = 0. \quad (24.4)$$

Уравнение для Φ дано в (23.18). В конвективной зоне в правой части (24.3) нужно добавить конвективную вязкость, выравнивающую угловую скорость (см. § 29). В конвективном ядре можно приближенно считать, ввиду большой конвективной (турбулентной) вязкости,

$$\Omega = \text{const} \quad (\text{зона с адиабатической конвекцией}). \quad (24.3a)$$

Уравнение с вязкостью (29.1) нужно использовать во внешних слоях конвективных оболочек, при малой плотности, где циркуляционные скорости могут быть большими и в (29.4) параметр $\alpha \sim 1$. В обсуждаемой схеме расчета эволюции v_φ находится из (24.3) или (24.3a).

Уравнения энергии и переноса тепла для вращающейся звезды имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{l} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 l_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta l_\theta) = \\ &= \epsilon_n - \epsilon_\nu - T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_r \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (24.5)$$

$$\vec{l} = - \frac{4}{3} \frac{acT^3}{\kappa \rho} \nabla T \quad (\text{лучистое равновесие}), \quad (24.6)$$

$$\nabla T = \frac{T}{\rho} \gamma_2 \nabla P \quad (\text{адиабатическая конвекция}). \quad (24.7)$$

Запишем также уравнение для эволюционного изменения химического состава

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + v_r \frac{\partial x_i}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} =$$

$$= \begin{cases} -4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right), & i = \text{H}, \\ 4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right) - \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - m_\alpha \epsilon_{1^2\text{C}\alpha} / Q_{1^2\text{C}\alpha}, & i = {}^4\text{He}, \\ \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - \frac{m_{1^2\text{C}} \epsilon_{1^2\text{C}\alpha}}{Q_{1^2\text{C}\alpha}}, & i = {}^{12}\text{C}. \end{cases} \quad (24.8)$$

и аналогично для других реакций. Здесь $\vec{l} = (l_r, l_\theta, 0)$ эрг $\cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ — вектор потока тепла, ϵ_n определено в (22.7), а физические свойства вещества те же, что и для невращающейся звезды в § 22.

Существенное отличие эволюционных уравнений (24.1)–(24.8) от уравнений § 23 для баротропной среды состоит в необходимости учета скоростей v_r и v_θ , которые неизбежно появляются при наличии тепловых потоков.

а) Меридиональная циркуляция. Предположение о существовании стационарного состояния вращающейся звезды с нулевыми скоростями $v_r = v_\theta = 0$ в ряде случаев приводит к противоречию, известному, как парадокс фон Цейпеля [199]. Рассмотрим его вывод для твердотельно вращающейся звезды. При $v_r = v_\theta = 0$ уравнение равновесия сводится к (23.17). Согласно теореме Пуанкаре, для баротропных сред в равновесии должен существовать центробежный потенциал (23.23). С другой стороны, при существовании центробежного потенциала в (23.17) величина $dH = dP/\rho$ должна быть полным дифференциалом. Из (23.17) при учете (23.23) следует, что ∇P всюду параллелен $\nabla(\chi - \Phi)$, что возможно лишь в случае, когда поверхности постоянного давления совпадают с эквипотенциалами $W = \chi - \Phi$ и в звезде $P = P(W)$. Из полноты дифференциала dP/ρ следует условие $\rho = \rho(W)$, а уравнение состояния приводит к тому, что $T = T(W)$. Итак, при твердотельном вращении, а также при наличии другого центробежного потенциала в (23.23) равновесие с $v_r = v_\theta = 0$ возможно лишь при

$$P = P(W), \quad \rho = \rho(W), \quad T = T(W). \quad (24.9)$$

Учтя (24.9) в (24.6), (24.7), получаем

$$\vec{l} = \left(- \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dW} \right) \nabla W. \quad (24.10)$$

Из (24.10) находим

$$\nabla \cdot \vec{l} = \frac{d}{dW} \left(- \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dW} \right) |\nabla W|^2 + \left(- \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dW} \right) \nabla^2 W. \quad (24.11)$$

Для твердотельного вращения с учетом (23.18), (23.23) имеем

$$\nabla^2 W = 2\Omega^2 - 4\pi G\rho = f(W). \quad (24.12)$$

Коэффициент перед $|\nabla W|^2$ есть функция W , однако, ∇W меняется вдоль эквипотенциалов, так как расстояние между ними вдоль полюса меньше, чем вдоль экватора в силу сплюснутости вращающейся звезды. Тогда из (24.11) следует, что $\nabla \cdot \vec{l}$ также меняется на эквипотенциалах W . С другой стороны, в тепловом равновесии при $\partial/\partial t = v_r = v_\theta = 0$ из (24.5) следует постоянство $\nabla \cdot \vec{l}$ на эквипотенциалах, что и составляет парадокс фон Цейпеля. Таким образом, предположение о тепловом равновесии при $v_r = v_\theta = 0$ не выполняется. Нарушение теплового равновесия во вращающейся звезде приводит к тому, что охлаждающиеся области начинают погружаться, а нагревающиеся всплывать и возникает $v_r, v_\theta \neq 0$. Эти медленные движения называются меридиональной циркуляцией. Для общего случая вращения с центробежным потенциалом доказательство отсутствия теплового равновесия и возникновения циркуляции приведено в [199].

Меридиональной циркуляции посвящено много работ (см. обзоры в [157, 75]), где используются различные приближения. В приближении стационарной циркуляции в лучистой области при твердотельном вращении в глубоких слоях звезды происходит всплывание вещества на полюсе и погружение на экваторе, а во внешних слоях, где плотность мала ($\rho < \Omega^2/2\pi G$) — наоборот; при некоторых законах вращения направление циркуляции по всей звезде сохраняется [75, 199]. В отсутствие вязкости и магнитного поля решение для стационарной циркуляции имеет расходимость у поверхности. Например, для медленно и твердотельно вращающейся звезды с точечным источником энергии (модель Каулинга) радиальная скорость циркуляции в лучистой зоне есть [199]

$$v_r = \frac{LR^2}{GM^2} Y(r, \theta), \quad (24.13)$$

где

$$Y(r, \theta) = \{ \alpha \beta_0(r) P_2(\theta) + \alpha^2 (\bar{\rho}/\rho_0) [\beta_2(r) P_2(\theta) + \beta_4(r) P_4(\theta)] \} / (n - 3/2), \quad (24.14)$$

$$\alpha = \frac{\Omega^2 R^3}{GM}, \quad n = \frac{d \ln \rho_0}{d \ln T_0}.$$

Здесь ρ_0, T_0 — распределения плотности и температуры в сферической звезде, $\bar{\rho}$ — средняя плотность звезды, $\beta_i(r)$ — гладкие функции радиуса ~ 1 . Отметим, что помимо поверхности при $\rho_0 \rightarrow 0$ расходимость v_r имеет место у границы конвективного ядра, где $n \rightarrow 3/2$. В дифференциально вращающихся звездах расходимость v_r у поверхности возникает в первом члене разложения по параметру α . В [75, 199] отмечается, что при учете вязкости, магнитного поля или при отказе от условия стационарности особенность может быть устранена. Подробное изучение стационарной циркуляции с учетом вязкости было сделано Тассулем и Тассуль (см. работу [604] и ссылки в ней).

Влияние меридиональной циркуляции на эволюцию звезд проявляется в возможности перемешивания и выравнивания химического состава. Оценки, проведенные в [229] с учетом химических неоднородностей, привели к выводу о незначительности перемешивания за счет циркуля-

они даже у быстровращающихся звезд верхней части главной последовательности. Эти оценки нуждаются в количественном подтверждении.

б) Метод счета эволюции с учетом циркуляции. При расчете эволюции вращающейся звезды должны, вообще говоря, учитываться следующие физические процессы: 1) эволюция химического состава, 2) тепловая нестационарность, 3) нестационарная циркуляция, 4) обмен вращательным моментом за счет циркуляции, вязкости, магнитного поля, 5) химическое перемешивание, 6) потеря массы. Учет первых двух факторов не связан с принципиальными трудностями и проводится так же, как для невращающейся звезды, см. § 23. Вопрос о циркуляции в существующих эволюционных расчетах обычно обходится (см. обзор [199]) заданием ограничений на распределение угловой скорости, например, постоянство Ω на поверхностях обобщенного потенциала W [436]. Как показано в [445] это предположение не является оправданным и выравнивание Ω на эквипотенциалах при эволюции не происходит. Предположение о стационарной циркуляции приводит к появлению нефизических расхождений у поверхности (24.13), (24.14), поэтому корректный расчет эволюции вращающихся звезд требует рассмотрения нестационарной циркуляции. Обмен вращательным моментом и химическое перемешивание по звезде, помимо циркуляционных движений, связан с различными свойствами переноса. Действие микроскопических механизмов переноса: вязкости, диффузии и термодиффузии, обычно пренебрежимо мало за время эволюции звезды. Весьма эффективными могут быть турбулентные процессы переноса в областях развитой конвекции. Химический состав этих областей считается однородным из-за быстрого перемешивания, а ввиду большей турбулентной вязкости (см. § 29) угловая скорость в этих областях также можно считать постоянной. В [445] анализируется вопрос о влиянии неустойчивостей, связанных с вращением, на передачу момента и перемешивание. Если рассмотреть эту проблему с эволюционной точки зрения, то, очевидно, механические и тепловые процессы не могут привести звезду в неустойчивое состояние. Приход в такое состояние может быть связан с изменением условий устойчивости в результате химической эволюции. В [445] показано, что время развития подобных неустойчивостей сравнимо с характерным циркуляционным временем, поэтому рассмотренный ниже метод расчета с оставлением линейных по скорости членов автоматически учтет осесимметричные неустойчивые моды. Магнитное поле участвует в передаче момента как непосредственно, так и через влияние на меридиональную циркуляцию [199, 492, 493, 157]. В рассматриваемом методе магнитное поле не учитывается.

Самосогласованные методы расчета эволюции с потерей массы не вполне разработаны даже для невращающихся звезд (см. § 22 п.д). Во вращающихся звездах вопрос еще более усложняется из-за влияния центробежных и магнитных сил на истечение [471]. Будем считать массу звезды постоянной.

Исходными для расчета эволюции являются уравнения (24.1)–(24.8), (23.18) или (23.3). Предлагаемый метод содержит черты самосогласованного метода (см. § 23, п.в) и метода Хенни (§ 22, п.б) и обобщает метод работы [436] на наличие циркуляции. Требуется найти решение $8 + i$ уравнений, i – число рассматриваемых в расчетах элементов, от-

носителем того же числа неизвестных

$$\rho, T, v_r, v_\theta, v_\varphi, l_r, l_\theta, \Phi, x_i. \quad (24.15)$$

Для построения начальной модели можно задаться распределением энтропии по звезде, например, из неврашающейся химически однородной модели той же массы, и найти механически равновесную модель, например, одним из методов § 23. Все временные производные величины $D^{(i)}$ в уравнениях (24.1)–(24.5), (24.8) заменяются конечными разностями

$$\frac{\partial D^{(i)}}{\partial t} = \frac{D^{(i)}(t) - D^{(i)}(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (24.16)$$

Звезда разбивается на N_T точек по углу θ_j , $0 < \theta_j < \pi/2$, $j = 1, \dots, N_T$, и N_R точек по радиусу r_{ij} , $i = 1, \dots, N_R$. Дифференциальные уравнения заменяются на конечно-разностные. Помимо неизвестных в точках разбиения, исключая центр, дополнительными неизвестными являются центральные значения ρ_c и T_c , а также N_T значений внешнего радиуса. Для определения этих неизвестных используется условие постоянства массы, например, в виде (23.31) для определения ρ_c и условие (22.15), определяющее давление в N_T граничных точках для определения внешнего радиуса $r_{NR, j}$, $j = 1, \dots, N_T$. Во вращающейся звезде вместо g в (22.15) нужно использовать эффективное значение

$$g_{\text{ef}} = |\nabla(\Phi - \chi)|_{NR, j}. \quad (24.17)$$

В силу существования оси и плоскости симметрии $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ нужно учесть равенство там нулю производных $\partial/\partial\theta$ от всех величин (24.15), кроме того, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ обращаются в нуль сами величины $l_\theta = v_\theta = 0$, а при $\theta = 0$ на оси симметрии имеет место $v_\varphi = 0$. На внешней поверхности $r_{NR, j}$ следует также учесть условие

$$(l_n)_{NR, j} = \frac{ac}{4} r_{NR, j}^2 T_{NR, j}^4,$$

$$l_n = \frac{\sqrt{l_r^2 + \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2} l_\theta^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2}} - \text{нормальная к поверхности составляющая теплового потока}, \quad (24.18)$$

$$r_s(\theta_j) \equiv r_{NR, j},$$

аналогичное (22.11). В итоге, число неизвестных должно совпадать с числом разностных уравнений. Блок-схема описанного метода расчета эволюции приведена на рис. 24. В схеме на рис. 24, а все величины определяются по схеме, неявной относительно времени (см. (22.41), (22.42)). На стадии горения водорода новое распределение химического состава, возможно, достаточно определять явным образом, как на рис. 24, б. Здесь указано также возможное разделение итерационного процесса на части, что потребует

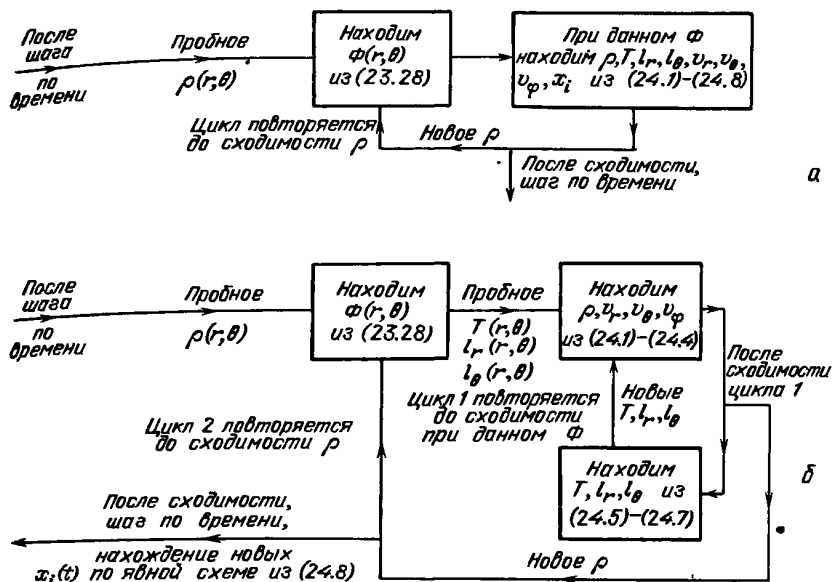


Рис. 24. Возможные блок-схемы для расчетов эволюции вращающейся звезды с учетом циркуляции. Везде имеются в виду разностные аналоги соответствующих уравнений

меньшего объема памяти, но может увеличить время счета. Примерная размерность разностной системы уравнений составляет $(7 + i) \times N_T \times N_R$ для схемы на рис. 24, а, для схемы на рис. 24, б размерности равны $\sim 4 \times N_T \times N_R$ и $\sim 3 \times N_T \times N_R$ для внутреннего и внешнего итерационных блоков, соответственно. Получение достаточной точности расчетов в данном методе возможно только при использовании суперкомпьютеров. Каждый из блоков нахождения величин $\rho, T, l_r, l_\theta, v_r, v_\theta, v_\phi, x_i$ на рис. 23 состоит в решении нелинейной системы разностных уравнений итеративным методом типа Хенни. В самой общей постановке можно вообще отказаться от итеративных циклов и, используя разностную запись уравнения Пуассона (23.46), находить все величины (24.15), включая Φ в едином итерационном процессе, аналогично общему интегральному методу из § 23, п. г. При этом получается система из $\sim (8 + i) \times N_T \times N_R$ нелинейных разностных уравнений.

§ 25. Наблюдения областей звездообразования

Исследования областей звездообразования стали возможными благодаря успехам наблюдений в инфракрасной ($\lambda = 1-100$ мкм) и субмиллиметровой ($\lambda = 0,1-1$ мм) областях спектра. Согласно теоретическим представлениям [637], образование звезды является результатом развития неустойчивости (тепловой или гравитационной) в плотном межзвездном облаке, ведущей к гидродинамическому сжатию облака или его части и образованию сравнительно плотного, оптически непрозрачного ядра. Ядро, окруженное плотной газопылевой оболочкой, аккрецирующей или (и) истекающей наружу, должно иметь большой размер $R \geq 10^3 R_\odot$, низкую температуру фотосферы $T \leq 500$ К и доступно наблюдениям только в длинноволновой области спектра ($\lambda \geq 2$ мкм).

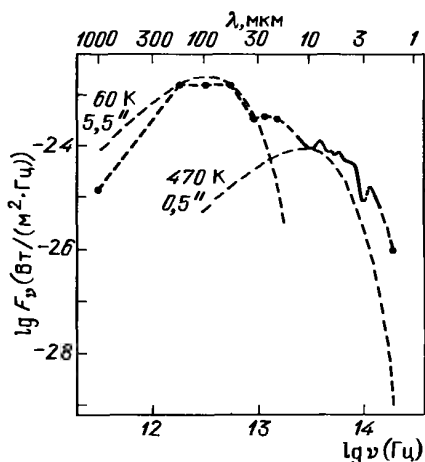
Наземные наблюдения в диапазоне 2,2–20 мкм областей ожидаемого звездообразования в созвездиях Ориона, Единорога и др. дали важные результаты. В этих областях расположены молодые звездные скопления (ассоциации), области НII, темные облака*), центральные конденсации молекулярных облаков, мазерные и инфракрасные источники. Наблюдения позволили получить данные о 30 объектах, свойства которых близки к свойствам протозвезд на стадии после образования непрозрачного ядра [641]. Светимость этих протозвезд в среднем равна $\sim 10^3 L_\odot$, но в отдельных случаях достигает $2 \cdot 10^5 L_\odot$ или $25 L_\odot$. Основной поток излучения идет в области длин волн $\lambda > 2$ мкм, а найденный от некоторых источников оптический поток много меньше инфракрасного. Спектр одного из источников (NGC 2264) проведен на рис. 25 из [641]. Все источники связаны с молекулярными облаками и в большинстве из них наблюдаются H_2O -мазеры. Некоторые источники находятся внутри компактных НII-зон, также расположенных в молекулярных облаках. Размеры источников лежат в пределах от 10^3 до $10^5 R_\odot$. В наблюдаемое от них излучение существенный вклад вносит пыль и различные молекулы (СО и др.).

Имеющиеся наблюдательные данные позволяют считать, что эти 30 объектов обладают характеристиками, являющимися следствием проявления текущей или недавней аккреции. В то же время имеющиеся данные не позволяют однозначно сделать вывод о том, что эти объекты находятся на стадии аккреции (см. § 26), а внутри их имеется гравитационный, а не термоядерный источник энергии.

Важным и до конца не объяснимым свойством этих объектов является наличие наблюдаемых скоростей истечения, достигающих $10-100$ км $\cdot$ с $^{-1}$. Эти скорости много больше характерных скоростей свободного падения в облаках, составляющих ~ 1 км $\cdot$ с $^{-1}$, но много меньше скоростей истечения, 100 км $\cdot$ с $^{-1}$ наблюдаемых у горячих звезд [489]. Поток массы при этом значительно больше наблюдаемого потока из горячих звезд. Возможно, что данный тип истечения характерен для мас-

*) В темных газопылевых облаках поглощение в оптическом диапазоне составляет $\leq 10^m$.

Рис. 25. Распределение энергии в инфракрасном источнике NGC 2264 в области $1,6 \div 1000$ мкм. Непрерывная линия — данные спектрофотометрии, штриховые отрезки — области интерполяции. Тонкие штриховые линии — теоретические планковские спектры круглого источника с указанной температурой и угловым диаметром



сивных звезд на стадиях перехода от протозвезды к главной последовательности. Он может быть объяснен истечением в условиях большой оптической толщи, когда на уровне критической точки имеет место $\tau_K \gg 1$. При этом радиус фотосферы превышает критический ($r_f > r_K$), в отличие от горячих звезд [98], где ускорение вещества связывается с лучистым давлением в линиях, а средняя оптическая толщина потока мала ($\tau_K \ll 1$). Отсутствие удовлетворительной теории этого явления привело к появлению гипотезы о существенной роли каких-то неучтенных или неизвестных до сих пор процессов внутри звезд для истечения вещества и образования протозвезд [337], созвучной с идеями, высказанными В.А. Амбарцумяном [7]. Одной из вероятных причин отсутствия наблюдаемой аккреции в упомянутых 30-и источниках является то, что масса их может быть довольно большой $\geq 3-5 M_\odot$, так что стадия аккреции с преобладанием гравитационного источника энергии является слишком кратковременной, чтобы быть наблюдаемой. В то же время звезды меньшей массы $\sim 1 M_\odot$, у которых эта стадия достаточно продолжительная, могут быть более холодными и светить, в основном, в диапазоне $\lambda > 20$ мкм. Наблюдательные результаты, свидетельствующие в пользу этого предположения, получены при наземных и самолетных наблюдениях в дальней инфракрасной ($\lambda > 60$ мкм) и субмиллиметровой областях [440] и на инфракрасном спутнике ИРАС [505], позволяющем проводить наблюдения в области от 10 до 100 мкм.

Наблюдения глобулы Бока В335 в диапазоне 0,06–1 мм привели к обнаружению в центре ее очень холодного компактного источника с полной светимостью $\geq 5,3 L_\odot (D/400 \text{ пк})^2$, что превышает 70% полной светимости глобулы [440]. Плотность молекул H_2 в центральной конденсации $\geq 10^6 \text{ см}^{-3} (D/400 \text{ пк})^2$, масса центрального ядра $\sim 6,5 M_\odot (D/400 \text{ пк})^2$, а источником энергии может быть звезда с массой $\leq 2 M_\odot$ на стадии гравитационного сжатия. Интересно, что центральный источник не обнаружен в радио и в ближней инфракрасной области $\lambda \leq 10$ мкм. Спектр этого источника приведен на рис. 26 из [440]. Отсутствие излучения в этих диапазонах свидетельствует о существовании очень мощной пылевой оболочки.

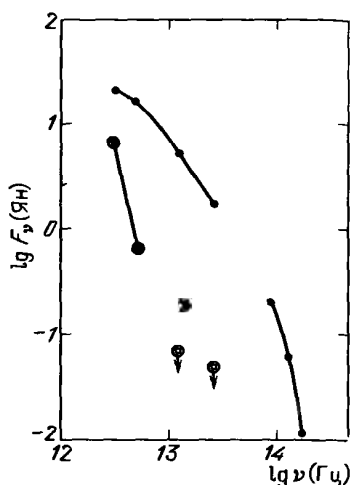
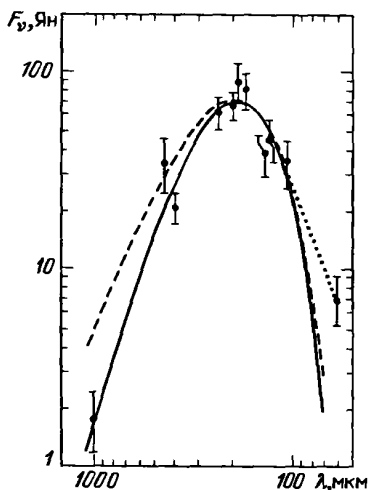


Рис. 26. Спектр источника в В 335. На экспериментальные точки наложены линии $\nu^2 B_\nu(15\text{ K})$ — сплошная линия, $\nu B_\nu(18\text{ K})$ — штриховая линия, $\nu^{-2.5}$ для $\lambda > 110\text{ мкм}$ — пунктирная линия, $1\text{ Ян} = 10^{-26}\text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$, $B_\nu(T)$ — планковское распределение (5.14)

Рис. 27. Распределение энергии для двух инфракрасных источников в темном облаке В 5, данные с ИРАС относятся к области частот $\nu < 3 \cdot 10^{13}\text{ Гц}$, $\bullet$ — источник IRS 1, $\circ$ — источник IRS 2

Данный источник является первым примером из возможно обширного класса протозвезд низкой светимости, видимых только в дальнем инфракрасном и субмиллиметровом диапазонах.

Формирующиеся звезды с массой порядка солнечной были найдены в темном облаке Барнард 5 (B5) [272], темном облаке Хамельон 1 [264], а также в пылевом облаке L 1551 [347] при наблюдениях со спутника ИРАС. Всего в этих работах сообщается об обнаружении более десяти источников данного типа. Светимости источников, в основном, не превышают $10 L_\odot$, а у некоторых составляют $\sim 1 L_\odot$. Температура наблюдаемой пыли в некоторых источниках мала $T_{\text{п}} = 20\text{--}60\text{ K}$, а размер излучаемой области достигает 10^{17} см . Наблюдаемые источники находятся, вероятно, на разных этапах стадии звездообразования, в том числе в самом начале гравитационного коллапса (IRS 2 из [272]). Спектры этих источников IRS 1 и IRS 2 из [272] приведены на рис. 27, см. также [273].

§ 26. Сферически-симметричный коллапс межзвездных облаков

Рассмотрим физические процессы, происходящие в облаке, которое сжимается и превращается в протозвезду. На начальной стадии облако является прозрачным для излучения.

а) Тепловой баланс оптически прозрачного облака. Основными механизмами охлаждения газа в облаке молекулярного водорода являются столкновительные возбуждения тонкой структуры иона C II и атома OI , передача энергии пыли при столкновении с ней атомов и молекул. Ионы

СП образуются в молекулярном облаке, благодаря действию космических лучей и фонового ультрафиолетового излучения. Если τ_{CR} — толщина для проникновения космических лучей и жесткого излучения внутрь облака, то скорости охлаждения молекулярного облака различными механизмами равны [463]

$$\Lambda_{\text{СП}} = 9,0 \cdot 10^{19} e^{-\tau_{\text{CR}}} \rho e^{-92/T} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (26.1)$$

$$\Lambda_{\text{OI}} = 2,5 \cdot 10^{20} \rho T^{0,33} e^{-228/T} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (26.2)$$

$$\Lambda_d = 1,1 \cdot 10^{14} \rho T^{1/2} (T - T_d) \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (26.3)$$

Здесь T берется в К, 1/10 часть углерода предполагается находящейся в газовой фазе, непрозрачность, соответствующая поглощению космических лучей и входящая в определение τ_{CR} , принята равной $\kappa_{\text{CR}} = 300 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$, T_d — температура пыли, определяемая балансом нагрева пыли газом со скоростью Λ_d из (26.3) и тепловым охлаждением пылинок при излучении с их поверхности с потоком

$$j = 2,3 \cdot 10^{-4} k_P T_d^4 \text{ эрг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (26.4)$$

Радиус пылинки принят равным $r_d = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, а число пылинок на один грамм газа $N_d = 2 \cdot 10^{11}$. Средняя планковская непрозрачность вещества пылинки есть (см. (6.9))

$$k_P = 3 \cdot 10^{-5} T_d^3 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}. \quad (26.5)$$

Нагрев облака осуществляется космическими лучами со скоростью

$$\Gamma_{\text{CR}} = 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-\tau_{\text{CR}}} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \quad (26.6)$$

и адиабатическим сжатием при свободном падении

$$\Gamma_f = 3,8 \cdot 10^4 \rho^{1/2} T \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (26.7)$$

Решение уравнений баланса

$$\Gamma_{\text{CR}} + \Gamma_f = \Lambda_{\text{СП}} + \Lambda_{\text{OI}} + \Lambda_d, \quad \Lambda_d = j \quad (26.8)$$

определяет температуру газа и пыли в облаке. Рассматривая облако однородной плотности и относя τ_{CR} к центру облака, получаем равновесные значения температуры газа в облаках разной массы и разной плотности, приведенные в табл. 23. Из табл. 23 видно, что в широком диапазоне плотностей температура облака меняется слабо, оставаясь между 5 и 11 К при $\rho = 10^{-19} - 10^{-13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Более подробный анализ механизмов охлаждения плотных межзвездных облаков сделан в [131].

б) Уравнения для коллапса облака. В сферически-симметричном приближении при учете процессов излучения и переноса тепла движение газа в лагранжевой системе описывается следующими уравнениями (ср. (22.1) — (22.4)):

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial m} (P + \Pi) + \frac{Gm}{r^2} = 0 - \text{уравнение движения}, \quad (26.9)$$

$$\partial r / \partial t = v, \quad (26.9a)$$

Значения равновесной температуры плотных газовых облаков

$\lg \rho \text{ (г} \cdot \text{см}^{-3}\text{)}$	$M = M_{\odot}$		$M = 10^3 M_{\odot}$	
	τ_{CR}	$T, \text{ K}$	τ_{CR}	$T, \text{ K}$
-22	4,2 (-2)	50,6	4,2 (-1)	48,1
-21	2,0 (-1)	25,4	2,0 (0)	24,6
-20	9,1 (-1)	15,6	9,1 (0)	16,3
-19	4,2 (0)	8,4	4,2 (+1)	6,6
-18	2,0 (+1)	5,1	2,0 (+2)	5,1
-17	9,1 (+1)	5,4	9,1 (+2)	5,4
-16	4,2 (+2)	6,3	4,2 (+3)	6,3
-15	2,0 (+3)	7,5	2,0 (+4)	7,5
-14	9,1 (+3)	9,1	9,1 (+4)	9,1
-13	4,2 (+4)	11,0	4,2 (+5)	11,0
-12	2,0 (+5)	13,3	2,0 (+6)	13,3

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} - \text{уравнение неразрывности,} \quad (26.10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{P + \Pi}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial L_r}{\partial m} = -\Lambda - \text{уравнение энергии,} \quad (26.11)$$

$$L_r^{\text{rad}} = -\frac{64\pi^2 a c r^4 T^3}{3\kappa} \frac{\partial T}{\partial m} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1}{\kappa \rho T} \frac{\partial T}{\partial r}\right)^{-1}, \quad (26.11a)$$

$$L_r^{\text{conv}} = f\pi r^2 c_p \rho \left(\frac{Gm}{Tr^2}\right)^{1/2} l^2 (\Delta T)^{3/2}, \quad (26.11b)$$

$$\Lambda = \Lambda_{\text{CI}} + \Lambda_{\text{OI}} + \Lambda_d - \Gamma_{\text{CR}}. \quad (26.12)$$

Здесь P есть давление газа в оптически тонкой области и сумма давлений газа и излучения в оптически толстой (см. § 1). При больших тепловых потоках динамическое действие излучения на вещество может быть существенным и в оптически тонких областях. Для его учета последний член в левой части уравнения (26.9) записывается в виде

$$\frac{Gm}{r^2} \left(1 - \frac{L}{L_{\text{cr}}}\right), \quad L_{\text{cr}} = \frac{4\pi c G M}{\kappa}, \quad (26.13)$$

где L_{cr} — критическая эддингтоновская светимость. Учет (26.13) сделан в работах [237–239]. В работах [463, 253, 630, 131–133] динамическим влиянием теплового потока в прозрачных областях пренебрегалось и вид (26.9) сохранялся. Выражение для радиативного потока энергии L_r^{rad}

в (26.11а) написано в таком виде, что при $\kappa r \gg 1$ оно переходило в известное выражение (6.32) или (22.4а) лучистой теплопроводности, а в случае малой оптической толщи $\kappa r \ll 1$ — стремилось бы к потоку свободного излучения (6.33) при $\tau = 0$. Выражение (26.11а) использовалось в [463], а также в [630] для описания процесса теплопередачи при любых оптических толщах и при этом полагалось $\Lambda = 0$. В [253] также полагалось $\Lambda = 0$, но для L_r^{rad} использовалось приближение лучистой теплопроводности (22.4а). В [132, 133] в оптически толстых слоях использовалось (22.4а) с $\Lambda = 0$, а в оптически тонких полагалось $\Lambda \neq 0$ и отбрасывался член $\partial L_r / \partial m$. Учет конвекции был сделан в [630, 253]. Коэффициент f выбирался в виде

$$f = \left(1 + \left| \frac{\Delta \nabla T}{\nabla T} \right| f_1 \right)^{-1}, \quad f_1 \approx 10^3 \quad (26.14)$$

для того, чтобы не завязать значение L_r^{conv} при не очень малых $|\Delta \nabla T / \nabla T|$.

Непрозрачность за счет рассеяния на пыли κ_d при $T \leq 2000$ К рассматривалась в [374, 441]

$$\kappa_d = Q \frac{\pi r_d^2 x_d}{m_d} = Q \frac{\pi r_d^2 \alpha_d}{\mu_N m_u}, \quad (26.15)$$

где x_d — весовая доля пыли, α_d — относительное число пылинок, μ_N — средний молекулярный вес газа в (2.16). Размеры пылинок составляют [132]

$$\begin{aligned} r_d &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ см для льда,} \\ r_d &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ см для SiO}_2, \\ r_d &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ см для графита.} \end{aligned} \quad (26.16)$$

График для Росселандова среднего $Q = Q_R(T)$ из [441] приведен на рис. 28. В [132, 133] эти значения использовались в расчетах при $\alpha_d = 10^{-12}$, $x_H = 0.7$, $x_{He} = 0.28$ для $T < 1500$ К. Для $T > 1700$ К использовались данные [129] (см. табл. 11), а при $1500 < T < 1700$ К проводилась интерполяция. Предполагается, что ледяная составляющая сублимирует при $T \geq 200$ К, а минеральная (C, SiO₂) — при $T \geq 1500$ К. В [630] принималось $\kappa_d = 0.01 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ при низких значениях температуры, использовались таблицы из [129] при $T > 4000$ К и таблицы из [257] при $2000 < T < 4000$, между κ (2000 К) и κ при низкой температуре проводилась плавная интерполяция. В [253] при $T > 5000$ К использовались таблицы из [129], при $1300 < T < 5000$ — таблицы, аналогичные [257], а при $T < 1300$ К

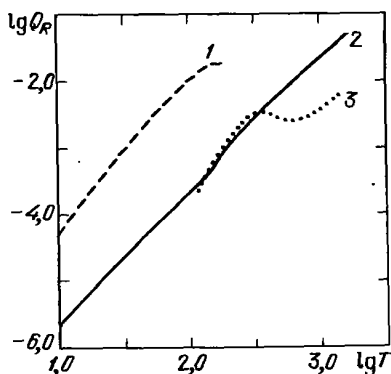


Рис. 28. Росселандово среднее коэффициента поглощения пыли для различных веществ: 1 — лед, 2 — графит, 3 — SiO₂

использовались данные из [373]. При расчетах в [463] полагалось $\kappa = \kappa_d = 0,15 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$.

Член с искусственной вязкостью Π использовался в [630, 253, 133] для возможности сквозного численного счета ударных волн в стандартном виде (см., например, [189])

$$\Pi = \mu \rho \left(\frac{\partial(r^2 v)}{\partial t} \right)^2, \quad \mu - \text{коэффициент квадратичной искусственной вязкости.} \quad (26.17)$$

Обсуждение начальных и граничных условий, необходимых для расчетов, дано в [463]. В качестве начального условия можно взять либо равновесную изотермическую сферу, радиус которой

$$R_{\text{сф}} = 0,41 \frac{GM}{\Re T}, \quad \Re - \text{газовая постоянная,} \quad (26.18)$$

либо однородное облако, масса которого не меньше джинсовской массы, неустойчивой относительно коллапса. Как отмечено в [463], начальное распределение плотности почти не влияет на ход коллапса.

Граничные условия оказываются более существенными. Обособившееся облако окружено газом. Если считать давление окружающего газа P_s постоянным, то радиус облака будет уменьшаться, если же положить $P_s = 0$, то внешняя граница расширяется, несмотря на быстрое сжатие в центре. В [463, 253] внешняя граница закреплялась и температура ее полагалась постоянной, а в [630, 132] постоянными считались внешнее давление и температура. Метод счета был лагранжев в [290, 132] и эйлеров в [463, 253, 642–646, 237, 584–586, 238, 239]. В работах [642–645, 237–239] рассматривалась постановка задачи, несколько отличная от изложенной выше. Газ и пыль рассматривались отдельно. Каждая компонента характеризовалась скоростью u_g и u_d , плотностью ρ_g и ρ_d , для которых записывались уравнения типа (26.9), (26.10) [645, 237]. Давление пыли считалось нулевым. Взаимодействие между газом и пылью учитывалось добавлением члена $\beta(u_g - u_d)$ в уравнение движения газа (типа (26.9)) и члена $[-\beta(u_g - u_d)\rho_g/\rho_d]$ в уравнение движения пыли. Величина β оценена в [645]. Учитывалось также динамическое влияние излучения на пыль в виде (26.13) с $\kappa = \kappa_d$ из (26.15). Вместо уравнений энергии для газа и пыли для определения температур на стадии непрозрачного ядра и падающей запыленной оболочки (кокона) применялась следующая процедура. Светимость на данном радиусе $r > r_s$ принималась в виде

$$L = L_s + \dot{M} \left(\frac{GM_s}{2r_s} - \frac{GM_s}{r_1} + \frac{u_1^2}{2} - \epsilon \right), \quad (26.19)$$

где L_s , M_s , r_s – светимость, масса и радиус центрального ядра, r_1 , u_1 – радиус и скорость на ударной волне, ϵ – энергия диссоциации H_2 , $\dot{M}$ – поток массы на центральное ядро. При рассмотрении массивных объектов центральное ядро большую часть времени является звездой главной последовательности. После нахождения L , из уравнения лучистой теплопроводности (6.32) находится температура излучения T_r . Температура пыли T_d полагается равной газовой T_g . В оптически толстой области $T_r = T_d$.

$$\begin{aligned} & \text{а вдали от ядра} \\ & T_d^5 = \frac{T_i L}{4\pi a c r^2} \end{aligned}$$

(26.20)

Данный подход использовался только для исследования коллапса массивных облаков с $M \geq 3 M_\odot$ при использовании эйлеровых координат.

Качественное согласие результатов имеется между всеми авторами, однако количественные различия между ними довольно велики.

в) Результаты расчетов. В бесконечной однородной среде при сжатии ее однородность сохраняется. Граничные условия во всех рассмотренных выше вариантах приводят к возникновению волны разгрузки, распространяющейся к центру со скоростью звука. Так как скорость не превышает скорости свободного падения, волна разгрузки успевает дойти до центра, при этом плотность падает наружу. В ходе дальнейшего коллапса контраст плотности нарастает, внешние слои сжимаются медленно, а внутри формируется плотное ядро. Наиболее хорошо изучен изотермический коллапс облака, для которого существует автомодельное решение [463]

$$\rho = 0,705 \frac{\sqrt{\kappa} T}{G} r^{-2}, \quad u = 3,28 \sqrt{\kappa T}. \quad (26.21)$$

Численный расчет данной задачи [463] показал выход основной массы облака на автомодельный режим даже при закреплённой внешней границе. Расчет проводился для $M = 1 M_\odot$, $T_i = 10$ K, $R_i = 1,63 \cdot 10^{17}$ см, $\rho_i = 1,1 \cdot 10^{-19}$ г·см⁻³. При этом для развития коллапса начальный радиус не должен превышать

$$R_{i,m} = 0,46 \frac{GM}{\sqrt{\kappa} T}. \quad (26.22)$$

Во всех численных расчетах [463, 131–133, 630, 253, 644, 645, 642] начальная стадия коллапса является изотермической, стремящейся к автомодельному режиму. Из-за сильной негомологичности при увеличении плотности на шесть порядков в центре образуется статическое оптически толстое ядро, в котором водород находится в молекулярной фазе. Начальная масса ядра составляет 10^{-3} – 10^{-2} от массы облака. Остальное вещество облака продолжает гидродинамическое сжатие и, проходя через фронт ударной волны, присоединяется к статическому ядру. Через короткое время от нескольких лет до нескольких сот лет, когда температура в ядре достигнет ~ 1900 K, начинается диссоциация молекулярного водорода. Центральная часть ядра вторично проходит стадию гидродинамического коллапса, при котором его плотность в центре возрастает еще на четыре-пять порядков. Еще через несколько лет плотное вторичное ядро возрастает настолько, что все следы первичного ядра исчезают, при этом его центральная температура составляет $(1 \div 2) \cdot 10^4$ K. Это ядро является истинным зародышем звезды и после исчезновения окружающей оболочки, аккрецирующей на ядро или улетающей наружу, превращается в звезду.

Судьба окружающей оболочки зависит от соотношения двух характерных времен: τ_{ac} — времени аккреции и τ_{KH} — времени Кельвина–Гельм-

Начальные состояния облаков и свойства образующихся гидростатически равновесных маломассенных протозвезд

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$R_0, \text{ см}$	$\rho_0, \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$T_0, \text{ К}$	$t, \text{ годы}$	$\frac{R^*}{R_{\odot}}$	$\rho_0, \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$T_c, \text{ К}$	$T_{\text{эф}}, \text{ К}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$	Ссылка на лит. источ- ник
0,1	1,71 (+16)	1,0 (-17)	3	2,94 (+4)	10,2	5,0 (-2)	1,5 (+5)	1,6 (+3)	0,6	[630]
0,2	3,42 (+16)	2,5 (-18)	3	5,56 (+4)	19,0	7,0 (-3)	2,0 (+5)	1,7 (+3)	2,6	[630]
0,5	8,56 (+16)	4,0 (-19)	3	1,34 (+5)	43,7	3,4 (-3)	2,5 (+5)	2,1 (+3)	32	[630]
1,0	1,71 (+17)	1,0 (-19)	3	2,67 (+5)	90,0	3,0 (-4)	3,5 (+5)	2,2 (+3)	165	[630]
0,25	4,1 (+16)	1,8 (-18)	10		1,6			3,7 (+3)	0,5	[463]
1,0	1,63 (+17)	1,1 (-19)	10	1,2 (+6)	2			4,4 (+3)	1,5	[463]
1,5	2,0 (+17)	4,9 (-19)	10		2,5			4,7 (+3)	3,0	[463]
2,0	3,26 (+17)	2,53 (-20)	10	1,4 (+6)	3,7			6,8 (+3)	30	[463]
1,0	1,63 (+16)	1,1 (-16)	10	3,5 (+4)	6			4,0 (+3)	9	[463]
1,0	1,46 (+17)	1,5 (-19)	10	2,46 (+5)	139	0,3	1 (+5)	560	2,4	[132]
1,0		1,1 (-19)	10		4,69				6,2	[584 586]

гольца, определяющего сжатие ядра за счет потерь энергии. Для маломассивных звезд с $M < 3M_{\odot}$ имеет место $\tau_{ac} < \tau_{KH}$, так что протозвезда аккрецирует всю окружающую оболочку и появляется в оптическом диапазоне, когда в центре еще не горят ядерные реакции. Квазистатическое сжатие протозвезды (стадия Т Тельца, см. гл. 8) приводит ее на главную последовательность, где загорается водород.

Для протозвезд с массой $M > 3M_{\odot}$ имеет место $\tau_{ac} > \tau_{KH}$ ядро превращается в звезду главной последовательности еще на стадии аккреции оболочки. Часть своей жизни на главной последовательности звезда полностью закрыта оболочкой и видна только как инфракрасный объект. При $M \leq 9M_{\odot}$ светимость центральной звезды недостаточна для выброса окружающей оболочки и масса звезды M_* , появившейся в оптическом диапазоне на главной последовательности, примерно равна массе облака M . При $M > 9M_{\odot}$ часть оболочки выматывается излучением звезды, так что

$$M_* \approx 3M^{1/2} \text{ при } M \geq 9M_{\odot}. \quad (26.23)$$

Эта зависимость $M_*(M)$, построенная на основе расчетов различных авторов, приведена на рис. 29 из [644]. Звезды с $M > 3M_{\odot}$ появляются в оптике сразу на главной последовательности. Параметры протозвезд с $M < 3M_{\odot}$, появляющиеся в оптике, количественно различаются довольно сильно в расчетах разных авторов (см. табл. 24). В настоящее время не вполне ясно, является ли это следствием различных начальных условий или сказывается различие используемых численных методов.

В процессе аккреции оболочка состоит из нескольких слоев с различными физическими свойствами, связанными с пылью [644]. Вокруг центрального статического оптически непрозрачного ядра радиусом $\sim 10^{12}$ см расположен аккреционный ударный фронт, а над ним до $r_R \approx 10^{14}$ см — оптически прозрачная зона падения вещества, где пыль совсем отсутствует. Сублимация силикатной пыли за счет взаимодействия с излучением ядра происходит вблизи r_R , так что при $r > r_R$ падающее вещество сильно непрозрачно в оптическом и ультрафиолетовом диапазоне. В этой области происходит переработка излучения ядра в инфракрасный диапазон. На радиусе $r_p \approx 10^{15}$ см оптическая толщина для выходящего инфракрасного излучения порядка единицы, поэтому r_p назван в [644] радиусом искусственной фотосферы. Вплоть до $r_v \approx 10^{16}$ см инфракрасное поле излучения достаточно интенсивно, чтобы сублимировать ледяную пыль, которая может существовать на поверхности холодных минеральных пылинков с $T \leq 150$ К. При $r > r_v$ падающее вещество имеет невозмущенный исходный состав, где присутствует ледяная пыль, которая более эффективно взаимодействует с излучением, чем силикатная (см. (26.11), (26.12)), и влияет на спектр излучения инфракрасной звезды (см. рис. 25–27). Структура аккрецирующих газопылевых оболочек (коконов) изучалась также в работах [237–239, 643, 646].

Как следует из табл. 24, свойства рождающейся оптической звезды небольшой массы не вполне ясны. Согласно [630, 132] они имеют большие радиусы и развитые конвективные зоны, так что продолжают свой путь к главной последовательности по конвективному треку Хаяши (см. гл. 8). Модель в $1M_{\odot}$ из [132] в табл. 24 является лучистой, однако, быстрое развитие в ней конвекции приведет к увеличению светимости L и

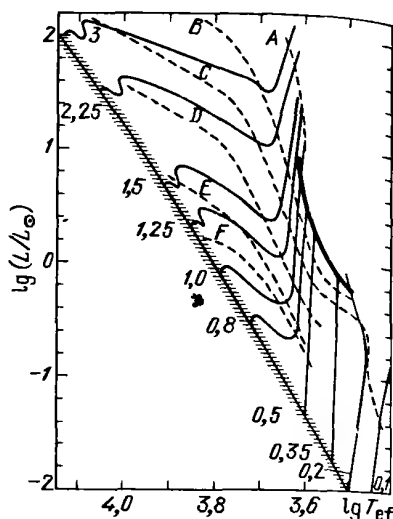
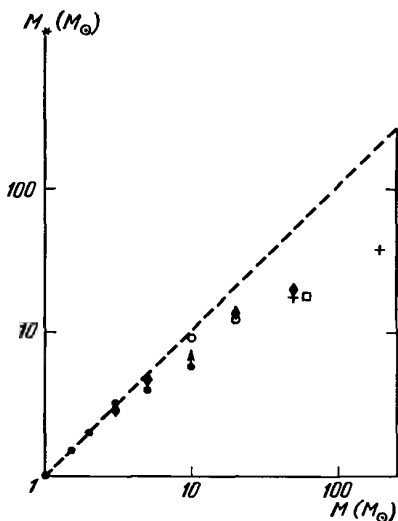


Рис. 29. Зависимость массы оптической звезды M_* от массы начального облака M после сферического коллапса, $\bullet$ — расчеты [463], $\blacklozenge$ — [630], $\square$ — [253], $+$ — [645], $\circ$ — [642]

Рис. 30. Теоретическая линия рождения звезд (жирная) с массами $0.2 - 1 M_\odot$ на диаграмме Герцшпрунга—Рессела ($\lg L - \lg T_{\text{ef}}$). Указаны также линии равного времени квазистатического сжатия к данному состоянию (возраст Кельвина—Гельмгольца) — штриховые линии, эволюционные треки движения к главной последовательности для звезд различных масс из работ [583, 406] — сплошные линии. Заштрихована линия главной последовательности. Изохроны: $A - 3 \cdot 10^4$ лет, $B - 3 \cdot 10^5$ лет, $C - 10^6$ лет, $D - 3 \cdot 10^6$ лет, $E - 10^7$ лет, $F - 2 \cdot 10^7$ лет.

Химический состав: $x_H = 0.708$, $x_{He} = 0.0$, $x_{He} = 0.272$, $x_{12C} = 0.00361$, $x_{14N} = 0.00120$, $x_{16O} = 0.00108$. Длина перемешивания берется по шкале высот плотности: $l = \rho/2 |\nabla \rho|$ (ср. (10.22))

T_{ef} , приблизив их к модели работы [630]. Напротив, модели из [463] появляются с малыми радиусами и светимостями, где конвекция слабее. У модели с $1 M_\odot$ из [463] имеется лучистое ядро, а половина массы лежит в конвективной зоне. У модели с $1.5 M_\odot$ конвекция гораздо слабее и звезда возникает в самом конце трека Хаяши, а для $M \geq 2 M_\odot$ стадия Хаяши отсутствует, так как звезда сразу появляется в радиативном состоянии.

Подробные расчеты образования протозвезды с $M = 1 M_\odot$ были также проведены в работах [584–586]. Метод был аналогичен [463], но учитывался перенос излучения в движущемся веществе в Эддингтоновском приближении (см. § 9), а также горение дейтерия. Для непрозрачности использовались таблицы из работ [129, 250, 374] (см. табл. 11, 12). Начальные и граничные условия были аналогичны [463]. Оптическая звезда возникла с параметрами $R = 4.69 R_\odot$, $L = 6.20 L_\odot$. На основе этих расчетов в [583] была построена линия рождения звезд малой массы $0.2 M_\odot \leq M \leq 1 M_\odot$, где они появляются в оптическом диапазоне и продолжают эволюцию к главной последовательности вдоль трека Хаяши (рис. 30). При

этом для всех протозвезд на стадии аккреции использовалось значение $\dot{M} = 10^{-5} M_{\odot} \cdot \text{год}^{-1}$, полученное в расчетах [584–586] для $1 M_{\odot}$. Как показано в [583], полученная таким образом линия рождения звезд находится в хорошем согласии с наблюдениями.

§ 27. Коллапс вращающихся облаков

Вращение коллапсирующих межзвездных облаков делает необходимым проведение двух и трехмерных расчетов. При исследовании осесимметричного гидродинамического сжатия используются как эйлеровы [296, 297, 502, 307–311, 610, 305, 606] так и лагранжевы [439, 514, 13] разностные схемы. Несмотря на сходство в физической постановке и в начальных условиях результаты различных авторов не совпадают не только количественно, но и качественно. Особенно велики различия для быстрого вращения. В эйлеровых схемах коллапс быстровращающихся облаков приводит к образованию тороидальной фигуры с дефицитом плотности в центре. Расчеты по лагранжевым схемам всегда приводят к образованию дискообразных тел, где центральная плотность максимальна. Как отмечалось в [439, 514], в эйлеровых схемах действует большая схемная сдвиговая вязкость, ведущая к нефизическому притоку вращательного момента к центру, что приводит к образованию тора. Результаты расчетов по лагранжевой схеме представляются более надежными. Изложим результаты, полученные в [13].

а) Система уравнений и свойства разностной схемы. Система уравнений, используемая для исследования двумерного коллапса, имеет вид

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}, \quad (27.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (27.2)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P + \rho \nabla \Phi = 0, \quad (27.3)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + P \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (27.4)$$

Здесь $\frac{d}{dt}$ — субстанционная (лагранжева) производная по времени, которая связана с эйлеровыми производными соотношением

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \quad (27.5)$$

Уравнение для Φ дано в (23.18). Во всех упомянутых двумерных расчетах, за исключением [296, 297], рассматривалось политропное уравнение состояния

$$P = K \rho^{\gamma}, \quad E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}, \quad (27.6)$$

причем K связано с энтропией и меняется в соответствии с (27.4) только при наличии ударных волн*). В [296, 297] учитывалась лучистая теплопроводность аналогично работе [463]. В [13] решение (27.1)–(27.6) искалось в цилиндрических координатах (r, φ, z) с нулевой плотностью и давлением на внешней границе облака для идеального газа с

$$\gamma = 5/3, \quad P = \rho \mathfrak{R} T. \quad (27.7)$$

Решение проводилось в безразмерных переменных с масштабными множителями

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1,492 \cdot 10^{-17} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad r_0 = z_0 = 3,81 \cdot 10^{16} \text{ см}, \\ t_0 &= 5 \cdot 10^{11} \text{ с}, \quad P_0 = \rho_0 r_0^2 / t_0^2, \\ u_{0\varphi} &= u_{0r} = u_{0z} = u_0 = r_0 / t_0, \quad \omega_0 = u_0 / r_0 = 1 / t_0, \\ \Phi_0 &= 4\pi G \rho_0 r_0^2, \quad T = u_0^2 / \mathfrak{R}, \quad \epsilon_0 = u_0^2 = P_0 / \rho_0. \end{aligned} \quad (27.8)$$

Здесь $\mathfrak{R}$ – газовая постоянная. Угловая скорость вращения есть

$$\omega = u_\varphi / r. \quad (27.9)$$

Система (27.1) – (27.6) с учетом (27.8) после замены

$$F \Rightarrow F \cdot F_0 \quad (27.10)$$

записывается в безразмерных переменных. При этом меняются только уравнения движения (27.3), Пуассона (23.18) и термодинамические соотношения, которые примут вид

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P + q \rho \nabla \Phi = 0, \quad (27.11)$$

$$P = \rho T, \quad E = \frac{T}{\gamma - 1}, \quad (27.12)$$

$$\nabla^2 \Phi = \rho. \quad (27.13)$$

Безразмерный параметр q есть

$$q = 4\pi G \rho_0 t_0^2 = 3,127. \quad (27.14)$$

В качестве начальных условий в [13] рассматривался однородный шар радиуса R со следующими безразмерными характеристиками:

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho^{(0)} &= 1; \quad P^{(0)} = 1/14; \quad R^{(0)} = 1; \quad \omega^{(0)} = 0,502; \\ u_\varphi^{(0)} &= r \omega^{(0)}, \quad u_r^{(0)} = u_z^{(0)} = 0; \end{aligned} \quad (27.15a)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \rho^{(0)} &= 1; \quad P^{(0)} = 1/560; \quad R^{(0)} = 1; \quad \omega^{(0)} = 1,004; \\ u_\varphi^{(0)} &= r \omega^{(0)}, \quad u_r^{(0)} = u_z^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (27.15b)$$

Подобные начальные условия принимались в расчетах [310]. В [13] использовалась разностная схема на нерегулярной треугольной сетке произвольной структуры в лагранжевой системе координат (рис. 31). Метод

*) Для политропы с $\gamma = 1$ $P = K \rho$ имеем $E = K \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ при $\rho > \rho_0$, $\rho_0 \rightarrow 0$.

Рис. 31. Расчетная область, разбитая на треугольные ячейки в начальный момент времени. Число узлов равно 227, число ячеек — 396

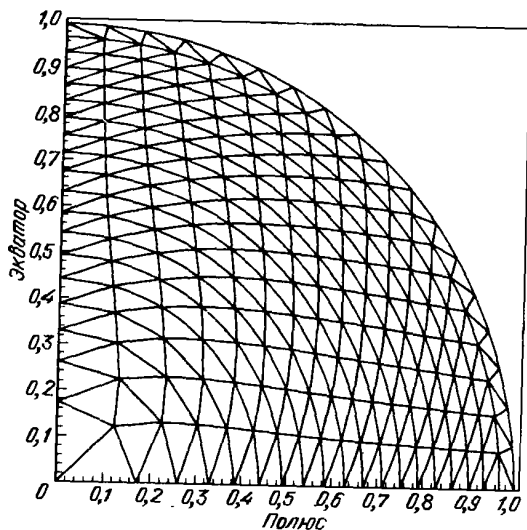
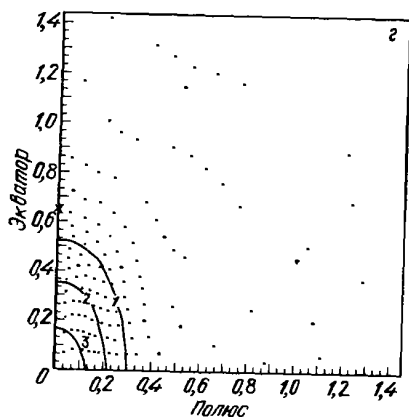
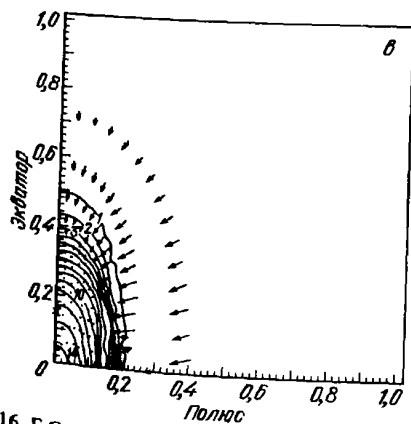
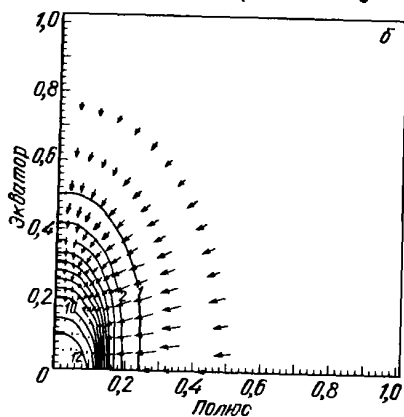
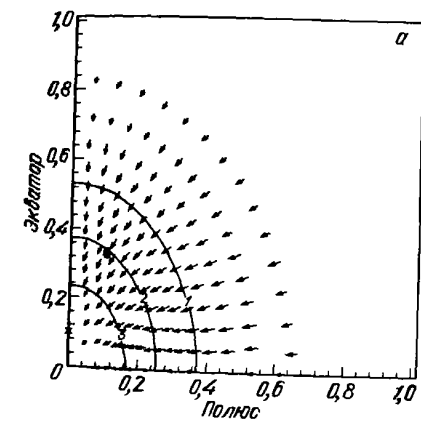


Рис. 32. Изменение формы облака в процессе коллапса в варианте (27.15а): а) $t = 1,0$, б) $t = 1,2$, в) $t = 1,3$, г) $t = 6,6$. Цифры задают линии равной плотности с $\rho_k = 3k$, стрелки задают поле скоростей и длины их пропорциональны скоростям



расчета основан на полностью консервативной разностной схеме двумерной гидродинамики [15]. Из-за учета гравитации в целом система перестает быть полностью консервативной, но условие сохранения углового момента локально и глобально остается справедливым. Теоретическое исследование неявных разностных схем на треугольных сетках выполнено в [10, 11]. Устойчивость используемой в [13] разностной схемы в линейном приближении доказана в [16] на примере модельной задачи.

б) Результаты расчетов. Представим результаты расчетов в безразмерном виде. В начальный момент граничное давление принималось равным $P(0)$, а далее линейно по t уменьшалось до нуля и с момента $t = 1$ до конца расчета $P_s = 0$. Плавное снижение давления сделано для устранения в начальный момент волны разрежения, искажающей граничные ячейки и ухудшающей точность счета. Вначале облако сжимается сильнее по оси z , чем в плоскости экватора. В варианте 1 из (27.15а) максимальное сжатие достигается при $t = 1,3$, когда центральная плотность $\rho_c = 45$. В этот момент зарождается ударная волна, прохождение которой затем приводит к расширению внешних областей. В этот момент соотношение осей сфероида находится в хорошем согласии с расчетами [310]. При $t = 3$ облако занимает шар радиуса $R = 1,5$ и расширение переходит в новое сжатие. Второе сжатие происходит более плавно, чем первое, ввиду увеличивающейся внутренней энергии облака.

К моменту $t = 6,6$ облако почти приходит в равновесное состояние, слабо колеблясь вокруг него. В последней временной точке счета кинетическая энергия вращения составляет $\sim 1\%$ от полной, центральная плотность $\rho_c = 10$, а внешний размер $R \approx 1,3$. Изменение формы облака и поля скоростей в процессе сжатия представлено на рис. 32а–г, а изменение со временем параметров $\alpha = E_{\text{внутр}}/|E_{\text{грав}}|$ и $\beta = E_{\text{вращ}}/|E_{\text{грав}}|$ — на рис. 33. В равновесии величина $\alpha + \beta$ стремится к $1/2$ в соответствии с теоремой вириала [145].

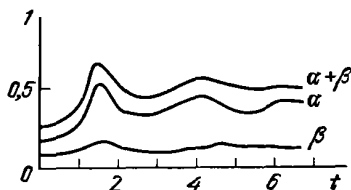


Рис. 33. Изменение параметров α , β и $\alpha + \beta$ со временем в варианте (27.15а). В последней точке при $t = 6,6$ имеет место $\alpha = 0,4048$, $\beta = 0,09451$

Во втором варианте из (27.15б) начальное давление было в 40 раз уменьшено, а вращение в два раза увеличено по сравнению с первым. Начальные значения α и β здесь составляли

$$\alpha_0 = 0,00425, \quad \beta_0 = 0,324. \quad (27.16)$$

Здесь также наблюдалось более сильное сжатие по оси z и монотонный рост плотности в центре. Однако в соседних с центром точках по оси z образовались уплотнения, в которых плотность превышала центральную. В плоскости экватора плотность плавно спадала от центра. Максимальное сжатие здесь достигалось при $t = 1,27$ с $\rho^{\text{max}} \approx 300$. Расчет был прек-

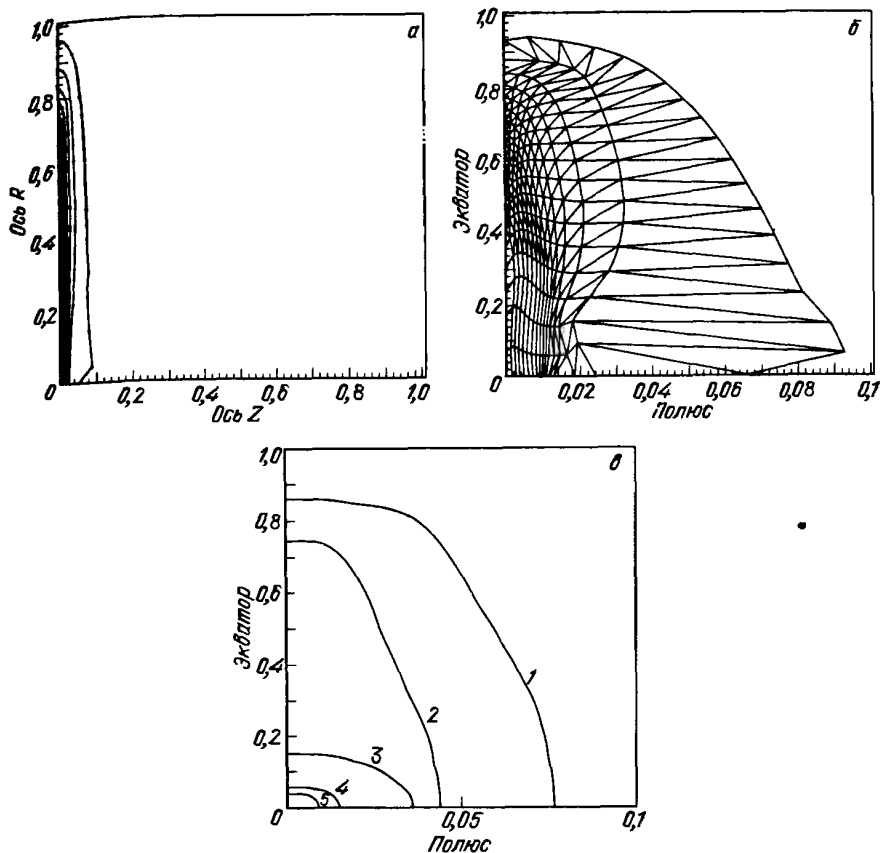


Рис. 34. Изменение формы облака в процессе коллапса в варианте (27.156): а) сетка на момент $t = 1,27$, б) "растянутая" сетка на тот же момент, в) линии уровня при $t = 1,27$. Цифры задают линии равной плотности $\rho_k = 10 k^2$

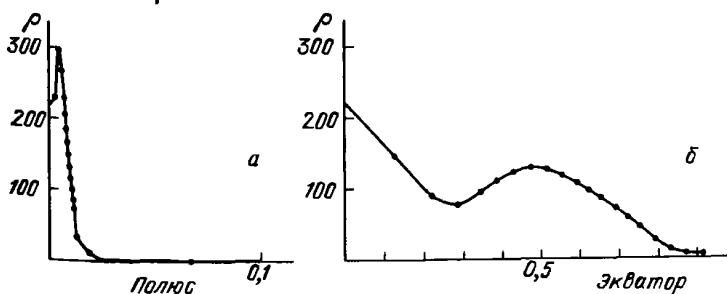


Рис. 35. Распределение плотности по полюсу $\rho(z)$ и экватору $\rho(r)$ в варианте (27.156)

ращен после начала расширения облака. Изменение формы облака со временем представлено на рис. 34. Сложное распределение плотности и появление вокруг центра уплотнения типа гантели могут быть связаны с появлением зависимости $\omega(z)$ при коллапсе и формированием поля скоростей циркуляционного типа. Очевидно, что и в этом расчете формируется диск, а не тор, в то время как в [310] образование тора получено и при больших начальных давлениях с $\alpha_0 = 0,0085$ и тем же вращением $\beta_0 = 0,324$. Распределение плотности вдоль полюса и на экваторе на последний счетный момент $t = 1,27$ представлены на рис. 35. Гантельная структура (рис. 35, а) содержит ~ 10 ячеек при общем их числе 396. Размер ее очень мал $\sim 0,01$. Она не была замечена в расчетах [296, 297, 502, 307–311, 610, 606, 305], возможно, из-за грубости счетной сетки вблизи центра. Раннее образование гантельной структуры в расчетах указывает на то, что она физически реальна и не является следствием численных ошибок. Образование протозвезд при коллапсе вращающихся облаков сильно обусловлено тепловыми процессами, рассмотренными в § 26. Однако их учет при наличии вращения по-настоящему не проводился.

ГЛАВА 8

ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД ДО ГЛАВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Как следует из расчетов коллапса облаков, изложенных в § 26, звезды с массами $M \geq 3M_{\odot}$ появляются в оптике сразу вблизи главной последовательности. Объекты меньшей массы часть времени существуют как оптические звезды, излучающие за счет энергии гравитационного сжатия. Рассмотрим эволюцию звезды от начала ее появления в оптике до прихода на главную последовательность, когда температура в центре становится достаточной для протекания ядерной реакции превращения водорода в гелий (см. обзор [281]).

§ 28. Стадия Хаяши

Эволюция звезд до главной последовательности происходит в условиях не очень высоких температур, когда неполная ионизация вещества и большая непрозрачность приводит к почти полной конвективности таких звезд. Впервые это было установлено в работах Хаяши [390, 391], который учел конвекцию при построении эволюционных треков сжимающихся звезд на ГР диаграмме (см. рис. 30, взятый из [583], построенный с учетом расчетов [406]). Эволюционные расчеты в рассмотренных ниже работах проводились методом Хэни, решая уравнения (22.1)–(22.4).

а) Ядерные реакции. Хотя на стадии сжатия к главной последовательности скорости реакций недостаточны для установления теплового равновесия, реакции с легкими элементами могут давать определенный вклад в тепловой баланс звезды. В [391] учитывались реакции горения ${}^2\text{D}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, малые количества которых образовались в начале расширения вселенной. Скорость энерговыделения в реакции ${}^2\text{D}(p, \gamma){}^3\text{He}$ дана в (14.7),

(14.8). Для двух других реакций имеем из [361] с учетом (13.3), (13.4), (13.16)

$${}^7\text{Li} (p, \alpha) {}^4\text{He}, \quad Q_6 = 17,348$$

$$N_A \langle {}^7\text{Li} p \rangle_\alpha = 8,04 \cdot 10^8 T_9^{-2/3} \exp \left[- \frac{8,471}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{30,068} \right)^2 \right] \times \\ \times (1 + 0,049 T_9^{1/3} + 0,23 T_9^{2/3} + 0,079 T_9 - 0,027 T_9^{4/3} - \\ - 0,023 T_9^{5/3}) + 1,54 \cdot 10^6 T_9^{-3/2} \exp \left(- \frac{4,479}{T_9} \right) + \\ + 1,07 \cdot 10^{10} T_9^{-3/2} \exp \left(- \frac{30,443}{T_9} \right),$$

$$\epsilon_{{}^7\text{Li} p \alpha} = 2,391 \cdot 10^{18} x_{{}^7\text{Li}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^7\text{Li} p \rangle_\alpha;$$

$${}^9\text{Be} (p, \alpha) {}^6\text{Li}, \quad Q_6 = 2,125$$

$$N_A \langle {}^9\text{Be} p \rangle_\alpha = 2,11 \cdot 10^{11} T_9^{-2/3} \exp \left[- \frac{10,359}{T_9^{1/3}} - \left(\frac{T_9}{0,520} \right)^2 \right] \times \\ \times (1 + 0,040 T_9^{1/3} + 1,09 T_9^{2/3} + 0,307 T_9 + 3,21 T_9^{4/3} + 2,30 T_9^{5/3}) + \\ + \frac{4,51 \cdot 10^8}{T_9} \exp \left(- \frac{3,046}{T_9} \right) + \frac{6,70 \cdot 10^8}{T_9^{3/4}} \exp \left(- \frac{5,160}{T_9} \right),$$

$$\epsilon_{{}^9\text{Be} p \alpha} = 2,278 \cdot 10^{17} x_{{}^9\text{Be}} x_{\text{H}} \rho N_A \langle {}^9\text{Be} p \rangle_\alpha.$$

В [406] проведены детальные расчеты эволюции к главной последовательности звезд с массами 0,5; 1,0; 1,25; 1,5; 2,25; 3,0 $M_\odot$. Здесь учитывались реакции р-р цикла (14.2)–(14.3а) и горение ${}^{12}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$ и ${}^{16}\text{O}$ в CNO-цикле (14.11). Соответствующие скорости реакций и энерговыделения определены формулами

$$p (p, e^+ \nu) {}^2\text{D} \text{ в (14.5) и (14.6) с } Q_6 = 1,192;$$

$${}^3\text{He} ({}^3\text{He}, 2p) {}^4\text{He} \text{ в (14.9), (14.10); } {}^{12}\text{C} (p, \gamma) {}^{13}\text{N} \text{ в (14.24);}$$

$${}^{14}\text{N} (p, \gamma) {}^{15}\text{O} \text{ в (14.13) и } {}^{16}\text{O} (p, \gamma) {}^{17}\text{F} \text{ в (14.28).}$$

Приведем также скорость реакции [389]

$${}^4\text{He} ({}^3\text{He}, \gamma) {}^7\text{Be}, \quad Q_6 = 1,586$$

$$N_A \langle {}^4\text{He} {}^3\text{He} \rangle_\gamma = 5,79 \cdot 10^6 (1 + 4,95 \cdot 10^{-2} T_9)^{-5/6} \times \\ \times T_9^{-2/3} \exp \left[- \frac{12,826}{T_9^{1/3}} (1 + 4,95 \cdot 10^{-2} T_9)^{1/3} \right],$$

$$\epsilon_{{}^4\text{He} {}^3\text{He}} = 1,275 \cdot 10^{17} x_{{}^4\text{He}} x_{{}^3\text{He}} \rho N_A \langle {}^4\text{He} {}^3\text{He} \rangle_\gamma.$$

Для остальных реакций рр- и CNO-циклов в [406] учитывалось тепловыделение, но они предполагались протекающими мгновенно. Например, продуктом реакции $p(p, e^+ \nu) {}^2\text{D}$ предполагается не ${}^2\text{D}$, а ${}^3\text{He}$, который появляется в быстротекающей реакции (14.2) ${}^2\text{D}(p, \gamma) {}^3\text{He}$, а в результате

реакции $^{12}\text{C}(\text{p}, \gamma)^{13}\text{N}$ в итоге появляется ^{14}N за счет быстрого протекания реакции 2 и 3 из (14.11). В [381] рассматривались также реакции $^6\text{Li}(\text{p}, \alpha)^3\text{He}$, $^{10}\text{B}(\text{p}, \alpha)^7\text{Be}$, $^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha)^8\text{Be}$, роль которых в энерговыделении невелика. Используемые в расчетах скорости всех реакций умножались на фактор экранирования (см. (17.20), (17.33) и (17.25)). Времена достижения главной последовательности t_{ms} звездами различной массы составили [406]

t_{ms} , годы	2,514 (6)	5,855 (6)	1,821 (7)	2,954 (7)	5,016 (7)	1,550 (8)
$M/M_{\odot}$	3,0	2,25	1,5	1,25	1,0	0,5

Поясним причины появления экстремумов на эволюционных треках [406] (рис. 30). Первый минимум справа связан с ростом лучистого ядра. По мере дальнейшего сжатия у звезд с $M \geq 0,8 M_{\odot}$ быстрое накопление ^3He в реакциях горения H и ^2D (14.5) – (14.8) и уменьшение ^{12}C в реакции (14.24) приводит к избытку градиента давления, замедляющего сжатие звезды, и к развитию конвекции в центре. В результате светимость звезды проходит через максимум; звезда с $M \leq M_{\odot}$ достигает главной последовательности после исчезновения конвективного ядра.

Для $M = 1,5 M_{\odot}$ уменьшение концентрации ^{12}C сопровождается уменьшением относительного вклада ядерной энергии в светимость. Роль гравитационной энергии начинает возрастать, когда звезда еще не достигла главной последовательности, что приводит к прохождению светимости через вторичный минимум и ее дальнейшему росту. После того, как концентрация ^{12}C достигнет равновесного значения, роль ядерной энергии вторично увеличивается, сжатие замедляется, светимость снова проходит через максимум и звезда достигает главной последовательности при ненулевой массе конвективного ядра. Появление новых экстремумов вблизи главной последовательности для $M \geq 1,25 M_{\odot}$ связано с увеличением роли CNO-цикла горения водорода в звездах большой массы, по сравнению с pp-циклом.

б) Неидеальность вещества. При рассмотрении эволюции звезд малых масс $M \leq 0,2 M_{\odot}$ учитывались кулоновские поправки к уравнению состояния и ионизация давлением ([403], см. § 4, п. ж). В работах [380–383, 210] учет ионизации давлением проводился более упрощенно. Сдвиг уровней учитывался путем умножения правой части в уравнении Саха (1.8) на множитель

$$\phi(r_0) = e^{(r_p/r_0)^3}, \quad (28.4)$$

где

$$r_0 = \left(\frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3} \text{ — среднее расстояние между ионами,}$$

$$r_p = \gamma \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \text{ — величина, близкая к боровскому радиусу; приведенная в табл. 25 из [380].}$$

В $K(T)$ в правой части (1.8), как и в [403], учитывалось вырождение пу-

Значения радиусов r_p

Элемент	$r_p, \text{\AA}$	Элемент	$r_p, \text{\AA}$	Элемент	$r_p, \text{\AA}$
H	0,795	N	0,53	Ni	1,07
H ⁻	2,12	O	0,45	Ca	2,03
H ₂	1,18	C	0,66	Al	1,21
H ₂ ⁺	1,30	S	0,82	Na	1,55
He	0,475	Si	1,06	K	2,06
He ⁺	0,400	Fe	1,22		
Ne	0,32	Mg	1,32		

тем использования соответствующих выражений для химического потенциала, см. § 2.

в) Эволюция звезд малых масс, минимальная масса звезды на главной последовательности, роль различных факторов. Эволюционные расчеты звезд малой массы, идущих к главной последовательности, проводились методом Хенри (см. § 22). Помимо различия в способе учета неидеальности, рассматривались различные химические составы и коэффициенты α при выборе пути перемешивания в (10.22). Зависимость эволюционных треков от α исследовалась в [381]. В [382, 383] исследовалась роль способа учета неидеальности, выбора граничных условий и горения дейтерия на эволюционный трек звезды, сжимающейся к главной последовательности.

Эволюционные треки звезд с $M = 0,07 - 0,11 M_{\odot}$, рассчитанные в [210], начиная от границы Хаяши, приведены на рис. 36. Химический состав соответствовал $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$, $x_Z = 0,03$. Атмосфера и оболочка

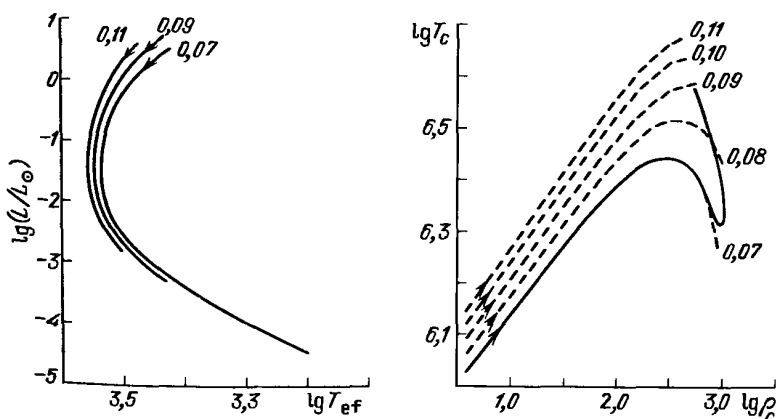


Рис. 36. Треки сферически симметричных звезд с массами 0,07, 0,09, 0,11 $M_{\odot}$ на диаграмме ГР

Рис. 37. Зависимость $\lg T_c (\lg \rho_c)$ для звезды с начальной массой 0,07 $M_{\odot}$ и темпом увеличения массы $10^{-12} M_{\odot}/\text{год}$ вблизи главной последовательности. Пунктирными линиями показаны кривые для сферически симметричных звезд с постоянными массами 0,07, 0,08, 0,09, 0,10, 0,11 $M_{\odot}$

Параметры звезд при максимальной центральной температуре T

$\frac{M}{M_{\odot}}$	t , годы	$\lg T_c$	$\lg \rho_c$	$(\beta - \alpha)_c$	$\frac{L_{\text{grav}}}{L}$	$\lg T_{\text{ef}}$	$\lg \frac{L}{L_{\odot}}$	$\lg \frac{R}{R_{\odot}}$
0,07	2,2 (8)	6,448	2,5	4,2	0,96	3,41	-3,27	-0,94
0,08	3,3 (8)	6,524	2,62	4,2	0,78	3,42	-3,28	-0,96

рассчитывались аналогично [520] путем решения уравнений (6.34), (22.17), (22.18); масса оболочки равнялась 3% от массы звезды. Конвекция в ней учитывалась по теории пути перемешивания $c \cdot l = P/\nabla P$ ($\alpha = 1$), учет неидеальности проводился аналогично [380], см. (28.4), рассматривались реакции горения водорода в протон-протонном цикле с учетом экранирования.

Расчеты показали, что звезды с массами $0,09 M_{\odot}$, $0,1 M_{\odot}$ и $0,11 M_{\odot}$ достигают главной последовательности, а звезды с массами $0,08 M_{\odot}$ и меньше в ходе сжатия достигают состояния максимальной температуры в центре T_c и далее остывают, превращаясь в вырожденные водородные карлики.

В табл. 26 из [210] приведены параметры звезд в максимуме T_c , а в табл. 27 — параметры звезд на главной последовательности, когда $L_{\text{grav}}/L = 0,01$. Минимальная масса звезды на главной последовательности лежит в интервале $0,08 M_{\odot} \leq M \leq 0,09 M_{\odot}$. Для звезд малой массы, достигающих главной последовательности (табл. 26), сохраняется состояние полной конвективности. Линия на диаграмме ГР, вдоль которой эволюционирует полностью конвективная звезда данной массы в отсутствие вырождения получена в [390, 391] и называется границей или треком Хаяши. В [390, 391] показано, что наличие радиативного ядра смещает звезду влево от этой границы (см. рис. 30). При наличии аккреции звезда малой массы с $M < M_{\text{min}}$ может повернуть к главной последовательности после прохождения минимума T_c . Характерный эволюционный трек представлен на рис. 37 для начальной массы $0,07 M_{\odot}$ и скорости аккреции $10^{-12} M_{\odot}/\text{год}$.

Т а б л и ц а 27*)

Параметры звезд на главной последовательности

$\frac{M}{M_{\odot}}$	t , годы	$\lg T_c$	$\lg \rho_c$	$(\beta - \alpha)_c$	$\lg T_{\text{ef}}$	$\lg \frac{L}{L_{\odot}}$	$\lg \frac{R}{R_{\odot}}$
0,09	1,6 (9)	6,596	2,74	4,41	3,42	-3,30	-0,27
0,10	8,9 (8)	6,645	2,67	3,35	3,46	-3,07	-0,93
0,11	5,7 (8)	6,684	2,59	2,57	3,49	-2,88	-0,89

*) Здесь β и α определены в § 2. С ростом радиуса и светимости начальной эволюционной модели время эволюции t практически не меняется.

Характеристики звезды в момент максимума T_c (первые две строки) или по достижении главной последовательности (последние две строки); $\beta - \alpha$ определено в § 2, $\beta_m = P_m/(P + P_m)$, P и P_m — давление вещества и излучения соответственно

$\frac{M}{M_\odot}$	t , годы	$\frac{E_M}{E_{\text{grav}}}$	$(\beta_m)_c$	$\lg T_{\text{ef}}$	$\lg \frac{L}{L_\odot}$	$\lg \frac{R}{R_\odot}$	$\lg T_c$	$\lg \rho_c$	$(\beta - \alpha)_c$	$\frac{L_{\text{grav}}}{L}$
0,11	2,9 (8)	0,28	0,22	3,41	-3,00	-0,80	6,454	2,52	4,2	0,96
0,12	3,8 (8)	0,27	0,20	3,42	-3,01	-0,82	6,520	2,60	4,2	0,85
0,12	7,6 (9)	0,27	0,20	3,30	-3,72	-0,94	6,457	2,94	8,43	0,01
0,13	2,9 (9)	0,25	0,19	3,40	-3,20	-0,88	6,575	2,81	5,13	0,01

Модели звезд малой массы с мелкомасштабным магнитным полем, учет которого сводился к добавлению магнитного давления

$$P_m = C \rho^{4/3} \quad (28.5)$$

к уравнению состояния, рассчитывались в [209]. Магнитное давление уменьшает значение температуры, необходимое для равновесия звезды той же массы, и ее плотности и увеличивает значение минимальной массы звезды на главной последовательности $M_{\text{min}}^{(H)} > M_{\text{min}}$. Расчеты для $C = 2,4 \cdot 10^{13}$ в (28.5) привели к значению $M_{\text{min}}^{(H)} = 0,12 M_\odot$ (см. табл. 28). Отметим, что звезда с $M = 0,12 M_\odot$ достигает главной последовательности после прохождения максимума центральной температуры. Влияние вращения на величину M_{min} рассмотрено в § 29.

г) Эволюционная роль потери массы. Наблюдательные свидетельства потери массы звездами типа Т Тельца, которые отождествляются с молодыми сжимающимися звездами, были получены Кухи [449], см. также [330]. Имеются наблюдательные данные (см., например, [318]), свидетельствующие о том, что истечение вещества из некоторых молодых звезд происходит в виде двух струй. Возможно, что это связано с наличием протопланетных дисков.

Эмпирический учет потери массы в расчетах эволюции звезд, сжимающихся к главной последовательности, был сделан в работе [353]. Поток массы задавался в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha \frac{R^3}{M} \quad (28.6)$$

Будем массу M и радиус R звезды выражать в солнечных единицах, время t в годах, α в $M_\odot/\text{год}$. Для солнечного ветра $\alpha = 3 \cdot 10^{-14} M_\odot/\text{год}$. Для звезд типа Т Тельца поток массы может быть на несколько порядков выше. На рис. 38 из [353] приведены эволюционные треки звезд с начальными массами 2,93 и 2,31 $M_\odot$ и различными значениями α с химическим составом $x_H = 0,739$, $x_{He} = 0,24$, $x_Z = 0,021$. В отличие от [406], где $l = \rho/2|\nabla \rho|$, в теории пути перемешивания средний пробег конвективного элемента равнялся удвоенной шкале высот по давлению: $l = 2P/|\nabla P|$ (см. (10.22)). Рассматривалось также горение дейтерия, концентрация

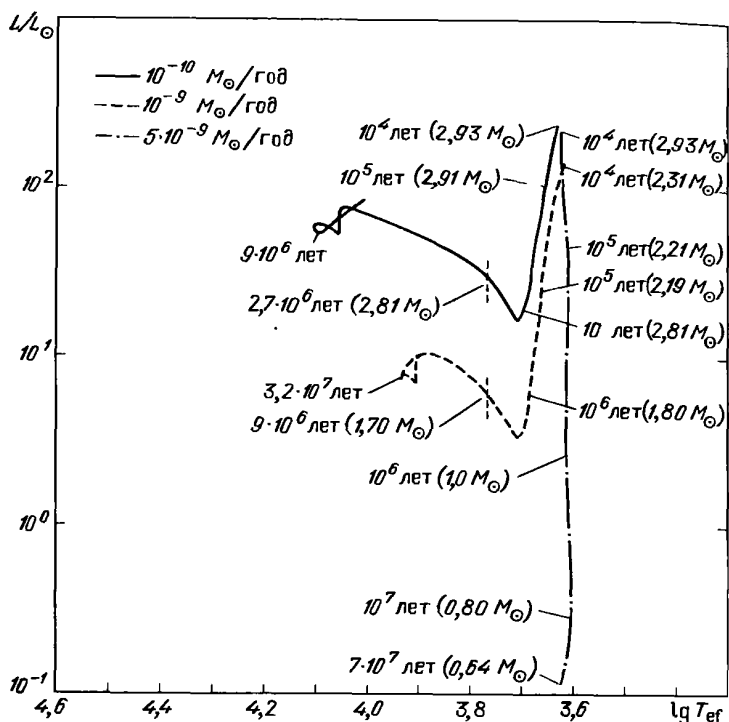


Рис. 38. Эволюционный трек на диаграмме ГР сжимающихся звезд с потерей массы и учетом горения дейтерия. Начальные массы звезд равны $2,93 M_{\odot}$ и $2,31 M_{\odot}$. Вертикальная штриховая линия указывает точку, где исчезает внешняя конвективная зона и дальнейшая эволюция идет с постоянной массой. Массы и возрасты моделей, указанных стрелками, даны на рисунке. Стрелки в левой части рисунка (без указания массы) указывают на главную последовательность и нулевого возраста.

которого в начальный момент принималась равной земной: $x_{2D}/x_H = 1,4 \cdot 10^{-4}$ [97]. Как показано в [353], линии равного возраста (см. рис. 30) на диаграмме ГР слабо зависят от задаваемой величиной α скорости потери массы.

§ 29. Эволюция быстровращающихся звезд на стадии гравитационного сжатия

Скорости вращения звезд типа Т Тельца трудно определимы из-за присутствия широких линий излучения. Оценка скорости вращения таких звезд проводилась по узким линиям поглощения [394], при интерпретации наблюдений флуоресцентной линии железа $FeI \lambda\lambda 4063, 4132$ [632] и составила $\langle v \sin i \rangle = 20-65 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$.

При теоретическом исследовании эволюции быстровращающихся звезд на стадии гравитационного сжатия использовалось политропное уравнение состояния $P = K \rho^{\gamma}$ с $\gamma = 4/3$ для звезд с массами $3 - 12 M_{\odot}$ в [303] и $\gamma = 5/3$ для $M \leq 1 M_{\odot}$ в [491]. В [303] рассматривалось фиксированное

распределение момента вращения, а в [491] вращение считалось твердотельным и предельно быстрым *) на протяжении всей эволюции. Изложение данного параграфа следует работам [40, 41], где использовалось точное уравнение состояния с нормальным химическим составом (см. § 1). Получено распределение эффективной температуры по поверхности звезды путем сшивки лучистой оболочки с конвективным ядром отдельно на полюсе и экваторе. Рассматривались стадии полностью конвективных звезд, в которых энтропия и угловая скорость постоянны по веществу. Полный угловой момент в процессе эволюции считался постоянным. Условие постоянства энтропии в условиях развитой конвекции не вызывает сомнений (см. § 10), но условие постоянства угловой скорости требует обоснования.

а) О распределении угловой скорости вращения. В процессе эволюции звезда испытывает сжатие и расширение, перемешивание за счет меридиональной циркуляции и конвекции. При наличии дифференциального вращения может развиваться гидродинамическая турбулентность. Все это ведет к перераспределению вращательного момента в звезде. Вязкость, связанная с микроскопическими явлениями, стремится выровнять угловую скорость, но обычно она очень мала.

В осесимметричном случае уравнения, описывающие изменение скорости вращения v_φ при наличии изотропной вязкости имеют вид [136]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi (v_r + \operatorname{ctg} \theta v_\theta)}{r} = \\ = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial \eta}{r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (29.1)$$

Здесь $\eta(\rho, T)$ — коэффициент вязкости. Для дальнейшего удобно записать (29.1) через удельный момент вращения j и угловую скорость Ω

$$j = r v_\varphi \sin \theta, \quad \Omega = \frac{v_\varphi}{r \sin \theta}. \quad (29.2)$$

С учетом (29.2) запишем (29.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial t} + v_r \frac{\partial j}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial j}{\partial \theta} = \\ = \frac{\sin \theta}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \eta \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \eta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (29.3)$$

Вязкость вещества обычно пренебрежимо мала и при $\eta = 0$ из (29.3) следует сохранение момента вращения каждого жидкого кольца.

*) При предельно быстром вращении звезды центробежная сила на экваторе уравновешивает гравитацию.

Значительно сложнее физическая картина в конвективно неустойчивой области. Ламинарная конвекция во вращающейся жидкости исследовалась теоретически и экспериментально во многих работах (см. [94, 628]). Стационарное состояние, к которому стремится конвективно неустойчивая вращающаяся среда, не характеризуется однозначным распределением угловой скорости. Как видно из (29.3), условие $j = \text{const}$ обращает в нуль левую часть, а $\Omega = \text{const}$ — правую часть этого уравнения. Условия эти не совместимы при $v_r, v_\theta \neq 0$, поэтому стационарный закон вращения заключен между условиями $j = \text{const}$ и $\Omega = \text{const}$. Чем больше коэффициент вязкости, тем ближе вращение к твердотельному. Безразмерный параметр, характеризующий закон вращения,

$$\alpha = \eta / \rho r v_r, \quad (29.4)$$

представляет собой обратное число Рейнольдса ([136], см (10.13)), соответствующее циркуляционной скорости $v_r \sim v_\theta$. При $\alpha \gg 1$ имеем $\Omega = \text{const}$, а при $\alpha \ll 1$ имеем $j = \text{const}$ в стационарном состоянии. По данным численных расчетов [628] в случае $\alpha = 5$ вращение почти однородно, а при $\alpha = 0,04$ момент вращения единицы массы постоянен почти по всему объему, кроме области вблизи центра, где $r \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$, $\Omega = \text{const}$.

В звездах конвекция всегда является турбулентной (см. § 10, п.в) и характерный масштаб ее обычно много меньше размеров конвективного ядра. Численное моделирование при этом практически невозможно, так как даже в ламинарном случае расчеты охватывают небольшое число конвективных ячеек. Микроскопическая вязкость в звездах столь мала, что в пределах одной конвективной ячейки должно установиться состояние $j = \text{const}$. Однако при турбулентной мелкомасштабной конвекции имеет значение усредненное распределение Ω по конвективному ядру, а не мгновенное распределение параметров внутри ячейки. Крупномасштабное распределение, устанавливается в результате взаимодействия конвективных ячеек, проявляющееся в виде конвективной или турбулентной вязкости.

Если учесть коэффициент турбулентной вязкости

$$\eta_T = \rho v_T l, \quad (29.5)$$

где v_T — средняя турбулентная скорость, l — характерный масштаб турбулентности, то для α из (29.4) имеем

$$\alpha = \left(\frac{v_T}{v_r} \right) \frac{l}{r}. \quad (29.6)$$

Отношение r/l примерно равно числу конвективных ячеек на длине конвективной зоны в звезде. В конвективном ядре звезды в $30 M_\odot$ на главной последовательности имеет место $l/r \approx 0,1$, $v_T \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ [165, 295]. Скорость циркуляции по оценкам на основе соотношений подобия и теории вращения Солнца [340] есть $v_r < 10^3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ для скорости вращения, меньше предельной. Следовательно, $\alpha \gg 1$ и в расчетах считается $\Omega = \text{const}$ в конвективном ядре. Отметим, что критерий твердотельности $\alpha \gg 1$ справедлив только при $l \ll r$. В противном случае теряет смысл понятие турбулентной вязкости, возникает несколько конвективных ячеек, в каждой из которых стационарный закон вращения близок к $j = \text{const}$.

Однако, как и в конвективно устойчивой зоне, стационарное состояние здесь может не достигаться и необходимо эволюционное определение распределения вращательной скорости (§ 24, п.б).

Приведенные выше соображения справедливы только в рамках простых предположений об осевой симметрии, изотропии турбулентной вязкости, отсутствия магнитного поля. Все эти предположения могут нарушаться: неустойчивости разрушают осевую симметрию [339], наличие магнитного поля приводит к возникновению дополнительных сил, действующих в ϕ -направлении, и усложняет уравнения (29.1), (29.3). В некоторых моделях конвекции получается анизотропный тензор вязких напряжений, принципиально отличающийся от обычного вязкого тензора и не обращающийся в нуль при твердотельном вращении [442]. Все эти сложные эффекты изучались только на упрощенных моделях [340, 75]. Для эволюционных расчетов принятие $\Omega = \text{const}$ при $\alpha \gg 1$ представляется наиболее разумным.

б) Метод расчета эволюции. Звезда делится на изэнтропическое твердотельно вращающееся ядро и тонкую оболочку, внешняя часть которой лучистая, а глубже существует зона неадиабатической конвекции. Уравнение состояния $P(\rho, T)$ и изэнтропии $T = T_S(\rho)$ рассчитывались для состава $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,02$ с использованием аппроксимационных формул для термодинамических функций из [520]. В этих формулах, аппроксимирующих таблицы [621], исправлена ошибка в соответствии с уточнениями [622] (о точных формулах см. § 1, задача 1).

При заданной энтропии S в ядре, определяющей связь $P = P_S(\rho)$, заданном полном моменте вращения J и массе звезды M (масса и угловой момент оболочки считаются пренебрежимо малыми) решались уравнения (23.19), (23.3) при $\Omega = \text{const}$ методом самосогласованного поля в варианте [64] (см. § 23, п.в) для построения модели ядра. Чтобы найти светимость звезды и ее положение на ГР диаграмме, к ядру пришивалась оболочка, которая рассматривалась в плоском приближении с толщиной h , много меньшей радиуса ядра R . Оболочка считалась находящейся в механическом и тепловом равновесии в эффективном поле тяжести

$$g_{\text{ef}} = |\nabla(\chi - \phi)|, \quad \chi - \text{центробежный потенциал из (23.23)}, \quad (29.7)$$

и описывается уравнениями

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g_{\text{ef}}, \quad F = F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}}, \quad F_{\text{rad}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dx}. \quad (29.8)$$

Здесь F_{conv} дано в (10.18), $\mu = \mu(\rho, T)$ считается равновесным (см. примечание к (10.11), см. также (22.1), (22.4)), x — координата в оболочке вдоль направления $\nabla(\chi - \phi)$. Расчеты в оболочке велись при $I = P/|dP/dx| = H_P$. Модель ядра строилась при внешнем граничном условии $P = \rho = 0$. Вносимая при этом ошибка $\sim h/R$ мала для тонкой оболочки. Непрозрачность κ в (29.8) бралась из таблиц [129], а при $10^{-3} < \tau < 2/3$ вместо второго и третьего соотношений в (29.8) использовалось уравнение (6.24), полученное с помощью эддингтоновского приближения. Модель оболочки определяется однозначно при известных T_{ef} и g_{ef} . Все оболочки являются лучистыми при $\tau = 2/3$, $T = T_{\text{ef}}$, но с ростом τ лучистый

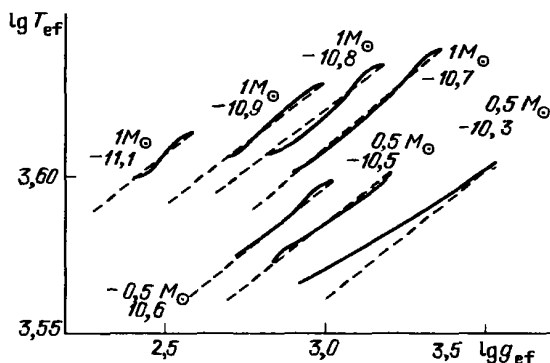


Рис. 39. Зависимость эффективной температуры T_{ef} от ускорения силы тяжести g_{ef} вдоль поверхности звезды для моделей с $0,5 M_{\odot}$, $J = 4 \cdot 10^{50} \text{ г} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ и с $1 M_{\odot}$, $J = 14,2 \cdot 10^{50} \text{ г} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Штриховые линии указывают наклон зависимости, найденной в [473]. Цифры у каждой кривой указывают значения параметра $\lg \rho_0$ (см. табл. 28, 29)

градиент вскоре становится больше адиабатического и наступает конвекция. В верхних слоях конвективной оболочки плотность мала и перенос тепла конвекцией малоэффективен, поэтому имеет место сильная неадиабатичность и энтропия растет внутри. По мере продвижения вглубь оболочки конвективный перенос энергии становится все более эффективным и градиент температуры приближается к адиабатическому. Решение считалось вышедшим на адиабатический режим, когда выполнялось условие

$$|\nabla - \gamma_2| \leq 10^{-3}, \quad \nabla = d \ln T / d \ln P \quad (29.9)$$

(см. (1.12) для γ_2). Величина T_{ef} подбиралась так, чтобы в точке $\nabla \approx \gamma_2 = (\partial \ln T / \partial \ln P)_S$ энтропия оболочки S_0 равнялась энтропии ядра S . Практически сначала была затабулирована зависимость $S_0(g_{\text{ef}}, T_{\text{ef}})$, а затем с помощью интерполяции таблиц находились значения $T_{\text{ef}}(g_{\text{ef}}, S_0)$. Отметим, что аналогичный метод пришивки оболочек использовался при построении моделей невращающихся конвективных звезд малой массы [403]. Результаты расчетов показали слабую зависимость $T_{\text{ef}}(g_{\text{ef}})$ (рис. 39) и неплохую точность соотношения $T_{\text{ef}} \sim g_{\text{ef}}^{0,08}$, полученного в [473].

По распределению $T_{\text{ef}}(\theta)$ по поверхности звезды $R = R(\theta)$ ищется полная светимость

$$L = \frac{1}{2} \pi a c \int_0^\pi T_{\text{ef}}^4 R \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} \sin \theta d\theta. \quad (29.10)$$

Зная светимость и энергию модели $\mathcal{E}$, можно определить разность возрастов между двумя конвективными моделями

$$\Delta t = 2 \frac{|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2|}{L_1 + L_2}, \quad (29.11)$$

которая определяется по средней светимости между моментами "1" и "2". Полная энергия $\mathcal{E}$ отрицательна, она включает в себя тепловую, вращательную и гравитационную энергии и вычисляется в программе расчета равно-

веса ядра (энергией оболочки пренебрегалось)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \int \phi \, dm + \frac{1}{2} \Omega^2 \int r^2 \sin^2 \theta \, dm + \int E(\rho, S) \, dm \quad (29.12)$$

$$dm = 2\pi \rho r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta.$$

Соотношения для удельной внутренней энергии $E(\rho, S)$ см. в гл. 1.

в) Результаты расчетов. Расчет моделей невращающихся звезд, сравнение с результатами работ [391, 406, 353], а также контрольный расчет по методу Хенли (§ 22, п. 6)) при тех же физических предположениях показал, что точность рассмотренного здесь метода не хуже 5%, если толщина оболочки не превышает $0,3 R$, а масса лучистого ядра не превышает 25% от массы звезды. Для звезд с массами $10, 2, 1, 0,5 M_{\odot}$ оболочка является тонкой, если $L < 4 \cdot 10^4, 2000, 100, 50 L_{\odot}$ соответственно. Основные результаты расчетов приведены на рис. 40, 41 и табл. 29–31 из [40]. Укажем для сравнения, что угловой момент Солнца при твердотельном вращении $1,6 \cdot 10^{48} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ [5]. Энтропия характеризовалась плотностью вещества $\rho_0 (\lg \rho_0)$ при $T = T_0, \lg T_0 = 3,3$.

В табл. 29–31 приведены результаты расчетов эволюции звезд с $M = 0,5, 1, 2 M_{\odot}$ соответственно. Указана зависимость полярного R_p и эк-

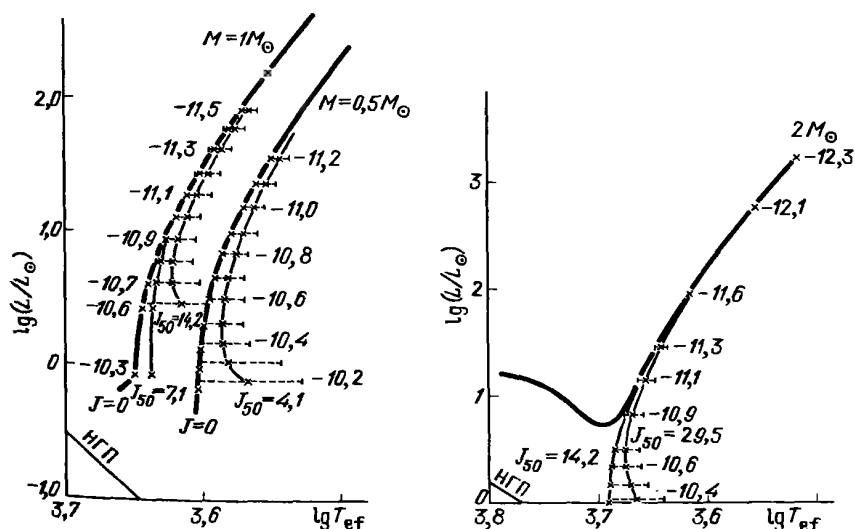


Рис. 40. Эволюционные треки моделей сжимающихся звезд с $M = 0,5 M_{\odot}$ и $1 M_{\odot}$ при разных значениях момента импульса J_{50} (в единицах $10^{50} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$), построенные для средних эффективных температур звезд. Жириная линия – результаты расчета методом Хенли для невращающихся звезд, крестики – модели, рассчитанные изложенным методом. Цифры указывают значения $\lg \rho_0$, параметризующие энтропию ядра. Штриховые горизонтальные линии показывают разброс эффективной температуры по поверхности вращающейся звезды. Линия НГП – начальная главная последовательность невращающихся звезд с $x_H = 0,70, x_Z = 0,02$

Рис. 41. Треки моделей с $2 M_{\odot}$. Обозначения те же, что и на рис. 40. Образование лучистого ядра приводит к переходу на горизонтальный участок трека

Таблица 29

Результаты расчета эволюции звезды $0,5 M_{\odot}$

$\lg \rho_0$	$\frac{R_e}{R_{\odot}}$	$\frac{R_p}{R_{\odot}}$	T_c, K	$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$	T_e, K	T_p, K	$t, \text{годы}$	$v_{\text{экв}}, \text{км} \cdot \text{с}^{-1}$	h/R_e	J
-11,3	20,4		2,47 (5)	1,16 (-3)	53,8	3475		0	0	0,35	
-11,0	9,03		4,87 (5)	8,6 (-3)	14,4	3750		8,06 (3)	0	0,12	
-10,7	4,44		9,35 (5)	5,96 (-2)	4,14	3920		6,0 (4)	0	0,045	$J = 0$
-10,4	2,36		1,72 (6)	0,36	1,28	4020		3,70 (5)	0	0,020	
-10,2	1,62		2,50 (6)	1,07	0,609	4020		1,10 (6)	0	0,012	
-11,3	21,8	20,3	2,4 (5)	1,12 (-3)	55,5	3400	3470	0	24,5	0,39	
-11,0	9,86	8,94	4,66 (5)	8,05 (-3)	14,9	3640	3750	7,50 (3)	41,6	0,16	
-10,7	5,09	4,35	8,57 (5)	0,0523	4,39	3740	3930	5,48 (4)	72,9	0,068	$J = 4,10 (50)$
-10,4	2,97	2,28	1,49 (6)	0,292	1,45	3720	4010	3,04 (5)	127	0,045	$\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
-10,2	2,47	1,54	2,08 (6)	0,832	0,773	3365	4040	8,13 (5)	193	0,25*	

*) h велико только вблизи экватора из-за уменьшения g_{ef} .

Эволюция звезды $1 M_{\odot}$

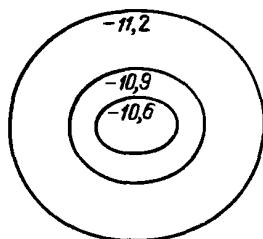
$\lg \rho_0$	$\frac{R_e}{R_{\odot}}$	$\frac{R_p}{R_{\odot}}$	T_c, K	$\rho_c, g \cdot cm^{-3}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$	T_e, K	T_p, K	$t, \text{годы}$	$v_{\text{эв}}, km \cdot c^{-1}$	$\frac{h}{R_e}$	J
-11,5	21,7		4,15 (5)	1,34 (-3)	83,6	3760		0	0	0,21	
-11,2	10,5		7,88 (5)	9,23 (-3)	26,2	4040		1,5 (4)	0	0,10	
-10,9	5,23		1,54 (6)	0,0669	8,02	4270		1,1 (5)	0	0,034	$J = 0$
-10,6	2,73		2,91 (6)	0,444	2,52	4420		6,5 (5)	0	0,015	
-10,3	1,51		5,24 (6)	2,52	0,80	4450		3,6 (6)	0		
-11,5	22,0	21,7	4,12 (5)	1,33 (-3)	84,3	3740	3760	0	15,8		
-11,2	10,75	10,5	7,80 (5)	9,03 (-3)	26,4	4010	4040	1,5 (4)	27,8		$J = 7,1(50)$
-10,9	5,44	5,20	1,50 (6)	0,0642	8,13	4180	4270	1,1 (5)	51,3		$g \cdot cm^2 \cdot c^{-1}$
-10,6	2,92	2,69	2,76 (6)	0,412	2,55	4285	4410	6,4 (5)	93,4		
-10,3	1,70	1,48	4,81 (6)	2,22	0,83	4260	4440	3,3 (6)	162		
-11,5	23,05	21,6	4,03 (5)	1,29 (-3)	85,7	3680	3760	0	31,7	0,30	
-11,2	11,5	10,4	7,46 (5)	8,50 (-3)	27,1	3920	4040	1,4 (4)	55,1	0,12	$J = 14,2(50)$
-10,9	6,12	5,12	1,39 (6)	0,0575	8,57	4040	4260	9,7 (4)	100	0,054	$g \cdot cm^2 \cdot c^{-1}$
-10,7	4,25	3,26	2,04 (6)	0,192	4,04	3990	4365	3,1 (5)	150	0,044	
-10,6	3,66	2,62	2,44 (6)	0,341	2,79	3860	4395	5,4 (5)	184	0,044	

Эволюция звезды $2 M_{\odot}$

$\lg \rho_0$	$R_e/R_{\odot}$	$R_p/R_{\odot}$	T_c, K	$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$L/L_{\odot}$	T_e, K	T_p, K	$t, \text{годы}$	$\nu_{\text{кв.}}, \text{км} \cdot \text{с}^{-1}$	J
-12,3	127		1,79 (5)	2,86 (-5)	1,68 (3)	3280		0		$J = 0$
-12,1	61,4		3,09 (5)	1,43 (-4)	567	3600		5,14 (2)		
-11,6	18,0		9,15 (5)	3,62 (-3)	85,9	4147		1,26 (4)		
-11,3	9,22		1,73 (6)	2,43 (-2)	29,4	4436		7,28 (4)		
-11,0	4,69		3,55 (6)	0,175	9,6	4704		4,31 (5)		
-10,7	2,43		6,43 (6)	1,22	3,05	4903		2,53 (6)		
-10,4	1,33		1,18 (7)	7,40	0,94	4953		1,40 (7)		
-12,3	128	127	1,78 (5)	2,86 (-5)	1,68 (3)	3276	3280	0	4,34	$J = 1,419(51)$ $\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
-12,1	61,6	61,4	3,11 (5)	1,44 (-4)	563	3590	3601	4,70 (2)	6,34	
-11,6	18,2	18,0	9,12 (5)	3,59 (-3)	86,1	4139	4147	1,28 (4)	16,0	
-11,3	9,32	9,20	1,72 (6)	2,40 (-2)	29,5	4422	4436	7,24 (4)	29,3	
-11,0	4,78	4,67	3,30 (6)	0,171	9,67	4674	4703	4,23 (5)	55,3	
-10,7	2,52	2,41	6,25 (6)	1,17	3,08	4844	4901	2,45 (6)	104	
-10,4	1,41	1,31	1,13 (7)	6,86	0,98	4867	4949	1,16 (7)	186	
-12,3	129	127	1,78 (5)	2,84 (-5)	1,68 (3)	3260	3280	0	9,08	$J = 2,953(51)$ $\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
-12,1	62,3	61,4	3,09 (5)	1,43 (-4)	566	3577	3600	4,66 ()	13,2	
-11,6	18,5	18,0	8,99 (5)	3,52 (-3)	86,8	4111	4146	1,22 (4)	33,2	
-11,3	9,65	9,14	1,67 (6)	2,31 (-2)	27,5	4373	4434	7,18 (4)	60,2	
-11,0	5,10	4,61	3,15 (6)	0,159	9,90	4574	4699	4,09 (5)	112	
-10,7	2,84	2,36	5,75 (6)	1,03	3,22	4632	4891	2,22 (6)	207	
-10,4	1,78	1,27	9,80 (6)	5,55	1,06	4345	4932	1,10 (7)	371	

ваториального R_e радиуса, центральных значений температуры T_c и плотности ρ_c , светимости L , эффективной температуры на полюсе T_p и экваторе T_e от времени t . Приведены также значения экваториальной скорости вращения $v_{\text{эква}}$ и относительной толщины оболочки h/R_e . Оказывается, что вращающаяся звезда с той же энтропией имеет меньшую температуру, но большую светимость, чем невращающаяся. Для последней модели с $M = 0,5 M_{\odot}$ в табл. 28, имеющей максимальную сплюснутость $R_e/R_p = 1,6$ (рис. 42) увеличение светимости составляет $\sim 25\%$. Для этой модели эффективное ускорение на экваторе в ~ 24 раза меньше, чем на полюсе.

Рис. 42. Форма поверхности сжимающейся звезды с $1 M_{\odot}$ и $J_{s,0} = 14,2$ в разные моменты времени эволюции. Показаны значения параметра $\lg \rho_0$ (см. табл. 30)



Отклонение влево эволюционных треков (рис. 40, 41, см. также рис. 30, 38) связано с ростом лучистого ядра (см. § 28) и не описывается данным методом. В лучистом ядре необходимо учитывать неадиабатичность, нестационарную циркуляцию, перераспределение углового момента и использовать в полном виде уравнения эволюции § 24.

Время сжатия вращающейся звезды до состояния с данной энтропией несколько уменьшается за счет увеличения светимости моделей с тем же S . Однако центральные значения температуры и плотности вращающейся звезды меньше, чем у невращающейся при том же S , поэтому она приходит на главную последовательность с меньшими значениями энтропии и светимости, чем невращающаяся. Приближенные расчеты однородно вращающихся звезд на главной последовательности показывают, что с уменьшением массы различие в светимости растет [541, 354]. Для $M = 0,5 M_{\odot}$ светимость предельно быстро вращающейся звезды на главной последовательности получается в 1,6 раз меньше, чем у невращающейся, если экстраполировать результаты работы [541]. Кроме того, по пути на главную последовательность вращающаяся звезда излучает больше тепла, поэтому предельное вращение увеличивает время прихода на главную последовательность примерно в два раза.

§ 30. Модели истечения вещества из молодых звезд

Механизмы квазистационарного истечения вещества, наблюдаемого у различных звезд [449, 327], можно разделить на четыре типа:

- 1) истечение под действием светового давления при малой и большой оптической толщине истекающей области оболочки,
- 2) нетепловой нагрев и расширение короны,
- 3) вращательный механизм истечения,
- 4) истечение из оболочек звезд за счет энергии, выделяемой при рекомбинации атомов и молекул.

Роль вращательного механизма не вполне ясна, так как наблюдаемые скорости вращения меньше предельных. По-видимому, этот механизм наиболее важен на нестационарных стадиях (см. гл. 10). Первый из перечисленных механизмов связан с большой светимостью звезды и важен для очень ярких голубых звезд большой массы или гигантов и сверхгигантов на продвинутых стадиях эволюции (см. гл. 9). У звезд небольшой массы и светимости, к которым относятся и молодые сжимающиеся звезды, имеются конвективные оболочки, приводящие к нетепловому нагреву короны и ее истечению по типу солнечного ветра. На самых ранних стадиях образования звезд важным для потери массы могут оказаться эффекты рекомбинации, приводящие к малости адиабатического показателя $\gamma_1 < 4/3$ (см. (1.11)). Отметим, что механизм потери массы под действием светового давления очень важен при формировании звезд большой массы $M > 9 M_\odot$ и приводит к зависимости (26.19). Рассмотрим модели истекающих звезд, теряющих массу за счёт второго и четвертого механизмов, рассмотренных выше.

а) Истекающие биполитропные модели [43]. Рассмотрим звезду, уравнение состояния которой имеет вид

$$P = K_2 \rho^{1+1/n_2} \quad \text{при } \rho < \rho_a, \quad n_2 \gg 1; \quad (30.1)$$

$$P = K_1 \rho^{1+1/n_1} \quad \text{при } \rho > \rho_a, \quad (30.2)$$

причем

$$K_1 \rho_a^{1/n_1} = K_2 \rho_a^{1/n_2}.$$

Такое уравнение состояния отражает свойства газа с учетом рекомбинации. Удельная тепловая энергия такого газа есть

$$E = K_2 n_2 \rho^{1/n_2} \quad \text{при } \rho < \rho_a, \quad (30.3)$$

$$E = K_1 (n_2 - n_1) \rho_a^{1/n_1} + K_1 n_1 \rho^{1/n_1} \quad \text{при } \rho > \rho_a. \quad (30.4)$$

Рассмотрим звезду со средней плотностью $\bar{\rho}$, такой, что $\rho_a \ll \bar{\rho}$. Для чисто политропной звезды массы M и радиуса R с уравнением состояния (30.2) при всех плотностях полная энергия ϵ определяется выражением [145], см. § 34,

$$\epsilon = - \frac{3 - n_1}{5 - n_1} \frac{GM^2}{R}. \quad (30.5)$$

Здесь за нуль принята энергия вещества звезды при нулевой плотности без гравитационного взаимодействия. Если масса и толщина оболочки, где $\rho < \rho_a$, пренебрежимо малы, то полная энергия звезды с биполитропным уравнением состояния (30.1), (30.2) запишется в виде

$$\epsilon = (n_2 - n_1) K_1 \rho_a^{1/n_1} M - \frac{3 - n_1}{5 - n_1} \frac{GM^2}{R}. \quad (30.6)$$

Из (30.6) следует, что при достаточно большом n_2 полная энергия становится положительной и энергетически выгодным будет разлет звезды на бесконечность. Если $n_1 < 3$, то и при положительной полной энергии основная масса находится в устойчивом равновесии (см. гл. 12), но в об-

ласти $\rho < \rho_a$ возможно истечение вещества. При достаточно малом отношении $\rho_a/\bar{\rho}$ темп потери массы $\dot{M}$ столь мал, что основная масса звезды находится в статическом равновесии, а истечение происходит в квазистационарном режиме с распределением скорости

$$u = - \frac{\dot{M}}{4\pi\rho r^2}. \quad (30.7)$$

В стационарно и радиально истекающей звездной оболочке при $\rho < \rho_a$ имеет место интеграл Бернулли [136]

$$H = \frac{u^2}{2} + E + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} = \frac{u^2}{2} + (n_2 + 1)K_2\rho^{1/n_2} - \frac{GM}{r}. \quad (30.8)$$

Для удовлетворения условия $\rho \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ решение (30.7), (30.8) должно пройти через критическую звуковую точку, где выполняются соотношения

$$\begin{aligned} u_{cr}^2 &= u_{s, cr}^2 = \frac{n_2 + 1}{n_2} K_2 \rho_{cr}^{1/n_2}, \\ u_{cr}^2 &= \frac{GM}{2r_{cr}}. \end{aligned} \quad (30.9)$$

Здесь скорость звука $u_s = (\partial P / \partial \rho)^{1/2}$. Для построения модели статической звезды с истекающей оболочкой нужно сшить решение для ядра с решением (30.7); (30.8) для оболочки так, чтобы в месте сшивки были непрерывными плотность ρ и давление P , и скорость u была бы очень малой.

В статическом ядре уравнение равновесия (22.1) при баротропном уравнении состояния $P(\rho)$ имеет интеграл, который следует из интеграла Бернулли (30.8) при $u \rightarrow 0$. Значение интеграла H берется на границе статического ядра $r = R$, где приближенно полагается $\rho = \rho_a$, $u \ll u_s$ и

$$H = (n_2 + 1)K_2 \rho_a^{1/n_2} - \frac{GM}{R}. \quad (30.10)$$

Используя (30.9) в (30.8), выразим значение H через радиус критической точки r_{cr} :

$$H = \frac{2n_2 - 3}{4} \frac{GM}{r_{cr}}. \quad (30.11)$$

Из сравнения (30.10) и (30.11) находится радиус $r_k(M, R)$, зная который можно с помощью (30.9) и (30.7) найти поток массы

$$\begin{aligned} \dot{M} &= -4\pi\rho_{cr}r_{cr}^2 u_{cr} = -4\pi r_{cr}^{1.5-n_2} \left[\frac{n_2}{2(1+n_2)} \right]^{n_2} \frac{(GM)^{n_2+0.5}}{\sqrt{2}K_2^{n_2}} \approx \\ &\approx -\frac{4\pi}{e} r_{cr}^{1.5-n_2} \left(\frac{GM}{2K_2} \right)^{n_2+0.5} \sqrt{K_2}, \quad n_2 \gg 1, \end{aligned} \quad (30.12)$$

$$r_{cr} = \frac{2n_2 - 3}{4} GM \left[(n_2 + 1)K_2 \rho_a^{1/n_2} - \frac{GM}{R} \right]^{-1}. \quad (30.13)$$

Из теории политропных звезд имеем [218], см. § 34,

$$R = \left[\frac{(n_1 + 1)K_1}{4\pi G} \right]^{\frac{n_1}{3-n_1}} \left(\frac{M}{4\pi M_{n_1}} \right)^{\frac{1-n_1}{3-n_1}} \xi_{n_1}, \quad (30.14)$$

где ξ_n, M_n — безразмерные величины, зависящие только от n . С учетом (30.13), (30.14) функция $\dot{M}(M, R)$ примет вид

$$\dot{M} = -\pi \left(\frac{e}{K_2 \rho_a^{1/n_2}} \right)^{3/2} (GM)^2 \rho_a \left\{ 1 - \frac{G(4\pi M_{n_1})^{3-n_1}}{n_2 K_1 \rho_a^{1/n_1} \xi_{n_1}} \right. \\ \times \left. \left[\frac{4\pi G}{(n_1 + 1)K_1} \right]^{\frac{n_1}{3-n_1}} M^{\frac{2}{3-n_1}} \right\}^{n_2 - 1.5} \quad (30.15)$$

Для истечения из оболочки звезды необходимо выполнение условия $H \geq 0$, которое при $n_2 \gg 1$ и при учете (30.14) в (30.6) эквивалентно условию $\partial \epsilon / \partial M \geq 0$. При $H = 0$ энергия ϵ положительна и $\partial \epsilon / \partial M = 0$:

$$\epsilon = \epsilon_0 = \frac{2GM^2}{(5 - n_1)R} \quad \text{при } H = 0; \quad M = M_2. \quad (30.16)$$

При фиксированных $n_1 < 3$ и $n_2 \gg 1$ в зависимости от массы звезды M можно выделить три типа биополитропных моделей:

$$1) M > M_1, \quad \epsilon < 0, \quad \partial \epsilon / \partial M < 0, \quad H < 0 - \quad (30.17)$$

устойчивые статические модели с отрицательной полной энергией;

$$2) M_2 < M < M_1, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial M} < 0, \quad H < 0 - \quad (30.18)$$

статические модели с положительной полной энергией (разлет вещества на бесконечность здесь энергетически выгоден, но модели устойчивы относительно малых возмущений (в целом метастабильны), а разлет на бесконечность отделен потенциальным барьером);

$$3) M < M_2, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0, \quad \partial \epsilon / \partial M > 0, \quad H > 0 - \quad (30.19)$$

квазистационарно истекающие модели (статические модели в строгом смысле здесь отсутствуют, но ввиду малости $\dot{M}$ при малых ρ_a основная масса находится почти в статическом равновесии).

Значение M_1 находится из условия $\epsilon = 0$ в (30.6), а M_2 из условия $H = 0$ в (30.10) с учетом (30.14). Необходимым для применимости приближенного подсчета $\dot{M}$ в (30.15) является условие того, что критический радиус r_k лежит вне звезды:

$$r_{cr}/R > 1. \quad (30.20)$$

Из (30.13), (30.14) следует, что (30.20) выполняется при

$$y = \left(\frac{M}{M_2} \right)^\kappa = \frac{GM/R}{(n_2 + 1)K_2 \rho_a^{1/n_2}} > \frac{2}{n_2 + 0,5}, \quad \kappa = \frac{2}{3 - n_1}. \quad (30.21)$$

Используя y из (30.21), (30.10) можно записать (30.15) в виде

$$\dot{M} = -aM^2(1-y)^{n_2-1,5} = -aM_2^2 y^{2/\kappa} (1-y)^{n_2-1,5}, \quad (30.22)$$

$$a = \pi \left(\frac{e}{K_2 \rho_a^{1/n_2}} \right)^{3/2} G^2 \rho_a, \quad aM_2^2 = \pi e^{3/2} n_2^{3/2} \rho_a R_2^2 \sqrt{\frac{GM_2}{R_2}}.$$

Очевидно, что $\dot{M}$ в (30.22) проходит через максимум, лежащий при

$$y = \frac{2/\kappa}{n_2 - 1,5 + 2/\kappa} \left(\frac{dy}{dM} = \kappa \frac{y}{M} \right). \quad (30.23)$$

При $\kappa > 1$ ($n_1 > 1$) условие (30.21) нарушится прежде, чем $\dot{M}$ достигнет максимума. На границе условия применимости (30.21) средняя плотность звезды порядка ρ_a и она оказывается глобально неустойчивой ввиду близости к единице показателя адиабаты γ_1 из (30.1), (1.11), и разлетается в динамической шкале времени. Начинается такой разлет несколько раньше, чем достигается условие (30.21). Для истекающей звезды у самой границы $\delta e/\delta M = 0$, $y = 1$ и величина $\dot{M}$ будет малой, но растущей по мере истечения и уменьшения M . Когда масса звезды уменьшится в $(n_2/2)^{1/\kappa}$ раз истечение превратится в разлет всей звезды. Отметим, что в процессе потери массы скорость истечения и разлета всегда остается порядка скорости звука u_s из (30.9), соответствующей плотности ρ_a , за исключением звезд с массами $M \approx M_2$, для которых скорость истечения мала из-за большого критического радиуса в (30.13).

Время диссипации звезды с массой $M < M_2$ составляет по (30.22)

$$\tau \approx \frac{M}{\dot{M}} \approx \tau_{h2} \frac{\bar{\rho}}{\rho_a} \left(\frac{4}{3e^{3/2} n_2^{3/2} y^{1/\kappa} (1-y)^{n_2-1,5}} \right) =$$

$$= \tau_h \frac{\bar{\rho}}{\rho_a} \left(\frac{4}{3e^{3/2} n_2^{3/2} y^{3/2} (1-y)^{n_2-1,5}} \right), \quad (30.24)$$

где $\tau_{h2} = R_2/\sqrt{GM_2/R_2}$ — время гидродинамического разлета ядра, $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ — средняя плотность ядра массы M_2 и радиуса R_2 , τ_h и $\bar{\rho}$ — те же для $M < M_2$. Безразмерная величина во вторых скобках (30.24)

достигает минимума при $y = \frac{3}{2n_2}$, который равен $\frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,73$ для $n_2 \gg 1$. Таким образом, время диссипации биполитропной звезды с $n_2 \gg 1$ и $\rho_a \ll \bar{\rho}$ всегда много больше гидродинамического времени ядра и используемое приближение является корректным.

б) Истекающие модели изэнтропических водородных звезд [48]. Уравнение состояния $P(\rho)$ при постоянной энтропии в области ионизации и диссоциации имеет $\gamma_1 < 4/3$ и даже, при учете излучения, $\gamma_1 < 1$. Это приводит к возможности существования стационарно истекающих устойчивых конфигураций, аналогичных рассмотренным выше биполитропным моделям из (30.19). Постоянство энтропии характеризует полностью конвективные сжимающиеся звезды на стадии Хаяши (§ 28).

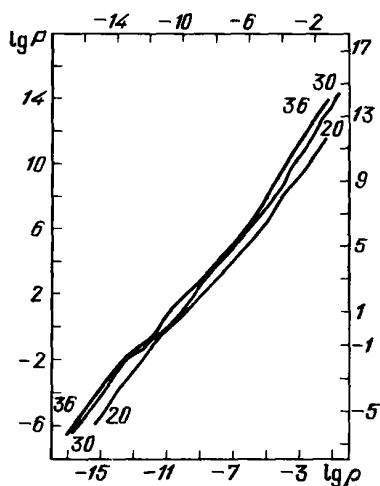
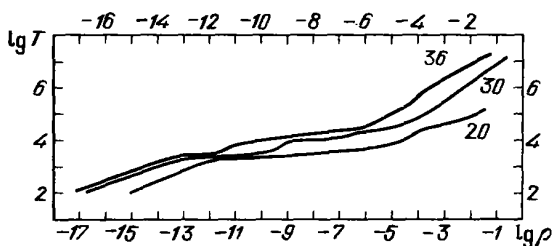


Рис. 43. Зависимость $P(\rho)$ вдоль изэнтроп $S = 20, 30, 36$

Рис. 44. Зависимость $T(\rho)$ вдоль изэнтроп $S = 20, 30, 36$



Термодинамические функции водорода вдоль изэнтроп приведены на рис. 43–46 по расчетам [48]. Значения энтропии принимались равными $S = 20, 24, 30, 36$ в единицах

$$\mathfrak{R} = k/m_p = 8,317 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}. \quad (30.25)$$

Рассматривался газ в термодинамическом равновесии с излучением (см. § 1) с учетом ионизованного, атомарного и молекулярного водорода в основном состоянии, а также вращательные и колебательные возбуждения основного терма молекулы. Учитывалась поправка на ангармоничность и взаимодействие вращательных степеней свободы с колебательными по методике, изложенной в [145, 91]. Содержание орто и параводорода*) предполагалось равновесным. Результаты [48] по расчету уравнения состояния находятся в хорошем численном согласии с результатами работ [621, 622, 617].

При учете равновесного излучения показатель $\gamma_1 < 1$ в области диссоциации (рис. 46). Для идеального газа без излучения всегда имеет место $\gamma_1 > 1$, так как вдоль изэнтроп температура растет с ростом плотности.

*) В ортоводороде спины ядра и электрона параллельны, в параводороде — антипараллельны. Энергетическое состояние у ортоводорода чуть выше, чем у параводорода, переходы между ними приводят к излучению линии 21 см в радиодиапазоне.

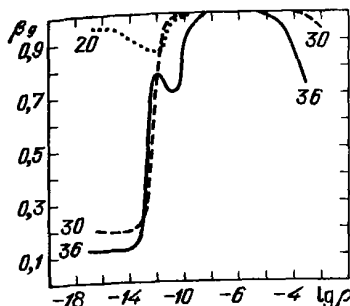


Рис. 45. Зависимость $\beta_g(\rho)$ вдоль изэнтроп $S = 20, 30, 36$

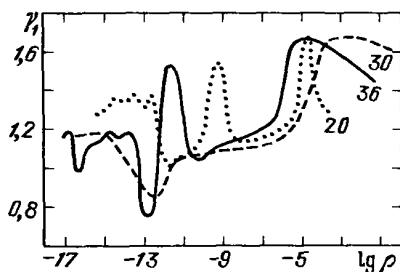


Рис. 46. Зависимость $\gamma_1(\rho)$ вдоль изэнтроп $S = 20, 30, 36$

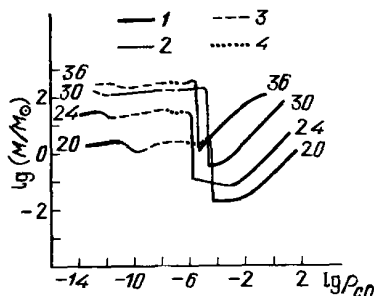


Рис. 47. Зависимость $M(\rho_{c0})$ для статических моделей при $S = 20, 24, 30, 36$. 1 — устойчивые ветви, 2 — участки с одной неустойчивой модой, 3 — с двумя, 4 — с тремя неустойчивыми модами

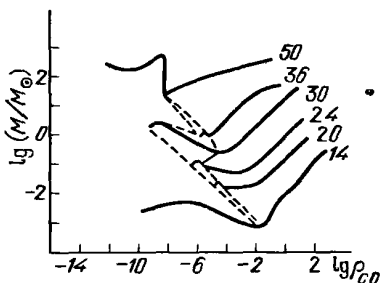


Рис. 48. Зависимость $M(\rho_{c0})$ для истекающих моделей. Штрихами обведена область стационарного истечения, энтропии $S = 14, 50$ взяты из рис. 1 работы [617]

Статические модели водородных звезд при $S = \text{const}$ и их устойчивость изучались в работе [617] на основе численного решения уравнений равновесия (22.1)–(22.2). Эти расчеты повторены в [48], откуда взят рис. 47, задающий зависимость массы от центральной плотности $M(\rho_{c0})$. Помимо областей устойчивости и неустойчивости, полученных в [617], в [48] было найдено число неустойчивых мод, используя условие пересечения экстремалей [105], см. также гл. 12. Характерной особенностью зависимости $M(\rho_{c0})$ является наличие крутого спада (скачка), появляющегося при $S > 14$ в области, где значительная часть звезды находится в состоянии частичной ионизации. На спаде в [48, 617] не было построено ни одной статической модели. После спада число неустойчивых мод либо уменьшается на единицу, и модель становится устойчивой (для $S = 20, 30, 36$ на рис. 47), либо не изменяется и неустойчивость сохраняется (для $S = 24$).

В [48] наряду со статическими моделями, слева от скачка были построены стационарно истекающие модели типа (30.19), причем кривая $M(\rho_{c0})$ для истекающих моделей непрерывно сшивается со статической кривой $M(\rho_{c0})$ в нижней точке скачка (рис. 48). Метод построения исте-

кающих моделей был тем же, что и при построении аналогичных биполитропных моделей и требует положительного интеграла Бернулли H из (30.8) при отсчете энергии от состояния молекулярного водорода. При известном H , записывая (30.8) в критической точке (30.9), где

$$u_{\text{cr}}^2 = (\partial P / \partial \rho)_S = \gamma_{\text{cr}} \frac{P_{\text{cr}}}{\rho_{\text{cr}}} = \frac{GM}{2r_{\text{cr}}}, \quad (30.26)$$

численно находятся параметры критической точки и скорость потери массы $\dot{M}$ из (30.7).

Для нахождения интеграла H в [48] использовалась следующая процедура. При данной энтропии рассчитывалась структура статических ядер интегрированием уравнений равновесия (22.1), (22.2) от центра при заданной центральной плотности ρ_{c0} . На каждом шаге вычислялась величина H из (30.8). Для возможности построения модели со статическим ядром и стационарно истекающей оболочкой типа (30.19) должны выполняться следующие требования.

1. Необходимо существование протяженного по радиусу слоя с $H \approx \text{const} > 0$ и массой малой, по сравнению с массой статического ядра. Это требование вытекает из условия того, что в истекающей модели имеется промежуточная область с $u \ll u_s$, где с достаточной точностью справедливы уравнения гидростатики. Структура истекающей звезды не должна зависеть от места сшивки двух решений. Постоянство H и малость массы этого слоя обеспечат однозначность построения истекающей модели при данных S и ρ_{c0} .

2. Критический радиус r_{cr} из (30.26) должен быть больше радиуса сшивки r_b (см. (30.20)).

3. Масса m_l слоя $r_b < r < r_{\text{cr}}$ много меньше массы ядра M . Это позволяет использовать интеграл Бернулли (30.8) без самогравитации. Это же условие определяет квазистационарность истечения с временем диссипации звезды $\tau \gg \tau_h$ (см. (30.24)).

4. Скорость в месте сшивки должна быть мала, $u_b^2/H \ll 1$, что аналогично условию 1.

5. Наряду с условием 3 для пренебрежения самогравитацией вещества в потоке необходимо выполнение неравенства

$$\Delta H = G \int_{r_b}^{r_{\text{cr}}} \frac{dm}{r} \ll H. \quad (30.27)$$

Представленные на рис. 48 истекающие модели удовлетворяют всем сформулированным выше требованиям. Зависимость $H(r)$ для статических моделей с различными центральными плотностями ρ_{c0} при $S = 30$, приведенная на рис. 49, иллюстрирует появление истекающей модели. Плато на кривой $H(r)$ имеется для моделей с

$$\rho_{c, \text{min}} = 8,0 \cdot 10^{-10} < \rho_{c0} < 3,4 \cdot 10^{-5} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} = \rho_{c, \text{max}}, \quad (30.28)$$

причем значение $\rho_{c0} = \rho_{c, \text{max}}$ соответствует скачку на кривой статических решений $M(\rho_{c0})$. Справа от скачка истекающих моделей нет, а слева от него истекающее решение существует наряду с неустойчивым статическим с гораздо большей массой.

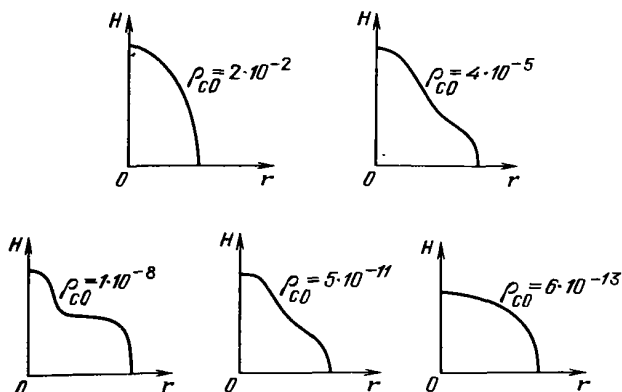


Рис. 49. Последовательное изменение вида зависимости $H = E + \frac{P}{\rho} - G \frac{m}{r}$ от текущего радиуса статической модели вдоль изэнтропы $S = 30$ при разных ρ_{c0} (качественная картина). Изображены только те участки $H(r)$, на которых $H > 0$

В табл. 32 приведены параметры некоторых истекающих моделей, для которых видно выполнение требований 1)–5). Конкретное место сшивки для моделей из табл. 32 и рис. 48 выбиралось из условия минимума величины

$$\eta = \frac{m_1}{M} + \frac{\Delta H}{H_0} + \frac{u_b^2}{H_b}, \quad (30.29)$$

хотя сдвиг места сшивки вдоль плато $H(r)$ практически не менял результатов. Энергия диссоциации водорода на один грамм равна $2,15 \cdot 10^{12}$ эрг $\cdot$ г $^{-1}$, а ионизация — $13 \cdot 10^{12}$ эрг $\cdot$ г $^{-1}$, все модели, кроме первой в табл. 32 имеют отрицательную энергию относительно атомарного водорода. Сравнение показывает, что область истечения по оси ρ_{c0} на рис. 48 пропорциональна величине скачка на кривой $M(\rho_{c0})$ по оси M (рис. 47). Скачок максимален для $S = 30$, для которого максимальной оказалась область истекающих моделей. Исчезновение скачка на кривых $M(\rho_{c0})$ из [617] определяет верхнюю и нижнюю границу истекающих моделей на рис. 48.

Ядра стационарно истекающих звезд динамически, по-видимому, устойчивы, хотя строгие методы исследования устойчивости здесь не разработаны. Истекающая звезда может превратиться у статическую меньшей массы и большей плотности, в отличие от биполитропных моделей, где в стационарно истекающей звезде ρ всегда уменьшается со временем ($\bar{\rho} \sim M/R^3 \sim M^{2n_1/(3-n_1)}$, $n_1 < 3$, см. (30.14), а звезда в итоге диссипирует.

Для возможности реализации подобных истекающих моделей в природе необходим дополнительный нагрев вещества протозвезды на достаточно ранних стадиях ее формирования космическими лучами, или излучением горячих звезд, образующихся по соседству.

$\frac{S}{R}$	$\rho_{c0},$ $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{r_b}{r_{\odot}}$	H_b/R	$\rho_b,$ $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	T_b, K	μ_b
30	8,7(-6)	0,358	629	1,2(4)	7,8(-12)	2100	1,13
30	2,7(-9)	1,594	3178	9300	7,2(-13)	1820	1,27
30	8,05(-10)	1,460	4227	1,3(4)	1,0(-12)	1840	1,74
24	1,8(-6)	0,103	218	2503	9,5(-12)	1897	1,47
24	1,0(-6)	0,107	274	4000	6,6(-12)	1860	1,49
24	5,1(-7)	0,094	365	8800	2,6(-11)	1990	1,42

Индекс "b" использован для величины в точке сшивки, μ — молекулярный вес из (1.7), $\beta_g = P_g/P$ (см. (1.19)), E/M — полная удельная энергия относительно молекулярного водорода.

в) Модели истекающих корон молодых звезд. Наблюдаемые профили эмиссионных линий ионизованного кальция H и K и бальмеровских линий водорода у звезд типа T Тельца соответствуют скоростям истечения, превышающим $100 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$. Это значительно больше, чем значения тепловых скоростей при температурах возможного образования этих линий [448]. Для объяснения этого факта, а также других наблюдательных особенностей молодых звезд в [50] была рассмотрена модель истекающей короны, в которой формируются плотные и холодные сгустки в результате развития тепловой неустойчивости. После своего образования сгустки движутся с замедлением в гравитационном поле звезды и обеспечивают наблюдаемую эмиссию в линиях.

Предполагается, что корона образуется за счет трансформации в тепло потока механической энергии, идущей из конвективной оболочки. Важную роль в такой трансформации играет магнитное поле. Аналогично наиболее простым моделям солнечной короны [174] предположим корону молодой звезды изотермической внутри и адиабатической снаружи. Величина $\int \frac{dP}{\rho}$, входящая в интеграл Бернулли (30.8), имеет вид [145, 50]

$$\int \frac{dP}{\rho} = \begin{cases} E + P/\rho - TS & \text{при } T = T_0 = \text{const} \\ E + P/\rho & \text{при } S = S_1 = \text{const} \end{cases} \quad (30.30)$$

Соответственно,

$$H = \begin{cases} H_i = \frac{u^2}{2} + E + \frac{P}{\rho} - T_0 S - \frac{GM}{r} & \text{при } T = T_0, \\ H_a = \frac{u^2}{2} + E + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} & \text{при } S = S_1. \end{cases} \quad (30.31)$$

Из условия непрерывности u , ρ и T в точке $r = r_1$, где происходит переход от изотермического течения к адиабатическому, имеет место связь

$$H_a = H_i + T_0 S_1. \quad (30.32)$$

β_{gb}	$\frac{r_{cr}}{R_{\odot}}$	$\frac{\dot{M}}{M_{\odot}/\text{год}}$	$\frac{10^3 m_l}{M}$	$\frac{10^3 \Delta H}{H}$	$\frac{10^3 u_b^2}{H}$	$\frac{E/M}{10^{12} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1}}$
0,963	1400	4,5 (-5)	3	0,8	0,3	4,16
0,759	4720	3,8 (-4)	6	1	5	1,50
0,770	6700	1,1 (-3)	30	4	7	1,61
0,969	420	7,5 (-6)	0,4	0,2	0,8	1,50
0,958	571	9,3 (-6)	0,8	0,4	1	1,18
0,987	882	2,5 (-4)	20	4	8	1,39

Критическая точка предполагается лежащей в изотермической области, где вместо (30.26) справедливы соотношения

$$u_{cr}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \frac{GM}{2r_{cr}}. \quad (30.33)$$

Если известны температура изотермической короны T_0 и интеграл H_i из (30.31), то, используя соотношения (30.33), можно найти параметры критической точки u_{cr} , ρ_{cr} , r_{cr} и поток массы $\dot{M}$ из (30.7). Для определения скорости вещества на бесконечности требуется задание энтропии S_1 в точке сшивки $r = r_1$

$$u_{\infty}^2 = 2(H_i + T_0 S_1). \quad (30.34)$$

Интеграл H_i выбирается из условия заданной светимости короны. Для вычисления светимости при известном H_i требуется конкретизировать механизм ускорения короны и найти распределение в ней температуры, плотности и скорости.

Предполагается, что на радиусе r_b , примерно совпадающем с радиусом звездной фотосферы r_f , происходит быстрое превращение потока механической энергии Q (эрг $\cdot$ с $^{-1}$) в тепло. При этом параметры плазмы меняются почти скачкообразно и предполагается, что температура от фотосферной T_f вырастает до корональной T_0 . На тепловом скачке справедливы законы сохранения [27]

$$\rho_{b-} u_{b-} = \rho_{b+} u_{b+}, \quad (30.35)$$

$$P_{b-} + \rho_{b-} u_{b-}^2 = P_{b+} + \rho_{b+} u_{b+}^2, \quad (30.36)$$

$$\frac{u_{b-}^2}{2} + E_{b-} + \frac{P_{b-}}{\rho_{b-}} + \frac{Q}{4\pi r_b^2 \rho_{b-} u_{b-}} = \frac{u_{b+}^2}{2} + E_{b+} + \frac{P_{b+}}{\rho_{b+}}. \quad (30.37)$$

Здесь величины слева от скачка (ближе к звезде) имеют индекс (b-),

Модельные параметры истекающих звезд типа Т Тельца

$\frac{r_b}{R_\odot}$	$T_f,$ 10^3 К	$T_0,$ 10^6 К	$\rho_{b+},$ 10^{-13} $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$u_{b+},$ $\text{км} \cdot \text{с}^{-1}$	$\frac{r_{\text{сг}}}{R_\odot}$	$u_{\text{сг}},$ $\text{км} \cdot \text{с}^{-1}$	$\rho_{\text{сг}},$ 10^{-14} $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\dot{M}, 10^{-8}$ $M_\odot/\text{год}$
3,5	4,9	1,0	7	67	5,7	129	10	6
2,0	4,9	1,6	6	72	3,6	163	8	2
2,4	4,43	2	1					0,9
2,4	4,43	2,4	1,2					2
2,4	4,43	2,4	1,7					3

L_f – светимость фотосферы, $M_{\text{сг}}$ – масса короны при $r_b < r < r_{\text{сг}}$.

а справа – (b_+) . Из (30.31) и (30.7) следуют еще два уравнения:

$$\rho_{b+} u_{b+} = \frac{\dot{M}(H_i, T_0)}{4\pi r_b^2}, \quad (30.38)$$

$$\frac{u_{b+}^2}{2} + E_{b+} + \frac{P_{b+}}{\rho_{b+}} = H_i + T_0 S_b + \frac{GM}{r_b}. \quad (30.39)$$

При учете термодинамических функций $P(\rho, T)$, $E(\rho, T)$, $S(\rho, T)$ (см. § 1) и задании величин

$$T_{b-} = T_f, \quad T_{b+} = T_0, \quad r_b = r_f, \quad H_i \quad (30.40)$$

соотношения (30.35) – (30.39) представляют собой пять уравнений относительно пяти неизвестных

$$\rho_{b-}, \quad \rho_{b+}, \quad u_{b+}, \quad u_{b-}, \quad Q. \quad (30.41)$$

Решения этой системы для водородной плазмы, прозрачной для излучения, с рассмотренными выше термодинамическими функциями (см. [48]) получены в [50, 51] для некоторых наборов параметров (30.40) и приведены в табл. 33.

Часть (половина или меньше) коронального рентгеновского излучения $L_{\text{сг}}$ падает на поверхность звезды и нагревает ее, образуя горячий хромосферный слой с $T_x = (5 \div 10) \cdot 10^4 \text{ К}$ в дополнение к "холодному" хромосферному слою с $T_{x0} = 10^4 \text{ К}$, который образуется за счет действия теплопроводности. Параметры горячей хромосферы: температура T_x , плотность ρ_x , светимость L_x и толщина h_x рассчитаны из баланса энергии однородного по плотности хромосферного слоя в предположении минимума допустимой плотности хромосферы, обеспечивающей заданную скорость охлаждения ([50], первые две строки табл. 33), либо из условия равенства давлений хромосферы и короны ([51], три последние строки в табл. 33).

Рассмотренная в [50] горячая хромосфера у звезд типа Т Тельца была открыта наблюдениями в ультрафиолетовой области на спутнике IUE и светимость ее составила $\sim 0,3 L_\odot$ в области 1150–3100 Å [372] для звезды RU Lupi. В [51] рассчитаны параметры хромосферы и короны, а также ожидаемое рентгеновское излучение от этой звезды (три последние

$\frac{L_f}{L_\odot}$	$\frac{L_{cor}}{L_\odot}$	$\frac{M_{cor}}{M_\odot}$	$T_x, 10^4 \text{ K}$	$\rho_x, 10^{-11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\frac{L_x}{L_\odot}$	$h_x, \text{ км}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$
6,36	108	3 (-11)	8,9	2	54	1,6	41	9 (4)
2,06	14,6	5 (-12)	4,6	2	7,3	1,85	108	4 (4)
2	0,6		6,0	0,33	0,3	10		
2	2		5,8	0,5	0,7	10		
2	4		6,0	0,67	1,0	6		

строки табл. 32). Наблюдения в мягкой рентгеновской области на спутнике Эйнштейн [371, 355] обнаружили небольшую светимость звезд типа Т Тельца $L_x \leq 10^{31} \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}$, что существенно меньше значений L_{cor} , приведенных в табл. 33. Из наблюдений на спутнике Астрон получены указания на сильную переменность звезды RU Lupi в рентгеновской области 2–7 кэВ [375]. Не исключено, что слабая наблюдаемая светимость молодых звезд в рентгене связана с сильным его поглощением в оболочке вокруг этих звезд, а их истинная рентгеновская светимость L_{cor} значительно больше и, возможно, $L_{cor} \geq L_x$ в соответствии с [51].

Тепловой скачок (30.35)–(30.37) для моделей из табл. 33 проходит при плотности много меньшей фотосферной $\rho_b \ll \rho_f$ и оптической толщине $\tau = 10^{-2} - 10^{-3}$ [50]. В области температур $T = (1 \div 3) \cdot 10^6 \text{ К}$ функция охлаждения прозрачной плазмы с нормальным составом $\Lambda(T) \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ убывает с температурой [335], что приводит к неустойчивости относительно образования сгустков с меньшей температурой и большей плотностью*). Время конденсации сгустка

$$t_1 \approx \frac{E}{n^2 \Lambda(T)}. \quad (30.42)$$

Минимальный размер сгустка определяется теплопроводностью и составляет

$$l_{min} \approx \frac{1}{n} \sqrt{1,8 \cdot 10^{-6} T^{7/2} / \Lambda(T)} \approx 4 \cdot 10^7 \text{ см} \quad (30.43)$$

для $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^6 \text{ К}$.

На Солнце тепловая неустойчивость в короне не развивается из-за малой плотности и большого значения l_{min} . Время развития тепловой неустойчивости t_1 приведено в табл. 33 наряду с временем пролета t_2 истекающим газом характерного размера короны [50]. Условие $t_2 \gg t_1$ означает, что тепловая неустойчивость успевает развиться и происходит образование холодных плотных сгустков.

*) Величина $\Lambda(T) n_e (n_e + n_H) \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ дает количество энергии, излучаемое 1 см³ плазмы за 1 с, $\Lambda(T)$ рассчитана в [335].

Существование плотных хромосфер и корон у звезд типа Т Тельца ставит вопрос о теоретическом объяснении формирования большого потока механической энергии, сравнимого с фотосферным, в звездах с мощными конвективными оболочками. С термодинамической точки зрения этот факт может быть объяснен при большой температуре T_m в месте формирования механического потока энергии. Эффективность преобразования потока тепла в поток механической энергии в звезде, рассматриваемой как тепловая машина, не превышает

$$\eta < \frac{T_m - T_f}{T_m} \quad (30.44)$$

и при $T_m \gg T_f$ может приближаться к единице.

г) О явлении фуора. В настоящее время известно несколько звезд, быстро увеличивающих свою светимость в ~ 100 раз и сохранивших этот высокий уровень на долгие годы. Первой из таких звезд была FU Ori, по имени которой это явление получило название фуоров [8]. Это явление можно связать с рождением молодой звезды достаточно большой массы $M > 3 M_\odot$, которая заканчивает стадию аккреции, испаряет свою пылевую оболочку после загорания водорода и сразу появляется вблизи главной последовательности ([463, 644], см. § 26). Это простое объяснение встречается с трудностью при попытке применения его к фуору V 1057 Cyg, на месте которого до вспышки наблюдалась звезда типа Т Тельца [395]. Массы звезд типа Т Тельца существенно меньше, чем оцениваются после вспышки массы звезд FU Ori и V 1075 Cyg [175].

Этих трудностей можно избежать, если предположить, что звезда V 1057 Cyg является двойной, содержащей звезду типа Т Тельца и другую молодую звезду с существенно большей массой, которая и создает явление фуора [49, 281]. На стадии существования пылевой оболочки массивная звезда светила, в основном, в инфракрасной области и в оптике была слабее соседней звезды типа Т Тельца. В настоящее время звезда типа Т Тельца значительно, в ~ 100 раз, слабее своего компаньона, но ее обнаружение благодаря сильным эмиссионным линиям, ультрафиолетовым излучениям и другим характерным особенностям звезд типа Т Тельца [175] представляется делом не безнадежным.

На основе наблюдений с помощью спекл-интерферометрии была открыта двойственность самой звезды Т Тельца, причем компаньоном ее является инфракрасная звезда, свойства которой изучены плохо [341, 385].

После первых работ [229] расчеты эволюции звезд в широком интервале масс проводились различными группами исследователей с использованием все более мощных компьютеров. К настоящему времени (1987) в общих чертах ясна картина ядерной эволюции звезды, начиная с главной последовательности и кончая образованием белого карлика, нейтронной звезды или черной дыры. В то же время, несмотря на большие затраченные усилия, имеется лишь довольно грубая схема эволюции, а достоверность многих деталей невелика. При качественном сходстве детали расчетов, выполненных различными авторами, не совпадают. В значительной мере это связано с неопределенностью многих физических основ теории эволюции, таких, как конвекция, перемешивание, скорости ядерных реакций при низких энергиях и др. Возможно, здесь играют роль и вычислительные трудности, связанные с накоплением численных ошибок, из-за чего различные методы решения уравнений (см. гл. 6) дают иногда разные результаты. В последнем пункте ситуация здесь менее драматична, чем в теории двумерного коллапса (см. § 27), где изменение только численного метода приводит к качественному изменению результатов.

Подробные расчеты эволюции были проведены японскими учеными [391], Шварцшильдом и Хэрмом [386—388, 569—573], Ибеном [406—426], и Пачиньским [520—531]. Важные результаты получены также в работах Стотерса [587—589] с соавторами, Киппенхана с соавторами, см. обзор [394], советских авторов [165, 290, 155, 82, 81, 204—206] и др.

§ 31. Источники неопределенности в эволюционных расчетах

а) **Конвекция.** Ввиду отсутствия строгой количественной теории конвекции (см. гл. 3) в эволюционных расчетах обычно пользуются феноменологическим описанием по теории пути перемешивания*). Неопределенный параметр этой теории — путь перемешивания l — по-разному выбирался различными авторами. В работах Ибена [406, 413, 590, 425] длина пути перемешивания определялась масштабом неоднородности в распределении плотности

$$l = \alpha | \rho / \nabla \rho | = \alpha H_{\rho}, \quad \alpha = 1/2. \quad (31.1)$$

В более поздних его работах [414, 416, 417, 271, 459] использовалась шкала высот по давлению

$$l = \alpha | P / \nabla P | = \alpha H_P, \quad 0,4 < \alpha < 1,2. \quad (31.2)$$

В работе [587] формула (31.1) использовалась с различными значениями α . В некоторых случаях (малые плотности, большая светимость и большая непрозрачность) (31.1) завышает эффективность конвективного

*) В работе [391] описание конвекции проводилось еще более упрощенно.

переноса. В работах [521, 524, 528] использовалась формула (31.2) с $\alpha = 1$. Тот же способ описания конвекции рассматривался в [290]. В случае (31.2) во внешних оболочках звезд с $T_{\text{ef}} \leq 6000$ К может возникнуть инверсный градиент плотности, связанный с ограниченными возможностями переноса тепла конвекцией. Указанные выше способы описания конвекции использовались только в конвективных оболочках звезд. В конвективных ядрах, где плотности достаточно велики, использовалось приближение адиабатической конвекции. Как отмечалось в [290], это приближение может нарушиться, например, вблизи конца горения водорода и образования лучистого гелиевого ядра. Приближение адиабатической конвекции используется обычно и в слоевых источниках (см. ниже), где оно является слишком грубым, так как в пределах шкалы высот по давлению поток энергии может меняться на несколько порядков [423]. Влияние неадиабатичности в этой области на эволюционные треки до сих пор не исследовано.

б) Полуконвекция. В массивных звездах с $M > 10 M_{\odot}$ уход звезды с главной последовательности, где она химически однородна, приводит к появлению над конвективным ядром зоны с очень малым превышением

$$\text{градиента температуры } \gamma_{\text{rad}} = \frac{d \ln T}{d \ln P} \text{ над адиабатическим } \gamma_2 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S$$

(см. § 10 и 22). Эта зона называется промежуточной конвективной или полуконвективной. Причиной появления этой зоны с ростом массы звезды является увеличение роли лучистого давления, которое уменьшает ∇_a по сравнению с чисто газовым случаем. Примерное равенство γ_2 и γ_{rad} , а также близость этой зоны к конвективному ядру приводят к большим неопределенностям в счете. До сих пор нет единого мнения о критерии конвективной устойчивости в химически неоднородной среде. На наш взгляд необходим учет градиента химического состава (см. (10.11)), однако во многих работах используется критерий (10.3). Выбор между этими критериями решающим образом влияет на перемешивание между ядром и полуконвективной зоной. В случае критерия Леду (10.11) между конвективным ядром и зоной полуконвекции возникает лучистый слой, препятствующий поступлению дополнительного вещества в конвективное ядро [165]. В случае критерия Шварцшильда (10.3) зона полуконвекции соприкасается с ядром, однако предполагается не полное перемешивание, а установление такого градиента концентрации, при котором $\gamma_2 = \gamma_{\text{rad}}$. Расчеты по разным критериям приводят к неопределенностям в пределах $\sim 10\%$ на стадии горения водорода и к существенно большим различиям на поздних стадиях. Это касается, в частности, положения массивных звезд с $10 \leq M \leq 40 M_{\odot}$ на стадии горения гелия в ядре: в случае критерия (10.11) гелий в основном сгорает, когда звезда является красным сверхгигантом с $T_{\text{ef}} \leq 5000$ К, а в случае критерия (10.3) основное время горения гелия массивная звезда проводит в области голубых сверхгигантов с $T \geq 10^4$ К. В звездах с $M \geq 40 M_{\odot}$ гелий всегда сгорает в области красных сверхгигантов и выбор критерия оказывается несущественным [155]*). Дальнейшая эволюция массивных звезд, начиная с горения углеро-

*) См., однако, [588], рис. 67 и табл. 41.

да, происходит в области красных сверхгигантов и не зависит от выбора критерия конвекции [155].

в) **Нелокальность и проникновение конвекции.** Как отмечалось в § 11, конвективные элементы проникают в область устойчивости, увеличивая зону перемешивания.

Однако глубина проникновения сильно зависит от способа ее определения. В [576, 475] получено $d \leq 0,15 H_p$ (см. § 11), в то же время в [329], где использовалась статистическая модель турбулентной диффузии, величина d/H_p достигала 0,7. В эволюционных расчетах [589] рассматривались различные варианты $0 \leq d/H_p \leq 0,7$ при исследовании эволюции массивных звезд с $15 \leq M/M_\odot \leq 120$ до выгорания водорода в центре. Наибольшие эффекты от учета проникновения конвекции и дополнительного перемешивания следует ожидать на стадии горения тонких слоевых источников, однако такое исследование, насколько нам известно, пока не проводилось.

г) **Непрозрачность и ядерные реакции.** Развитие атомной и ядерной физики позволило теоретически и экспериментально определить непрозрачность вещества (гл. 2) и скорости ядерных реакций (гл. 4, 5). В отличие от конвекции, при определении непрозрачности имеют дело с достаточно строгими теориями. Однако объем вычислительных работ, связанный с учетом большого числа линий, оказывается столь большим, что таблицы непрозрачности постоянно уточняются (см. [128, 129, 334, 250, 319]).

При определении скоростей ядерных реакций теоретические исследования не дают точного ответа, ввиду отсутствия теории сильных взаимодействий необходимо использовать экспериментальные данные. Получение их в области низких энергий, интересных для астрофизики, часто весьма затруднительно. По мере накопления данных скорости многих реакций меняются (см. обзоры [360, 361, 389]). Учет экранирования ядерных реакций при большой плотности сталкивается также с большими неопределенностями ввиду необходимости решения задачи многих тел, для которой имеются только приближенные и не очень строгие подходы (см. § 17).

В существующей ситуации выбор формул и таблиц для непрозрачности, а также для скоростей ядерных реакций часто связан с субъективным подходом астрофизика, проводящего расчеты эволюции.

д) **Способы расчета оболочки.** Оболочки, в которых предполагается тепловое равновесие, рассчитываются обычно отдельно от ядра (см. § 22). Масса оболочки и способ сшивки при этом выбираются по-разному. В [446, 290] статическая оболочка занимала 3% массы звезды, но в [446] модели оболочек рассчитывались заранее и параметры их находились с помощью интерполяции, а в [290] модели оболочек рассчитывались для каждой модели звезды. В [81, 82] масса оболочки составляла 5%, в [522, 521, 524, 528] она составляла 10% от массы звезды и даже больше. Различались также детали расчета ионизационного равновесия, что приводило к различиям в уравнении состояния даже при одинаковых химических составах. Все эти детали отражаются на эволюционных треках.

е) **Другие факторы.** Существенным препятствием, затрудняющим сравнение результатов различных авторов, является различие в начальных химических составах и в рассматриваемых массах звезд. В разных работах

массы принимались равными

$$\begin{array}{ll}
 M/M_{\odot} = 0,8, 1,5, 3, 7, 10, 15 & \text{в } [521], \\
 1,25, 1,5, 2,25, 3, 5, 9, 15 & \text{в } [413], \\
 16, 32, 64 & \text{в } [82], \\
 30 & \text{в } [165], \\
 9, 30 & \text{в } [290], \\
 15, 30 & \text{в } [587], \\
 3, 5, 7 & \text{в } [271], \\
 15, 25 & \text{в } [459],
 \end{array} \quad (31.3)$$

а начальные химические составы таковы:

$$\begin{array}{ll}
 (x_H, x_{He}, x_Z) = (0,708, 0,272, 0,02) & \text{в } [407-413] \\
 (0,602, 0,354, 0,044) & \text{в } [446] \\
 (0,7, 0,27, 0,03) & \text{в } [521] \\
 (0,75, 0,22, 0,03) & \text{в } [165, 290] \\
 (0,7, 0,28, 0,02) & \text{в } [459] \\
 0,62 \leq x_H \leq 0,739, 0,021 \leq x_Z \leq 0,044 & \text{в } [587] \\
 0,71 \leq x_H \leq 0,78, 0,001 \leq x_Z \leq 0,02 & \text{в } [271].
 \end{array} \quad (31.4)$$

Вращение и магнитное поле звезд может оказывать существенное влияние на ядерную эволюцию, вызывая меридиональную циркуляцию и связанное с ней перемешивание. Учет этих факторов в расчетах, охватывающих фазы от главной последовательности до поздних стадий, практически не проводился.

Использование различных методов расчета (см. гл. 6) и различных версий одного и того же метода может дать незначительные различия для химически однородных моделей на главной последовательности. При достижении поздних стадий, требующих ≥ 1000 эволюционных шагов, накопление численных ошибок и, соответственно, чувствительность результатов к выбору численной схемы могут оказаться существенными. К настоящему времени этот вопрос не исследован.

Важным фактором, влияющим на эволюцию звезд, является потеря массы. Учет влияния этой потери при рассмотрении эволюции массивных звезд (см., например, [588, 618, 476, 477]) и звезд средней массы [387, 420, 563, 565] в отсутствие разработанной теории истечения из звезд проводился феноменологически (за исключением попытки самосогласованного решения в [290]) и оставляет много неопределенностей.

§ 32. Эволюция звезд на спокойных стадиях горения

Результаты эволюционных расчетов представляются обычно в виде треков на диаграмме Герцшпрунга–Рассела (ГР), где по горизонтали откладывается логарифм эффективной температуры $\lg T_{\text{ef}}$ (см. (6.21), (22.11)), а по вертикали — логарифм светимости $\lg L$.

Звезды с $M \geq 0,8 M_{\odot}$, для которых длительность ядерной эволюции не превышает космологическое время $\sim 2 \cdot 10^{10}$ лет, не вырождены на главной последовательности (ГП) химически однородных звезд с составом нормальным (табл. 1) или обедненным тяжелыми элементами. Эволюция звезды сопровождается ростом ее центральной плотности и прибли-

жением к состоянию вырождения. Для маломассивных звезд с $M \leq 2,25 M_{\odot}$ вырожденным оказывается уже гелиевое ядро, образующееся после выгорания водорода в центре и ухода звезды с ГП. Для звезд промежуточной массы с $2,25 < M/M_{\odot} \leq 8$ гелиевое ядро не вырождено, но вырожденным является образующееся после выгорания гелия углеродное ядро, а при $M = (8 \div 10) M_{\odot}$ вырождение наступает на стадии кислородно-неоново-магниевого ядра. В массивных звездах с $M > 13 M_{\odot}$ вырождение наступает только на последних стадиях эволюции с большой нейтринной светимостью $L_{\nu} \gg L_{\text{opt}} (\equiv L)$ [415, 626, 625].

После формирования вырожденного ядра в звездах развиваются тепловые неустойчивости, приводящие к быстрым и сильным изменениям в скорости энерговыделения и к существенным, хотя и не столь заметным изменениям T_{ef} и L . К ним относятся гелиевые вспышки в вырожденном ядре маломассивной звезды [573, 569, 388], вспышки в невырожденном гелиевом слоевом источнике при наличии вырожденного углеродного ядра в звездах малой и средней массы [570, 386, 571, 627]. Особо нужно выделить вспышки в углеродных вырожденных ядрах, могущих привести к взрывам сверхновых [524, 526]. Расчеты на этих стадиях часто проводятся с привлечением различных упрощающих условий [552, 523, 204, 597], так как обычные методы (см. § 22) оказываются неэффективными.

В невырожденных звездах также может иметь место тепловая неустойчивость, проявляющаяся в нерегулярном характере петель на ГР диаграмме ([651, 522, 271], см. ниже). Ввиду существенно больших времен развития и меньших перепадов в энерговыделении эта неустойчивость не создает столь существенных трудностей при расчетах.

а) Расчеты Ибена. Первая большая серия расчетов эволюции звезд различной массы опубликована Ибеном в 1964–67 гг. [407–413]. Расчеты проводились методом Хенли с пришивкой оболочки (§ 22) для начального химического состава $x_{\text{H}} = 0,708$, $x_{\text{He}} = 0,272$, $x_{\text{Z}} = 0,02$. Конвекция в оболочке рассчитывалась с длиной пути перемешивания, равной половине шкалы высот по плотности $l = \frac{1}{2} H_{\rho}$. В качестве критерия кон-

векции принималось условие Шварцшильда (10.3), не учитывающее градиент химического состава. Основные результаты этих расчетов представлены на рис. 50–54 и в табл. 34, 35. Модели звезд с $M > 3 M_{\odot}$ строились до исчерпания гелия в центре, а для $M < 3 M_{\odot}$ — до загорания гелия в ядре. Расчет эволюции звезды с $5 M_{\odot}$ протянут несколько дальше вдоль стадии горения гелиевого слоевого источника. Для звезд с $M \leq 9 M_{\odot}$ отрезки между точками на рис. 50–53 соответствуют следующим стадиям эволюции:

- 1–3 горение водорода в ядре (ГП);
- 3–4 гравитационное сжатие всей звезды; эта фаза отсутствует для звезды с $M = 1 M_{\odot}$;
- 4–5 загорание водородного слоевого источника;
- 5–6 горение водорода в толстом слое;
- 6–9 уменьшение толщины слоя водородного горения;
- 9–10 быстрое распространение конвекции от поверхностных слоев внутрь звезды;

Времена эволюции звезд

Точка	1 $M_{\odot}$	1,25 $M_{\odot}$	1,5 $M_{\odot}$	в 10^8 лет				в 10^7 лет			
				2,25 $M_{\odot}$	3 $M_{\odot}$	5 $M_{\odot}$	9 $M_{\odot}$	15 $M_{\odot}$			
1	0,0506	0,02954	0,01821	0,058550	0,024586	0,15800	0,0232171	0,0138224			
2	3,8209	1,4220	1,0277	2,7988965	1,38921	4,01899	1,435125	0,663253			
3	6,7100	2,8320	1,5710	4,8502987	2,23669	6,60443	2,129274	1,024045			
4	8,1719	3,1044	1,652	5,0150323	2,34089	6,82168	2,189700	1,046745			
5	9,2012	3,5524	1,8261	5,2017959	2,40119	6,83608	2,193710	1,048983			
6	9,9030	3,9213	1,9666	5,3846801	2,44420	6,95886	2,198813	1,050644			
7	10,195	4,0597	2,0010	5,4459513	2,47004	7,00750	2,206125	1,054302			
8		4,1204	2,0397	5,4736797	2,47865	7,02016	2,209479	1,113604			
9		4,1593	2,0676	5,4947244	2,48429	7,02709	2,212819	1,154207			
10	10,352	4,2060	2,1059	5,5157054	2,48925	7,03418	2,213585	1,192760			
11	10,565	4,3437	2,1991	5,6167250				1,208043			
12	10,750	4,4505	2,2628	5,7773918	2,50728		2,215236	1,210199			
13	10,875	4,5349		5,8986139	2,53163	7,08275	2,220137	1,211368			
14					2,55850		2,243431				
15					2,78295	7,57595	2,267412				
16					2,94233	7,77057	2,273715				
17					3,06968		2,277173				
18					3,19043	8,68987	2,314993				
19					3,23566		2,567444				
20					3,26323	8,78291	2,623007				
21						8,79060	2,625870				
Литература	[411]	[411]	[411]	[412]	[407]	[408]	[409]	[410]			

Основные параметры звезд на эволюционных треках рис. 50–54 и в табл. 34

$\frac{M}{M_{\odot}}$	главная последовательность				последняя модель в табл. 34						M_c, ms		Литература
	$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$T_c, 10^6 \text{ К}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$	$\frac{R_s}{R_{\odot}}$	$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$T_c, 10^6 \text{ К}$	$\frac{L}{L_{\odot}}$	$\frac{R_s}{R_{\odot}}$	$\frac{M_1}{M_{\odot}}$	$\frac{M_2}{M_{\odot}}$	M_c, ms	M_c, max	
											$M_{\odot}$	$M_{\odot}$	
1	90,0	13,9	0,73	0,87	9,12(4)	27,4	11,4	6,18	0,2	...	...	...	[411]
1,25	93,5	16,6	2,3	1,08	1,3(5)	31,0	29,0	10,3	0,23	...	0,012	0,058	[411]
1,5	87,7	18,8	5,4	1,18	1,14(5)	29,9	19,6	7,72	0,22	...	0,056	0,12	[411]
2,25	58,8	22,2	30	1,45	3,2(5)	92,5	590	59,2	0,38	...	0,26	0,33	[412]
3	40,4	24,1	95	1,75	4,14(4)	158	210	26,4	0,59	...	0,46	0,53	[407]
5	17,5	27,3	620	2,40	2,16(4)	184	1,94(3)	44	1,08	0,3	1,0	1,1	[408]
9	10,5	31,0	4,5(3)	3,40	1,33(4)	262	1,6(4)	37	1,9	0,74	2,4	2,7	[409]
15	6,17	34,4	2(4)	4,40	3,9(3)	300	7,8(4)	530	4,7	2,7	5,9	5,9	[410]

ρ_c и T_c — центральные плотность и температура, L и R_s — светимость и радиус звезды, M_1 — масса ядра, где выгорел водород, M_2 — масса СО ядра, M_c, ms — масса конвективного ядра на главной последовательности, M_c, max — максимальная масса конвективного ядра, t_{ms} — время жизни звезды на главной последовательности.

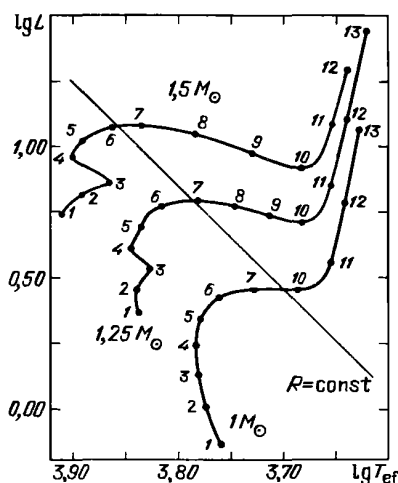
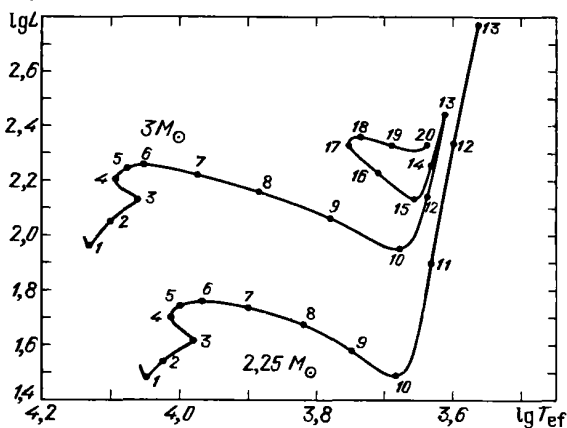


Рис. 50. Эволюционные треки звезд с массами 1, 1,25, 1,5 $M_{\odot}$ с химическим составом из (31.4). Светимость L дана в $L_{\odot}$. Эффективная температура T_{ef} в К. Каждой цифре соответствует время эволюции из табл. 34. Время t_1 соответствует стадии гравитационного сжатия звезды к главной последовательности. Прямая линия соответствует постоянному радиусу, из [411]

Рис. 51. То же, что на рис. 50 для $M = 2,25, 3 M_{\odot}$, из [412, 407]



- 10–13 стадия красного гиганта;
- 13 включение реакции $3^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$ в ядре;
- 13–15 первая стадия горения гелия в ядре;
- 15–16 исчезновение глубокой конвективной оболочки, быстрое сжатие;
- 16–18 основная стадия горения гелия в ядре;
- 20–21 общее сжатие с истощением гелия в центре;
- 21–22 горение гелия в толстом слоевом источнике;
- 23 излучение нейтрино из ядра, горение гелия в тонком слоевом источнике.

Треки между точками 21–23 на рис. 52 топологически эквивалентны трекам, полученным в аналогичных расчетах [443, 444].

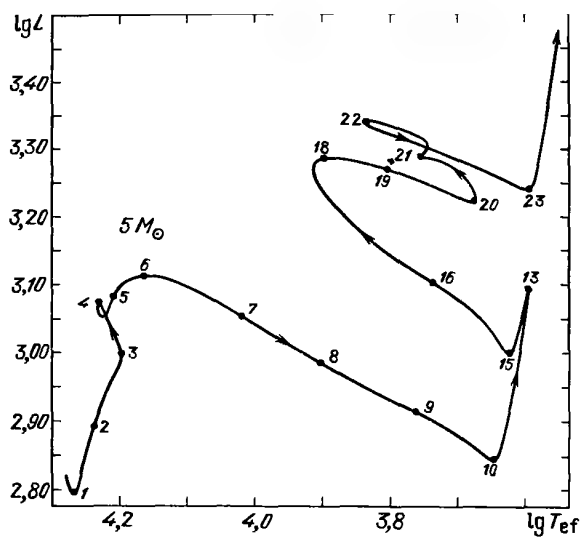


Рис. 52. То же, что на рис. 50 для $M = 5 M_{\odot}$, из [408]

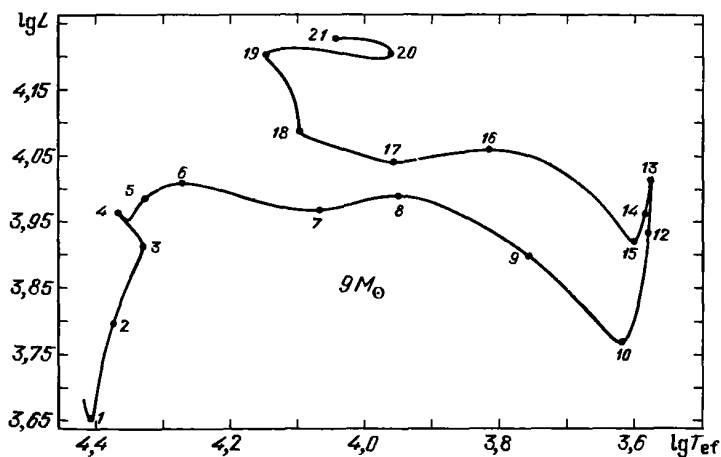


Рис. 53. То же, что на рис. 50 для $M = 9 M_{\odot}$, из [409]

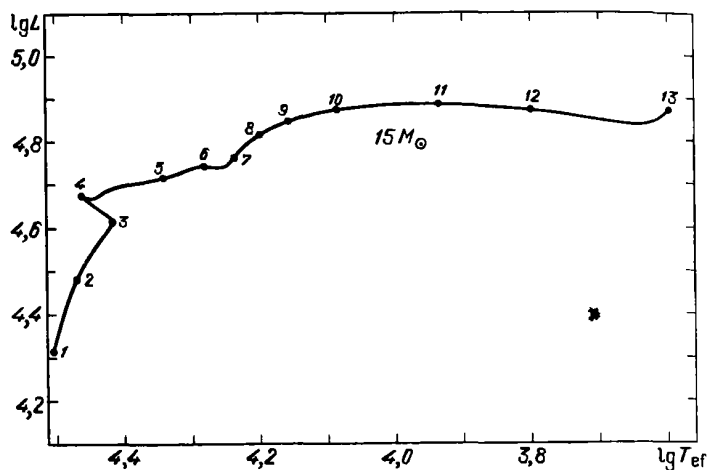


Рис. 54. То же, что на рис. 50 для $M = 15 M_{\odot}$, из [410]

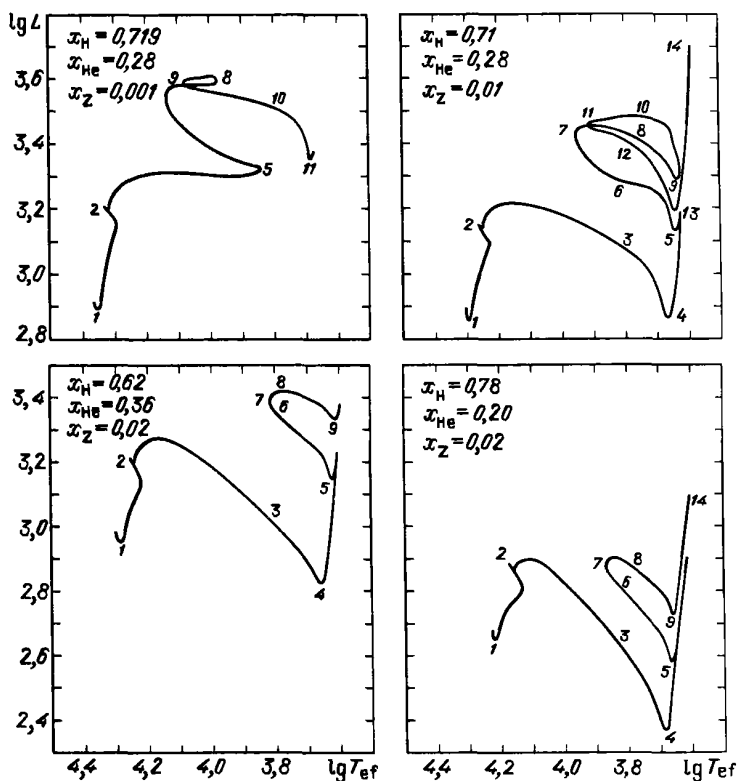


Рис. 55. Эволюционные треки звезд с массами $5 M_{\odot}$ и различными химическими составами, из [271] (см. табл. 36)

Участки 1–4 на рис. 54 для $M = 15 M_{\odot}$ соответствуют тем же стадиям эволюции, что и выше для меньших масс, остальные стадии таковы:

4–7 горение водородного слоевого источника;

7–10 горение гелия в ядре и водорода в слоевом источнике;

11–13 быстрое расширение оболочки.

Соответствующие времена эволюции указаны в табл. 34. Время в точке 1 определяет длительность гравитационного сжатия звезды к главной последовательности.

С ростом массы от 1 до $1,25 M_{\odot}$ лучистое ядро, в котором горит водород, сменяется конвективным. Это связано с переходом от протон-протонного цикла горения (14.1)–(14.3) к углеродному (14.11), имеющему более резкую зависимость от температуры. При наличии лучистого ядра для $M = 1 M_{\odot}$ фаза общего сжатия отсутствует и происходит плавный переход от горения H в ядре к H-слоевому источнику.

Как видно из табл. 35, масса конвективного ядра монотонно растет со временем для $M = 15 M_{\odot}$ и проходит через максимум для меньших масс. В результате горения ${}^4\text{He}$ в ядре образуется ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O}$, причем для $M \geq 5 M_{\odot}$ почти весь ${}^4\text{He}$ превращается в ${}^{16}\text{O}$. Этот результат, однако, ненадежен из-за неопределенности в скорости реакции ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$, используемой в [407–412].

Для звезд с $M \leq 2,25 M_{\odot}$ гелиевое ядро оказывается вырожденным, и в ходе дальнейшей эволюции происходит гелиевая вспышка в ядре. В звездах больших масс горение гелия начинается плавно, без вспышки. Как отмечено в [413], вблизи точки 11 существенный вклад в светимость дает реакция горения азота ${}^{14}\text{N}(\alpha, \gamma){}^{18}\text{F}(\beta^+ \nu){}^{18}\text{O}$.

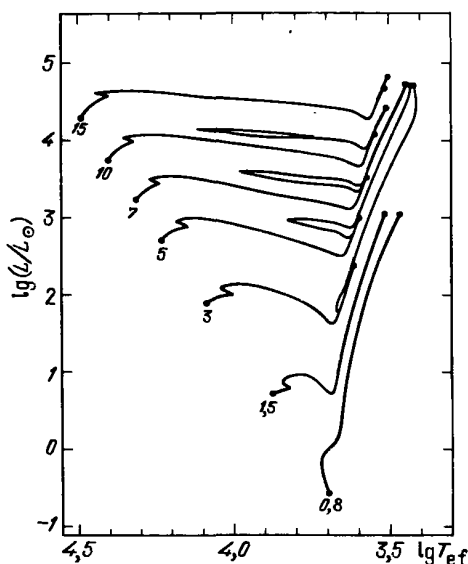
Расчеты проводились с использованием 320 массовых слоев, на каждый трек приходилось 500–660 моделей.

Петли на эволюционных треках с массами звезд $M = 3 \div 9 M_{\odot}$ обусловлены упомянутой выше тепловой неустойчивостью. С ней связана и неоднозначность построения звездных моделей с данной массой и данным распределением химического состава, обнаруженная в [522, 553, 527]. Неоднозначность появляется после точки, где обращаются в нуль детерминанты, возникающие при решении уравнений эволюции методом Шварцшильда (22.23) или методом Хенли после линеаризации системы (22.30)–(22.33). В условиях неустойчивости малые изменения в начальных данных приводят к сильному искажению эволюционных треков в области петель. Резкая зависимость формы петель от химического состава видна на рис. 55 из [271]. Из табл. 36 видны также существенные различия во временах эволюции. Как показано в [522], форма петель зависит не только от физических предположений, но и от того, на каком компьютере проводился расчет одной и той же программы, т.е. от таких различий, как число значащих цифр, методы округления и других мелких деталей. Все это явно указывает на стохастическую природу формы петель. В [651] для массивных звезд с $M \geq 15 M_{\odot}$ факт появления петель связывается с выходом водородного слоевого источника за границу скачка химического состава, вызванного предыдущим распространением внутрь внешней конвективной зоны на стадии до выгорания гелия в центре. В отсутствие такого выхода петель на треках звезд с $M = 15$ и $30 M_{\odot}$ не возникает.

Времена эволюции звезд с $M = 5 M_{\odot}$ на треках рис. 55 для различных химических составов (в 10^7 лет)

x_H	0,719	0,71	0,62	0,78
x_{He}	0,28	0,28	0,36	0,20
x_Z	0,001	0,01	0,02	0,02
1	0,02174	0,06008	0,07035	0,21501
2	6,26784	6,44761	4,55190	9,83129
3		6,63593	4,72257	10,22774
4		6,64071	4,72685	10,24225
5	6,44162	7,14636	5,28979	11,48509
6		7,35031	5,82833	11,88947
7	..	7,99281	5,98230	12,06863
8	7,59015	8,19118	6,09349	13,27731
9	7,60638	8,20386	6,20085	13,45606
10	7,65546	8,21476		
11	7,65730	8,24283		
12		8,27180		
13		8,27629		
14	...	8,31318		13,69765

б) Расчеты Пачиньского. В опубликованных в 1970–71 гг. работах Пачиньского эволюция звезд в интервале масс от 0,8 до $15 M_{\odot}$ рассчитана вплоть до образования вырожденного углеродного ядра. После этого предполагается, что звезды с $M < 8 M_{\odot}$ теряют значительную часть своей массы, образуя планетарную туманность (ПТ). Рассчитана эволюция ядра ПТ, которое превращается в белый карлик. В более массивных звездах



ядро достигает $\sim 1,4 M_{\odot}$, после чего начинается развитие тепловой неустойчивости, ведущей к взрывному горению углерода. Результаты опубликованы в работах [521–525]. Расчеты проводились методом Хенни, статическая оболочка содержала 10% и более массы, начальный химический состав $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$,

Рис. 56. Эволюционные треки звезд с начальным составом $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$, $x_Z = 0,03$ от главной последовательности до гелиевой вспышки для $M = 0,8 M_{\odot}$ и $1,5 M_{\odot}$ или до загорания углерода в центре для $M = 3 \div 15 M_{\odot}$. Цифры определяют массу звезды в солнечных единицах, точки соответствуют главной последовательности и моделям в моменты загорания гелия и углерода в ядре, из [521]

Массы ядер звезд в зависимости от их масс на разных стадиях эволюции [521]

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$M_{\text{core}}/M_{\odot}$ (внутри водородного слоевого источника)		
	Загорание гелия	Исчерпание гелия в ядре	Загорание углерода
0,8	0,39		
1,5	0,40		
3,0	0,35	0,51	1,39
5,0	0,56	0,95	1,39
7,0	0,83	1,45 (1,02)	1,39
10,0	1,35	2,32	2,32
15,0	2,54	3,89	3,91

$x_Z = 0,03$. Конвекция в оболочке рассчитывалась с длиной пути перемешивания, равной шкале высот по давлению $l = H_p$, использовался критерий конвективной неустойчивости Шварцшильда, но в отсутствие перемешивания в зоне полуконвекции. Результаты представлены на рис. 56 из [521] и табл. 37. Очевидно, что треки в области петель, а также характер массы ядер существенно отличаются от результатов Ибена. Помимо роли тепловой неустойчивости, различие связано с разницей в химических составах и в выборе длины перемешивания.

Треки на рис. 56 для звезд с массами $M \geq 3 M_{\odot}$ протянуты до загорания углерода в центре, через стадию гелиевого и водородного слоевых источников, на которой происходят вспышки. В [521, 523] использовался метод расчета, позволивший подавить вспышки и приближенно рассчитать усредненную эволюцию*). Гелиевые вспышки имеют место при наличии вырожденного углеродного ядра и подробно обсуждаются в следующем параграфе. Как видно из табл. 36, в звезде с $M = 7 M_{\odot}$ конвективная оболочка проникает в область ядра после выгорания гелия, что уменьшает массу углеродного ядра от 1,45 до 1,02 $M_{\odot}$.

в) Эволюция массивных звезд. Ядра массивных звезд с $M \geq 10 M_{\odot}$ остаются невырожденными вплоть до последних стадий эволюции, когда в результате сильных нейтринных потерь центральная часть звезды быстро сжимается.

В [587] рассчитаны треки до истощения гелия в центре у звезд с $M = 15$ и $30 M_{\odot}$ с различными химическими составами (см. (31.3)), критерием конвекции Леду (10.11) и различными длинами перемешивания $l = \alpha H_p$, $0,4 \leq \alpha \leq 10$. Варьировались также непрозрачность и скорости ядерных реакций. Многие треки имеют одинаковую топологию для звезд той же массы. Звезда в $15 M_{\odot}$ для большинства вариантов от 17 до 62%

*) Модернизированная версия программы Пачиньского, позволяющая вести устойчивый счет на быстрых стадиях эволюции (см. § 22, п. д), использовалась в [529], вклад в светимость за счет пересечения конвективной зоной границы скачка химического состава корректно учтен в [531].

стадии горения гелия проводит в области голубых сверхгигантов за счет образования петель. В звезде в $30 M_{\odot}$ в отсутствие петель весь гелий выгорает на стадии красных сверхгигантов. Это свойство характерно для треков, рассчитанных по критерию Леду. Некоторые треки из работы [587] представлены на рис. 57. При некоторых параметрах петли отсутствовали для $15 M_{\odot}$ и почти весь гелий сгорал на стадии красных сверхгигантов.

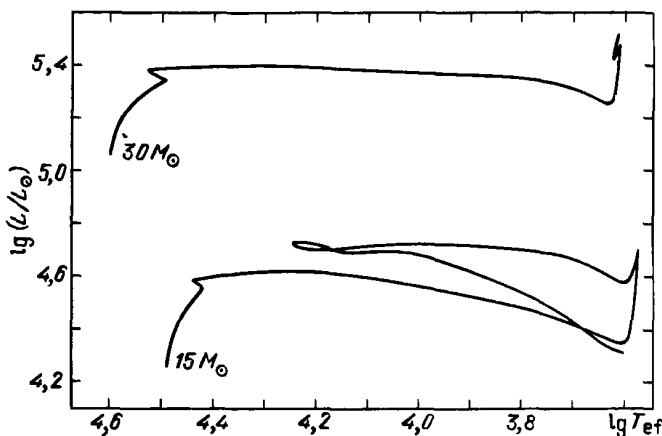


Рис. 57. Эволюционные треки звезд с массами 15 и $30 M_{\odot}$ от главной последовательности до истощения ^4He в ядре для начального состава $x_{\text{H}} = 0,739$, $x_{\text{He}} = 0,24$, $x_{\text{Z}} = 0,021$, критерия конвекции Леду, путем перемешивания $l = 0,4 H_{\rho}$, из [587]

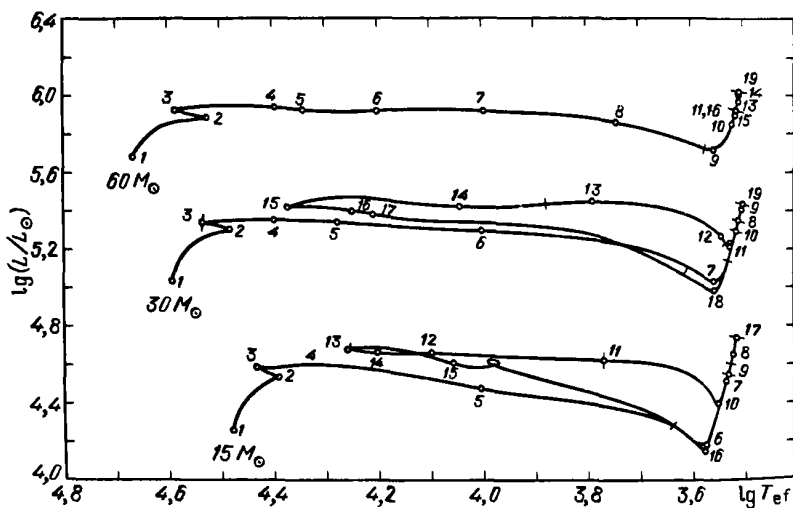


Рис. 58. Эволюционные треки звезд с массами 15, 30, $60 M_{\odot}$ от главной последовательности до загорания углерода в центре для начального состава $x_{\text{H}} = 0,7$, $x_{\text{He}} = 0,27$, $x_{\text{Z}} = 0,03$, критерия Леду и $l = H_{\rho}$, из [651]

Возможно, это связано с отсутствием проникновения внешней конвективной зоны внутрь и формирования скачка химического состава [651].

Для треков на рис. 57 времена горения водорода $\tau_H = 1,2 \cdot 10^7$ и $6,1 \cdot 10^6$ лет, гелия — $\tau_{He}/\tau_H = 0,10$ и $0,08$, время горения ${}^4\text{He}$ в области голубых сверхгигантов с $\lg T_e \geq 4,1$ есть $\tau_{Bi}/\tau_{He} = 0,37$ и $0,03$ для $M = 15$ и $30 M_\odot$ соответственно.

Расчеты эволюции звезд с $M = 15, 30$ и $60 M_\odot$ проводились в [651] для начального состава $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$, $x_Z = 0,03$, длины перемешивания $l = H_P$ и массы статической оболочки от 5 до 15 % массы звезды. Критерий конвекции выбирался в форме Шварцшильда (10.3), однако в полуконвективной зоне перемешивание не допускалось. Утверждается [651], что такое рассмотрение эквивалентно критерию Леду (10.11). Результаты расчетов приведены на рис. 58 и в табл. 38. Из-за наличия петель на диаграмме ГР звезды с $M = 15$ и $30 M_\odot$ большую часть времени горения гелия в ядре проводят в области голубых сверхгигантов. Расчет проводился до исчерпания гелия в ядре. С ростом массы звезды в результате горения гелия растет доля кислорода по сравнению с углеродом. Для $M = 15, 30, 60 M_\odot$ после выгорания гелия в ядре весовая доля углерода равна $x_{12C} = 0,4, 0,3, 0,2$ соответственно. Здесь используется более точное по сравнению с [407–411], где x_{12C} было много меньше, значение для скорости реакции ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ (последние данные см. § 15).

В процессе расширения оболочки и движения внутрь по ее массе конвективной зоны последняя пересекает скачок химического состава, связанный с предыдущим горением водорода в конвективном ядре. Такое проникновение сопровождается скачком светимости за счет выделения на скачке гравитационной энергии [651, 531]

$$\Delta L = \frac{dM_{CE}}{dt} \left(\Delta E - \frac{P}{\rho^2} \Delta \rho \right) = \frac{dM_{CE}}{dt} \frac{kT}{m_p} \left(\frac{4}{\beta} - 1,5 \right) \Delta \left(\frac{1}{\mu} \right), \quad (32.1)$$

где M_{CE} — масса ядра внутри скачка, μ и β даны в (1.6) и (1.19). Вопрос о проникновении конвекции из оболочки в зону горения исследован в [206].

Расчеты эволюции массивных звезд с использованием критерия конвекции Шварцшильда с полным перемешиванием удалось довести до стадии потери звездой гидродинамической устойчивости, т.е. до модели предсверхновой. Первые такие расчеты выполнены в работе [626] (см. также [625]). Авторы использовали методику счета эволюции, основанную на неявной схеме решения гидродинамических уравнений эволюции. Статические решения получаются методом установления при наличии вязкости. Рассматривались звезды с $M = 15$ и $25 M_\odot$ с начальным химическим составом $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,02$, $l = H_P$. Исходные данные совпадали *) с данными работы [459], где эволюционные расчеты доведены до стадии выгорания

*) В [626] утверждается, что в расчетах использовался критерий конвекции Леду. Совпадение с треком из [459], где использовался критерий Шварцшильда, а также горение гелия в области голубых сверхгигантов заставляет сомневаться в справедливости этого утверждения.

Точка	T_c, K	$\rho_c, \text{г·см}^{-3}$	$\frac{L_{opt}}{L_\odot}$	$\frac{L_p}{L_\odot}$	$\frac{L_H}{L_\odot}$	$\frac{L_{He}}{L_\odot}$	$\frac{LC}{L_\odot}$	$\frac{L_g}{L_\odot}$	T_{ef}, K	$\frac{R_f}{R_\odot}$	$\frac{M_{conv}}{M_\odot}$	$x_{H,c}$ [x_{12}, C, c]	$t_{эв}, \text{годы}$
1	3,2(7)	5,3(0)	1,8(4)	...	1,8(4)	0	0	0	2,99(4)	5,1	5,8	0,7	0
	3,6(7)	3,0(0)	1,1(5)	...	1,1(5)	0	0	0	3,92(4)	7,2	15,8	0,7	0
	3,9(7)	2,0(0)	4,7(5)	...	4,7(5)	0	0	0	4,71(4)	10,3	40,1	0,7	0
2	4,1(7)	9,3(0)	3,4(4)	...	3,1(4)	0	0	3,8(3)	2,46(4)	10,2	2,5	0,034	9,6(6)
	4,6(7)	5,1(0)	2,0(5)	...	1,8(5)	0	0	2,4(4)	3,06(4)	15,9	8,2	0,030	4,8(6)
	4,9(7)	3,3(0)	7,7(5)	...	6,7(5)	0	0	1,0(5)	3,43(4)	25,0	21,8	0,024	3,2(6)
3	5,4(7)	2,5(1)	3,8(4)	...	3,5(4)	0	0	3,5(3)	2,70(4)	8,9	1,1	1,2(-5)	2,8(5)
	6,7(7)	1,9(1)	2,2(5)	...	1,7(5)	0	0	4,3(4)	3,43(4)	13,3	4,3	4(-6)	1,4(5)
	7,9(7)	1,6(1)	8,3(5)	...	6,2(5)	0	0	2,2(5)	3,88(4)	20,3	15,2	...	7,8(4)
6	1,6(8)	2,2(3)	1,5(4)	...	3,1(4)	7,5(3)	0	-2,4(4)	3,73(3)	296	0,7	[4(-3)]	6,6(4)
	1,8(8)	7,0(2)	1,9(5)	...	1,6(5)	9,2(4)	0	-5,9(4)	1,01(4)	145	3,7	[0,011]	2,2(4)
	2,0(8)	4,0(2)	8,1(5)	...	4,2(5)	4,0(5)	0	-1,4(4)	1,58(4)	120	9,4	[0,005]	1,2(4)
10	1,8(8)	1,5(3)	2,5(4)	...	1,1(4)	1,4(4)	0	1,0(2)	3,52(3)	428	1,7	[0,37]	5,8(5)
	1,9(8)	6,2(2)	1,9(5)	...	8,2(4)	1,1(5)	0	1,5(2)	3,24(3)	1404	5,6	[0,13]	6,6(4)
	2,0(8)	3,7(2)	7,0(5)	...	9,5(4)	6,6(5)	0	-5,1(4)	3,30(3)	2579	14,0	[0,021]	4,5(3)
14	2,2(8)	2,3(3)	4,7(4)	...	2,7(4)	2,0(4)	0	5,5(2)	1,59(4)	28,7	1,8	[0,56]	5,5(5)
	2,0(8)	6,8(2)	2,6(5)	...	4,6(4)	1,4(5)	0	7,0(4)	1,10(4)	140	6,5	[0,41]	1,8(5)
	2,1(8)	3,5(2)	9,9(5)	...	2,6(5)	7,2(5)	0	4,9(3)	3,19(3)	3267	16,2	[0,033]	2,3(3)
17	6,4(8)	5,0(5)	5,3(4)	7,2(4)	0	5,5(4)	9,0(3)	6,1(4)	3,22(3)	742	3,0(-4)	[0,41]	1,2(5)
	3,6(8)	4,0(3)	2,3(5)	3,5(3)	8,6(4)	2,4(3)	0	1,5(5)	1,62(4)	61,7	2,7	[0,30]	2,2(5)
	3,0(8)	9,1(2)	8,6(5)	2,1(3)	3,4(4)	8,0(5)	0	3,0(4)	3,21(3)	3004	20,6	[0,247]	3,2(5)
19	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	8,4(8)	1,2(5)	2,6(5)	5,9(6)	0	7,5(5)	4,5(6)	8,8(5)	3,14(3)	1742	0,41	[0,30]	1,2(4)
	4,2(8)	2,8(3)	1,0(6)	2,5(4)	1,6(5)	1,1(4)	0	8,7(5)	3,18(3)	3324	16,8	[0,194]	1,3(4)

$t_{эв}$ — время эволюции между данной и предыдущей точками на рис. 58, в верхних строчках даны значения для $15 M_\odot$, в средних — $30 M_\odot$, нижних — $60 M_\odot$, пропуск — отсутствие данных в [651].

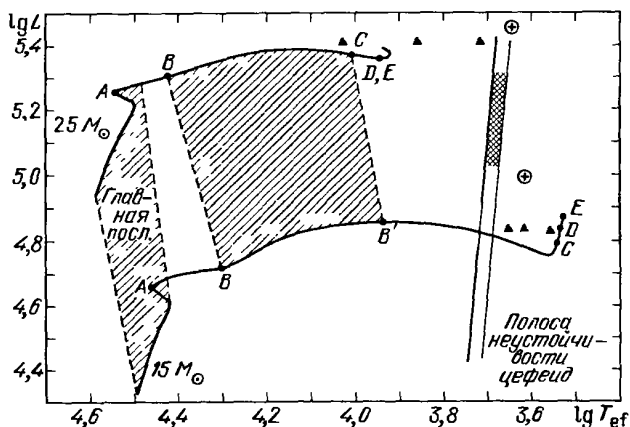


Рис. 59. Эволюционные треки звезд с массами 15 и $25M_{\odot}$ из [459], BB' для $15M_{\odot}$ и BC для $25M_{\odot}$ — области горения гелия в ядре, CD — область горения двойного H-He слоевого источника, DE — область горения углерода в ядре. Эволюционные треки из [626] в основном совпадают с [459]. Треугольниками указаны результаты эволюционных расчетов [626], где заметно отличие от расчетов [459]. Расчеты [626] доведены до точки потери устойчивости — модели предсверхновой (указана крестом в кружке)

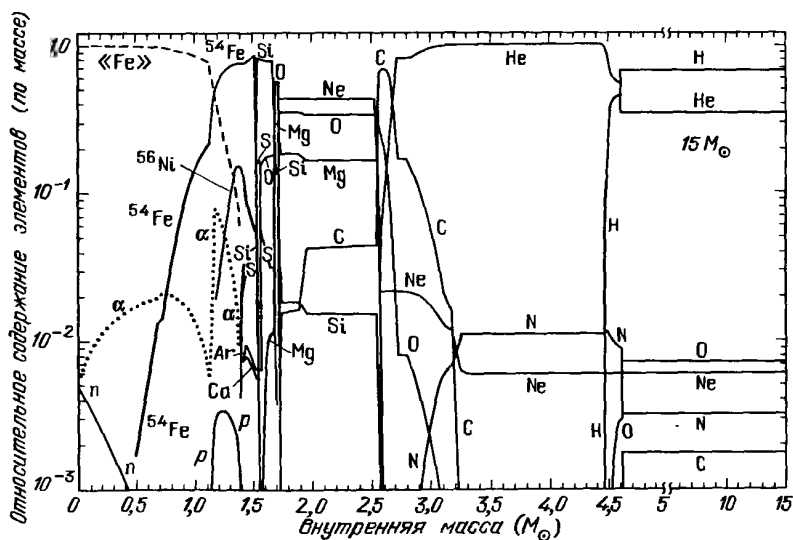


Рис. 60. Весовые концентрации различных элементов в звезде с $M = 15M_{\odot}$ перед коллапсом ядра. Внутри $M = 1,56M_{\odot}$ использовалось ядерное квазиравновесие (ЯКР). При этом реакции слабого взаимодействия рассматривались кинетически при условии полного улета нейтрино (см. § 3). Кривая ^{56}Ni в этой области представляет все элементы железного пика с $A = 2Z$, ^{54}Fe — все элементы с $A = 2(Z + 1)$, а «Fe» — все остальные элементы ЯКР с $Z \geq 22$, из [626]

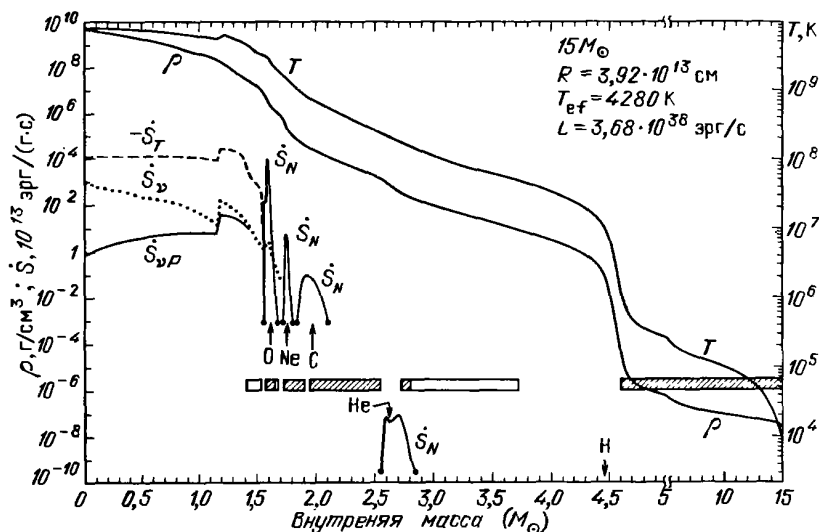


Рис. 61. Распределение параметров звезды с $M = 15 M_{\odot}$ перед коллапсом ядра. Масштабы плотности ρ и температуры T выбраны таким образом, чтобы расстояние между кривыми сохранялось при $\rho \sim T^3$. Величина $-\dot{S}_T$ задает суммарную скорость потери энергии за счет нейтрино и фоторазрушения тяжелых элементов, $\dot{S}_{\nu}$ — полная скорость нейтринных потерь, $\dot{S}_{\nu p}$ — скорость нейтринных потерь за счет излучения плазменных нейтрино из [268] (см. § 19). Скорости выделения энергии при ядерном горении обозначены через $\dot{S}_N$ с указанием основного ядерного горючего. Все величины $\dot{S}_i$ имеют общий масштаб $\dot{S}$. Зоны сильной конвекции даны заштрихованной полосой, а полуконвекции — полосой без штриховки. Величины R , T_{ef} , L определяют радиус фотосферы, эффективную температуру и оптическую светимость соответственно, из [626]

углерода в центре и образования углеродного слоевого источника наряду с гелиевым и водородным. На рис. 59 приведены треки из [459], треугольниками даны те модели из [626], у которых заметны отличия от [459]. В остальных частях эти треки неразличимы. При условии возникновения конвекции по критерию Шварцшильда горение гелия происходит в области голубых сверхгигантов, а петли отсутствуют. После стадии горения углерода эволюция ядра столь убыстрится из-за нейтринных потерь, что внешний радиус и оптическая светимость звезды практически не меняются вплоть до наступления коллапса (см. табл. 39). На рис. 60, 61 приведены распределения концентраций элементов и параметров звезды перед коллапсом для $15 M_{\odot}$, а на рис. 62, 63 даны те же величины для $M = 25 M_{\odot}$. В центре видно действие эндотермической реакции отщепления от элементов железного пика нейтронов и альфа-частиц. В более поздних расчетах [633, 640] треки на поздних стадиях слегка изменились, см. сноску к с. 338. В расчетах учитывалось более сотни изотопов различных элементов.

Исследование эволюции звезд с массами 9, 15, 30, 60, 120 $M_{\odot}$ вплоть до конца стадии горения углерода в ядре проводилось в работах [476, 477]

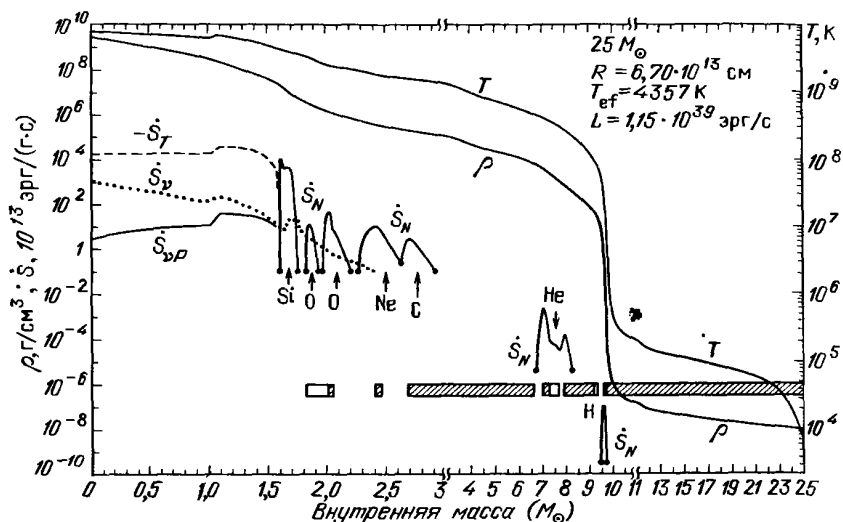


Рис. 63. Параметры предсверхновой с $M = 25 M_{\odot}$. Все обозначения соответствуют рис. 61, из [626]

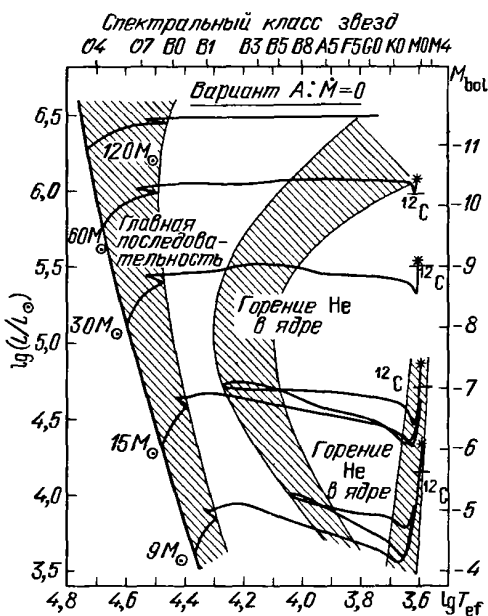


Рис. 64. Эволюционные треки звезд постоянной массы с начальным составом $x_{\text{H}} = 0,7$, $x_{\text{Z}} = 0,03$, критерием конвекции Шварцшильда на ГР диаграмме. Заштрихованы основные области медленного горения H и ${}^4\text{He}$. Звездочка указывает модель предсверхновой. Начало горения ${}^{12}\text{C}$ указано горизонтальной черточкой на треке (вариант А из [477], см. табл. 43)

для различных режимов потери массы. Эволюционные треки звезд с постоянной массой даны на рис. 64, результаты расчетов приведены в табл. 42. Принимался начальный состав $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$, $x_Z = 0,03$ и критерий конвекции Шварцшильда. В отличие от [459, 636] трек звезды с $15 M_\odot$ показывает наличие петель. Положения предсверхновых на треках указаны звездочками (рис. 64) и хорошо согласуются с расчетами работы [626] (рис. 59).

г) Эволюция массивных звезд с потерей массы. На истечение вещества в процессе эволюции указывают как прямые наблюдения [489], так и существование одиночных гелиевых звезд типа Вольфа–Райе, потерявших водородную оболочку [184]. Теория в общем случае не позволяет найти зависимость потока массы $\dot{M}$ от параметров звезды L , R , x_i , поэтому в расчетах эволюции в основном используются эмпирические зависимости, получаемые из наблюдений [460]. На стадиях, ведущих к образованию звезд Вольфа–Райе, $\dot{M}$ столь велико, что ускорение потока может происходить в оптически толстых областях. В работах [52, 290] развит метод, позволяющий в этих условиях проводить самосогласованный счет эволюции с определяемой теоретически величиной $\dot{M}(L, R, x_i)$.

Для описания стационарно истекающей оптически толстой атмосферы используются гидродинамические уравнения сферически-симметричного течения идеального газа в равновесии с излучением [52]

$$\dot{M} \left(E + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} + \frac{u^2}{2} \right) + 4\pi\lambda r^2 \frac{dT}{dr} = -L, \quad (32.2)$$

$$u \frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}, \quad (32.3)$$

$$4\pi\rho u r^2 = -\dot{M}, \quad (32.4)$$

$$P = \rho \Re T + \frac{aT^4}{3}, \quad E = \frac{3}{2} \Re T + \frac{aT^4}{\rho} + \epsilon_i,$$

$$\lambda = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}, \quad \Re = \frac{k}{\mu m_p}, \quad \mu = \mu(\rho, T), \quad (32.5)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T), \quad \epsilon_i = \epsilon_i(\rho, T).$$

Здесь λ — коэффициент лучистой теплопроводности (см. (7.32)), κ — непрозрачность (см. § 7), μ — молекулярный вес (см. (1.6)), ϵ_i — удельная внутренняя энергия, состоящая из энергии возбуждения, ионизации и диссоциации атомов и молекул (см. § 1). Первый член слева в (32.2) определяет поток кинетической энергии L_k , а второй — поток лучистой энергии L_r . При радиальном истечении вещество проходит изотермическую критическую точку, в которой выполняются соотношения, получаемые после

подстановки (32.2), (32.4) в (32.3) и записи явного выражения для произвольной,

$$u^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = u_T^2, \quad \frac{GM}{r} = 2u^2 + \frac{1}{4\pi\rho r^2\lambda} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \left[L + \dot{M} \left(E + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} + \frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (32.6)$$

В [52] развита теория истекающей атмосферы с произвольным соотношением между L_r и L_k . В эволюционных расчетах [290] использовалось приближение $L_r \gg L_k$, когда пренебрегалось первым членом в (32.2). Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштаба значения параметров в критической точке (32.6) ρ_{cr} , T_{cr} , r_{cr} . Из (32.2) – (32.5) получаем два уравнения относительно безразмерных переменных T и ρ при $L_r \gg L_k$:

$$\frac{dT}{dx} = A_4 \frac{\rho}{T^3} \frac{\kappa}{\kappa_{cr}}, \quad (32.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} = & \left[A_3 - 2\gamma_{\rho, cr} \frac{x^3}{\rho^2} - \left(A_1 \frac{T^3}{\rho} + \gamma_T \frac{\mu_{cr}}{\mu} \right) \frac{\kappa}{\kappa_{cr}} \frac{\rho}{T^3} A_4 \right] \times \\ & \times \left(\frac{T}{\rho} \frac{\mu_{cr}}{\mu} \frac{\gamma_\rho}{\gamma_{\rho, cr}} - \frac{x^4}{\rho^3} \right)^{-1} \frac{1}{\gamma_{\rho, cr}}. \end{aligned} \quad (32.8)$$

Здесь

$$x = \frac{r_{cr}}{r}, \quad \gamma_\rho = 1 - \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln \rho} \right)_T, \quad \gamma_T = 1 - \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln T} \right)_\rho. \quad (32.9)$$

Введены также безразмерные параметры

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{4}{3} \frac{aT_{cr}^3}{3\rho_{cr}(k/\mu_{cr}m_u)}, \quad A_3 = \frac{GM}{r_{cr}T_{cr}(k/\mu_{cr}m_u)}, \\ A_4 = \frac{L}{4\pi} \frac{3\kappa_{cr}\rho_{cr}}{4acT_{cr}^4 r_{cr}} = \frac{L}{L_{c, cr}} \frac{A_3}{A_1}, \quad L_c = \frac{4\pi cGM}{\kappa}. \end{aligned} \quad (32.10)$$

Индексом "cr" обозначены параметры в критической точке, условие прохождения через которую (32.6) приводит к соотношению между параметрами (32.10)

$$\frac{L}{L_{c, cr}} \frac{A_3}{A_1} = \frac{A_3 - 2\gamma_{\rho, cr}}{A_1 + \gamma_{T, cr}}. \quad (32.11)$$

Из (32.11) следует, что в критической точке $L/L_{c, cr} < 1$. При заданной массе звезды M стационарно истекающая атмосфера, как и статическая, определяется двумя параметрами, в качестве которых удобно принять L

и ρ_{cr} . Из выражения для A_4 в (32.10) и (32.11) получаем

$$r_{\text{cr}} = \frac{L}{4\pi} \frac{3\kappa_{\text{cr}}\rho_{\text{cr}}}{4acT_{\text{cr}}^4} \frac{A_1 + \gamma_{T, \text{cr}}}{A_3 - 2\gamma_{\rho, \text{cr}}}. \quad (32.12)$$

Используя (32.12) и выражения для A_1 и A_3 из (32.10), имеем

$$A_3 = 2\gamma_{T, \text{cr}} \left[1 - (A_1 + \gamma_{T, \text{cr}}) \frac{8\kappa_{\text{cr}}T_{\text{cr}}}{GM} \frac{L}{4\pi} \frac{3\kappa_{\text{cr}}\rho_{\text{cr}}}{4acT_{\text{cr}}^4} \right]^{-1} = f(\rho_{\text{cr}}T_{\text{cr}}). \quad (32.13)$$

Задавая T_{cr} при данных ρ и L , получаем все параметры (32.10). Интегрируя систему (32.7) – (32.8) наружу при $x < 1$, подбираем T_{cr} , удовлетворяющее условиям вдали от звезды. После этого из итерационной схемы счета эволюции (§ 22) находим однозначно все параметры стационарно истекающей модели, в том числе $\dot{M}$.

Для выхода из критической точки при интегрировании уравнений (32.2), (32.3) необходимо использовать асимптотические формулы [52, 290]

$$\rho = 1 - \alpha(1 - x), \quad T = 1 - \beta(1 - x), \quad \beta = \frac{A_3 - 2\gamma_{\rho, \text{cr}}}{A_1 + \gamma_{T, \text{cr}}}, \quad \cdot$$

$$\alpha = \frac{Z_2}{2Z_1} + \sqrt{\left(\frac{Z_2}{2Z_1}\right)^2 - \frac{Z_3}{Z_1}}, \quad Z_1 = 1 + \gamma_{\rho, \text{cr}} + \left(\frac{\partial \ln \gamma_{\rho}}{\partial \ln \rho}\right)_{\text{cr}},$$

$$Z_2 = 8\gamma_{\rho, \text{cr}} - \beta \left\{ \gamma_{T, \text{cr}} \left[\gamma_{\rho, \text{cr}} + \left(\frac{\partial \ln \gamma_T}{\partial \ln \rho}\right)_{\text{cr}} \right] + \right. \quad (32.14)$$

$$\left. + \gamma_{\rho, \text{cr}} \left[\gamma_{T, \text{cr}} + \left(\frac{\partial \ln \gamma_{\rho}}{\partial \ln T}\right)_{\text{cr}} \right] + (A_1 + \gamma_{T, \text{cr}}) \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho}\right)_{\text{cr}} \right\},$$

$$Z_3 = \beta^2 \left\{ (A_1 + \gamma_{T, \text{cr}}) \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T}\right)_{\text{cr}} - \right.$$

$$\left. - \gamma_{T, \text{cr}} \left[4 - \gamma_{T, \text{cr}} - \left(\frac{\partial \ln \gamma_T}{\partial \ln T}\right)_{\text{cr}} \right] \right\} + 6\gamma_{\rho, \text{cr}}.$$

Наиболее сложным является вопрос о внешних граничных условиях, определяющих $T_{\text{cr}}(\rho_{\text{cr}}, L)$. Во внешних слоях при малой оптической толщине вместо уравнений радиационной гидродинамики (32.2) – (32.5) нужно использовать гидродинамику для описания газовой составляющей совместно с уравнением переноса излучения. В такой постановке получение решения сталкивается с большими трудностями, поэтому для описания прозрачных слоев в [652, 653] используется приближение, аналогичное используемому в статической атмосфере (6.34) из [520].

Если оптическая толща в области критической точки достаточно велика, то прозрачные слои мало влияют на определение $T_{\text{cr}}(\rho_{\text{cr}}, L)$. В этих обстоятельствах в [52, 290] использовались условия $T = \rho = 0$ при $r = \infty$ и уравнения (32.2) – (32.5) во всей области. В работе [356] интегрирование в истекающей оболочке обрывалось на оптической толще $\tau \approx 1$, где предполагалось условие $L = \pi r^2 c a T^4$, аналогичное статической атмосфере.

В области течения следует учитывать непрозрачность всех видов. При низких значениях температуры самым важным является вклад молекул и пыли, не учтенный в [652, 653]. К настоящему времени удовлетворительного решения для истекающей атмосферы вне критической точки не получено. В [52] для нахождения зависимости $T_{\text{cr}}(\rho_{\text{cr}}, L)$ использовано приближенное решение, полученное в [45] для $\kappa = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ в сверхзвуковой области, где $L > L_c$ (см. (32.10)). При $L_r \gg L_{c, \text{cr}}$ и $u \gg u_T$ уравнения (32.2) – (32.5), записанные через переменные u и T , имеют решение [45], удовлетворяющее условиям $T = \rho = 0$ при $r = \infty$:

$$\frac{u^2}{2} + \left(\frac{L}{L_c} - 1 \right) \frac{GM}{r} = \left(\frac{L}{L_c} - 1 \right) \frac{GM}{r_{\text{cr}}},$$

$$T^4 = - \frac{3 \kappa \dot{M} L}{16 \pi^2 a c} \int_r^\infty \frac{dr}{r^4} \left[2 \left(\frac{L}{L_c} - 1 \right) GM \left(\frac{1}{r_{\text{cr}}} - \frac{1}{r} \right) \right]^{-1/2}, \quad (32.15)$$

$$\dot{M} = -4 \pi \rho_{\text{cr}} r_{\text{cr}}^2 u_{\text{cr}}, \quad u_{\text{cr}}^2 = \frac{k}{\mu_{\text{cr}} m_u} T_{\text{cr}} = u_{T, \text{cr}}^2.$$

Исключая $\dot{M}$ из трех последних соотношений (32.15), получаем искомую связь $T_{\text{cr}}(\rho_{\text{cr}}, r_{\text{cr}}, L)$. Эту связь удобно записать в виде соотношения между безразмерными величинами (32.10):

$$A_1 = \frac{64}{15 \sqrt{2}} \sqrt{A_3} \frac{L}{L_{\text{cr}}} \left(\frac{L}{L_{\text{cr}}} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (32.16)$$

При малых A_1 и $\kappa = \text{const}$ для выполнения условия $T = \rho = x = 0$ требуется $A_3 = 3$ [25]. Связь $T_{\text{cr}}(\rho_{\text{cr}}, r_{\text{cr}}, L)$ эквивалентна связи между безразмерными параметрами (32.10) типа (32.16). Для переменного κ и μ вместо (32.16) в [290] использовались следующие соотношения:

$$A_3 = (A + 3) \frac{\mu_0}{\mu_{\text{cr}}} \frac{\max \kappa(T)}{3 \kappa_L} \bigg|_{\rho_{\text{cr}}} \quad \text{при } A > 7 \quad \text{или } A > A_1, \quad (32.17a)$$

$$A_3 = (A_1 + 3) \frac{\mu_0}{\mu_{\text{cr}}} \frac{\max \kappa(T)}{3 \kappa_L} \bigg|_{\rho_{\text{cr}}} \quad \text{при } A < 7 \quad \text{и } A < A_1. \quad (32.17b)$$

Здесь

$$A = A_1^2 \left(\frac{L}{L_m} - 1 \right) \left(\frac{L_m}{L} \right)^2 \frac{450}{4096} (= A_3 \text{ из (32.16) при } L_m = L_{\text{cr}}),$$

$$\kappa_L = \min \left[\frac{4 \pi c G M}{L}, \frac{\max \kappa(T)}{3} \right]_{\rho_{\text{cr}}}, \quad (32.17\text{в})$$

$$L_m = \frac{4 \pi c G M}{\max \kappa(T)|_{\rho_{\text{cr}}}} \text{ при } \max \kappa(T)|_{\rho_{\text{cr}}} < 3 \frac{4 \pi c G M}{L},$$

$$L_m = \frac{L}{3} \text{ при } \max \kappa(T)|_{\rho_{\text{cr}}} > 3 \frac{4 \pi c G M}{L},$$

$\mu_0 = \max(\mu)$ соответствует нейтральному газу.

Процедура нахождения критической точки такова. При данных L и ρ_{cr} находим $\kappa_0 = 4\pi c G M / L$. После этого из таблиц $\kappa(\rho, T)$ находим $T_{\text{cr}0}$, а из (32.10), (32.17) получаем A_1 и A_3 . Из термодинамических соотношений определяются μ , γ_ρ и γ_T . Затем из (32.11) находится в следующем приближении κ_1 и итерации ведутся до определения параметров критической точки с заданной точностью. После этого находится r_{cr} из (32.12) или из соотношения для A_3 в (32.10), величины $u_{\text{cr}} = \sqrt{\gamma_{\rho, \text{cr}} k T / \mu_{\text{cr}} m_u}$ и $\dot{M} = -4\pi \rho_{\text{cr}} u_{\text{cr}} r_{\text{cr}}^2$. После выхода из критической точки по разложению (32.14) интегрирование (32.7) и (32.8) внутрь звезды в [290] охватывает 3% массы звезды. На границе с ядром, которое рассчитывается методом Хенни, скорость столь мала ($u \ll u_T$), что сшивка параметров ведется так же, как и в статическом случае (см. § 22).

Т а б л и ц а 40

Эволюционные параметры звезд, представленных на рис. 65

Точка	Модель №	T_c , К	ρ_c , г·см ⁻³	$L/L_\odot$	$L_{\text{H}}/L_\odot$	$L_{\text{He}}/L_\odot$
A	0	3,1 (7)	1,1 (1)	3,5 (3)	3,5 (3)	0
	0	3,8 (7)	3,7 (0)	1,1 (5)	1,1 (5)	0
B	20	4,0 (7)	2,0 (1)	6,6 (3)	6,6 (3)	0
	133	5,1 (7)	7,5 (0)	2,2 (5)	2,2 (5)	0
C	28	4,5 (7)	5,3 (1)	7,5 (3)	6,7 (3)	0
	244	8,2 (7)	3,6 (1)	2,5 (5)	1,9 (5)	0
D	64	7,8 (7)	1,9 (3)	8,1 (3)	8,5 (3)	0
	342	1,8 (8)	5,9 (2)	2,4 (5)	1,6 (5)	1,3 (5)
E	132	1,4 (8)	5,1 (3)	5,0 (3)	6,7 (3)	1,1 (3)
	452	1,8 (8)	5,8 (2)	2,3 (5)	1,6 (5)	1,3 (5)

Здесь $t_{\text{эв}}$ — время эволюции между данной и предыдущей точками на треках рис. 65, в верхних строчках даны значения для $M = 9 M_\odot$, в нижних — для $M = 30 M_\odot$, цифра в скобках в столбце $R_f/R_\odot$ есть критический радиус первой истекающей модели.

Таблица 40 (окончание)

Точка	$L_g/L_\odot$	T_{ef}, K	$R_f/R_\odot$	$\frac{M_{\text{сопв}}}{M}$	$x_{\text{H}}[x_{\text{He}}, \text{C}]$	$t_{\text{эв}}, \text{годы}$
A	0	2,43 (4)	3,4	0,29	0,75	0
	0	4,07 (4)	6,7	0,54	0,75	0
B	2,3	2,08 (4)	6,3	0,11	0,036	2,6 (7)
	4,5 (2)	3,10 (4)	16,4	0,28	0,02	5,9 (6)
C	7,5 (2)	2,24 (4)	5,7	0,037	2,8 (-4)	5,6 (5)
	5,8 (4)	3,44 (4)	14,0	0,12	0	8,0 (4)
D	-3,8 (2)	1,57 (4)	12,2	0	0	9,3 (4)
	-5,1 (4)	1,54 (4)	68,1	0,15	[6,8 (-3)]	1,5 (4)
E	-2,8 (3)	5,16 (3)	89,0	0,035	[4,4 (-3)]	8,5 (4)
	-5,5 (4)	5,16 (3)	607 (611)	0,18	[1,3 (2)]	3,0 (3)

В [290] рассчитывается статическая эволюция звезд с $M = 9$ и $30 M_\odot$ до начала проникновения конвекции внутрь ядра ($9 M_\odot$) или до точки, где построение статических моделей принятым методом оказывается невозможным ($30 M_\odot$). Для $30 M_\odot$ здесь предполагается начало истечения, эволюция на стадии которого рассчитывается по изложенному выше методу. Начальный состав выбирался в виде $x_{\text{H}} = 0,75$, $x_{\text{He}} = 0,22$, $x_{\text{Z}} = 0,03$. Конвекция рассчитывалась с длиной перемешивания $l = H_p$, использовался критерий конвекции Леду, что дало отсутствие перемешивания между конвективным ядром и зоной полуконвекции благодаря лучистому слою между ними.

Результаты расчетов приведены в табл. 40 и на рис. 65, 66. После точки E трека для $30 M_\odot$ в выбранных физических условиях не удалось построить статической модели, поэтому здесь предполагалось начало истечения. Штриховой линией указан примерный трек на стадии истечения. Всего было построено 23 истекающих модели за 15 лет эволюции звезды. За это время масса звезды уменьшилась до $23 M_\odot$, так что получился гигантский поток массы $\dot{M} \approx 0,5 M_\odot/\text{год}$. Несомненно, что такой поток $\dot{M}$ явился следствием не совсем удачного выбора связи (32.17). Реальное $\dot{M}$ может быть на 2–4 порядка меньше. Интервалы изменения параметров в критической точке за время эволюции таковы:

$$\begin{aligned}
 \dot{M} &= (0,5 - 0,4) M_\odot/\text{год}, \quad u_{\text{cr}} = 18 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}, \\
 T_{\text{cr}} &= (2,5 - 2,4) \cdot 10^4 \text{ K}, \quad \rho_{\text{cr}} = 8 \cdot 10^{-10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \\
 R_{\text{cr}} &= (610 - 550) R_\odot.
 \end{aligned} \tag{32.18}$$

Малое изменение критических параметров в ходе истечения указывает на то, что оно должно продолжаться, пока звезда не потеряет почти всю свою водородную оболочку, а оставшееся гелиевое ядро станет звездой

типа Вольфа–Райе. Такой механизм образования звезд типа Вольфа–Райе предложен в [290]. Там же предложен проверочный тест: поиск протяженной газовой оболочки с массой, сравнимой с массой гелиевой звезды. Подобные оболочки найдены вокруг многих звезд этого типа, которые не показывают явных признаков двойственности [149]. В [290] отмечалось также, что на начальных стадиях истечения непрозрачность

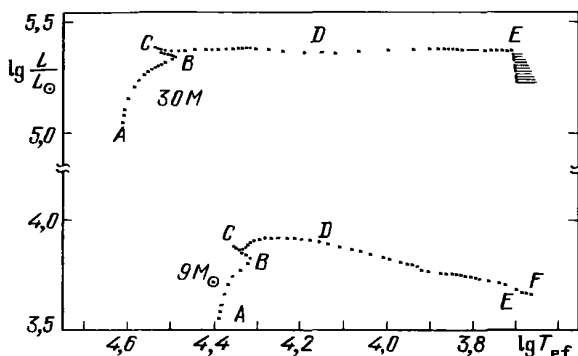


Рис. 65. Эволюционные треки звезд с массами 9 и $30M_{\odot}$ от главной последовательности до начальных стадий горения ${}^4\text{He}$ в ядре с начальным составом $x_{\text{H}} = 0,75$, $x_{\text{He}} = 0,22$, $x_{\text{Z}} = 0,03$, критерия Леду и $l = H_{\text{P}}$ из [290]. На треке с $M = 30M_{\odot}$ в точке E предполагается начало сильного истечения, стадия с истечением указана штрихованной линией

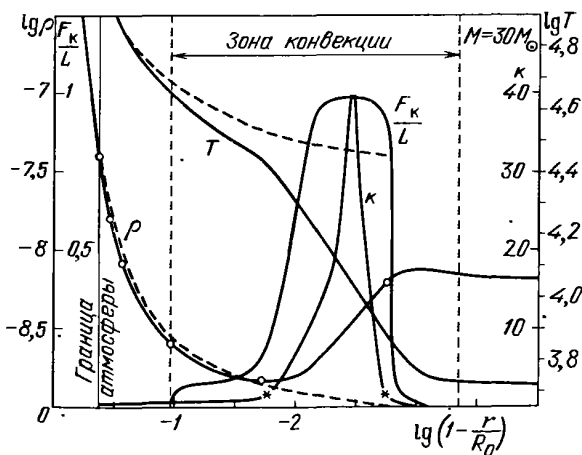


Рис. 66. Структура статической (сплошные линии) и истекающей (штриховые) оболочек в точке E для $30M_{\odot}$. Истекающая оболочка построена с помощью соотношения (32.16), вместо внешнего граничного условия. Приведены распределения плотности ρ , температуры T ; отношение светимости к критической $\kappa = L/L_{\text{cr}}$, доля потока, переносимого конвекцией F_{K}/L , R_0 — радиус статической звезды. Звездочками указаны точки с $\kappa = 1$. Даны только части истекающих моделей, примыкающих к статическому ядру. Видно близкое совпадение кривых $\rho(r)$ и $T(r)$ у статической и истекающей моделей вблизи ядра

Эволюционные параметры звезд на рис. 67

Начальная масса, $M_{\odot}$	Вариант	$\lg T_{\text{ef}}, \text{K}$	τ_{H} , годы	$\frac{\tau_{\text{He}}}{\tau_{\text{H}}}$	$\tau_{\text{bl}}/\tau_{\text{He}}$	$\tau_{\text{y}}/\tau_{\text{He}}$	Конечная масса, $M_{\odot}$
15	A	...	1,2 (7)	0,092	0,040	0,002	15
15	C	4,56	1,2 (7)	0,092	0,760	0,009	4,4
30	A	...	5,8 (6)	0,082	0,034	0,005	30
30	C	4,67	5,8 (6)	0,083	0,831	0,015	11,3
30	D	4,81	5,8 (6)	0,082	1,000	...	11,6
60	A, C, D	4,22	3,7 (6)	0,086	1,000	...	60

T_{ef} — максимальная эффективная температура при горении ${}^4\text{He}$ в ядре, τ_{H} — время горения H в ядре, τ_{He} — время горения ${}^4\text{He}$ в ядре, τ_{bl} — время горения ${}^4\text{He}$ в голубой стадии, τ_{y} — время горения ${}^4\text{He}$ в желтой стадии.

оболочки может быть очень большой и все излучение звезды переизлучится в инфракрасном диапазоне, давая яркий инфракрасный объект. Возможно, такого типа объекты уже наблюдались на инфракрасном спутнике IRAS [402]. На рис. 66 приведено распределение параметров в оболочке последней статической модели и первой истекающей той же массы. В истекающей оболочке отсутствует инверсия плотности, ρ падает быстрее, а T медленнее, чем в статической. Вблизи ядра имеется хорошее совпадение решений для статической и истекающей оболочки. Это свидетельствует о том, что процессы в атмосфере слабо влияют на структуру статического ядра.

Исследование эволюции массивных звезд с истечением при заданном эмпирически потоке $\dot{M}(L, R)$ проводилось многими авторами. В [588] рассчитывалась эволюция звезд с начальными массами 15, 30, 60 $M_{\odot}$ до истощения гелия в центре звезды. Результаты представлены на рис. 67 и в табл. 41. Треки с постоянной массой существенно отличаются от других треков звезды той же массы с тем же критерием конвекции Леду (см. рис. 57 [587] и рис. 58 [651]) полным отсутствием петель. Почти весь гелий для $M = 15$ и 30 $M_{\odot}$ сгорает в области красных гигантов (см. табл. 41). Отличие от [587] состоит только в длине перемешивания $l = H_p$ вместо $l = 0,4H_p$ в [587]. Отличие от [651] состоит в химическом составе и в некоторых деталях критерия конвекции. В целом, сравнение этих результатов свидетельствует в пользу наличия элемента случайности в механизме образования петель. При учете потери массы (в тех же физических предположениях) трек еще на стадии горения гелия в ядре уходит обратно в область голубых гигантов, где звезда и проводит большую часть этой стадии (см. табл. 4). Оба варианта потери массы по закону

$$\dot{M} = -\frac{LR}{M} \cdot 10^{-11} \frac{M_{\odot}}{\text{год}} \quad (32.19)$$

при $\lg T_{\text{ef}} < 3,85$ (вариант C),

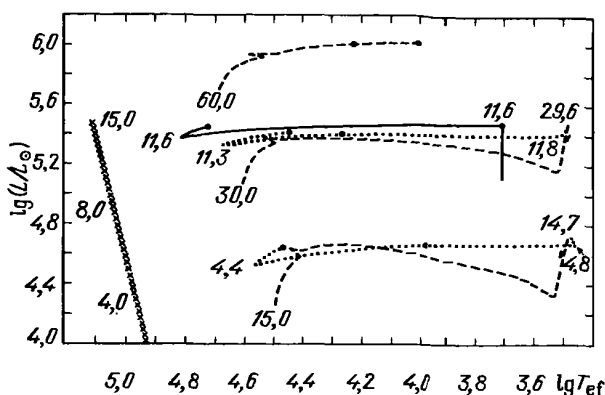


Рис. 67. Эволюционные треки звезд с начальными массами 15, 30 и $60M_{\odot}$ от главной последовательности до истощения ${}^4\text{He}$ в центре для начального состава $x_{\text{H}} = 0,739$, $x_{\text{He}} = 0,24$, $x_{\text{Z}} = 0,021$, критерия конвекции Леду и $l = H_p$. А — — — — — эволюция с постоянной массой; С ····· $\dot{M} = -10^{-11} (LR/M)$ в $M_{\odot}/\text{год}$ при $\lg T_{\text{ef}} < 3,85$; D — $\dot{M} = -10^{-2} M_{\odot}/\text{год}$ при $\lg T_{\text{ef}} < 3,7$, L, R, M даны в солнечных единицах, точки определяют начало и конец медленного горения ${}^4\text{He}$ в голубой области для $60M_{\odot}$ и случаев с $\dot{M} \neq 0$. Слева указано местоположение однородных гелиевых звезд, из [588]

и быстрой потери массы с $\dot{M} = -10^{-2} M_{\odot}/\text{год}$ при $\lg T_{\text{ef}} < 3,7$ (вариант D), аналогично [290], дают качественно похожие треки (L, R, M — в солнечных единицах).

Различные варианты потери массы рассматривались в работах [476, 477]. Физические условия в этих работах обсуждались выше. Результаты расчетов приведены на рис. 68, 69 и в табл. 42. Здесь использована зависимость для $\dot{M}$, отличная от [588]: $\dot{M} = NL/c^2 M_{\odot}/\text{год}$, $N = 65-150$. Для варианта С с наибольшим $\dot{M}$ качественно треки совпадают с [588], т.е. в обоих случаях они поворачивают влево к области голубых гигантов. Детали расчетов сравнивать трудно, так как использовались разные критерии конвекции, то топологическое сходство очевидно.

Вопрос о потере массы при эволюции массивных звезд является весьма важным, так как при разных $\dot{M}$ треки эволюции и наблюдательные проявления этих звезд качественно различаются. Для теоретического решения этой проблемы требуется самосогласованный расчет эволюции с истечением при более точной по сравнению с [290] методикой определения $\dot{M}$, где внешние граничные условия были бы строго удовлетворены как с физической, так и с математической точек зрения.

Задача 1. Для непрозрачности в виде

$$\kappa = \kappa_0 \quad \text{при} \quad T > T_c,$$

$$\kappa = \kappa_1 \left(\frac{T}{T_c} \right)^n, \quad n > 0, \quad (1)$$

$$\text{при} \quad T < T_c, \quad \kappa_1 \gg \kappa_0$$

Таблица 42

Основные фазы ядерного горения при эволюции звезд на рис. 64, 68, 69

Стадия горения	Вариант	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\dot{M}, M_{\odot}/\text{год}$	$T_{\text{с}}, \text{К}$	$\rho_{\text{с}}, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$L/L_{\odot}$	$T_{\text{эф}}, \text{К}$	$t_{\text{эв}}, \text{годы}$
Водород	А	9	0	2,9 (7)	8,9 (0)	3,9 (3)	2,32 (4)	2,3 (7)
	В	9	1,3 (-8)	2,9 (7)	8,9 (0)	3,9 (3)	2,32 (4)	2,4 (7)
Гелий	А	9	0	1,4 (8)	4,3 (3)	8,8 (3)	4,04 (3)	3,7 (6)
	В	8,55	6,8 (-7)	1,4 (8)	4,6 (3)	8,3 (3)	3,97 (3)	3,8 (6)
^{12}C и ^{16}O	А	9	0	6,3 (8)	3,5 (5)	2,1 (4)	3,77 (3)	3,6 (5)
	В	6,2	1,9 (-6)	6,1 (8)	3,2 (5)	1,8 (4)	3,65 (3)	6,4 (5)
Водород	А	15	0	3,2 (7)	5,2 (0)	1,9 (4)	3,00 (4)	1,1 (7)
	В	15	7,1 (-8)	3,2 (7)	5,2 (0)	1,9 (4)	3,00 (4)	1,2 (7)
	С	15	1,3 (-7)	3,2 (7)	5,2 (0)	1,9 (4)	3,00 (4)	1,2 (7)
Гелий	А	15	0	1,6 (8)	1,5 (3)	4,3 (4)	3,82 (3)	1,2 (6)
	В	13,7	2,2 (-7)	1,5 (8)	1,9 (3)	2,8 (4)	7,66 (3)	1,2 (6)
	С	12,2	1,0 (-5)	1,6 (8)	1,8 (3)	4,1 (4)	3,76 (3)	1,3 (6)
^{12}C и ^{16}O	А	15	0	7,3 (8)	2,1 (5)	6,1 (4)	3,78 (3)	7,6 (4)
	В	11,1	8,5 (-6)	7,2 (8)	2,2 (5)	5,5 (4)	3,72 (3)	3,8 (4)
	С	3,5	4,2 (-7)	7,1 (8)	1,6 (5)	5,2 (4)	5,30 (4)	9,6 (4)

Водород	A	30	0	3,6 (7)	2,9 (0)	1,2 (5)	3,93 (4)	5,7 (6)
	B	30	5,1 (-7)	3,6 (7)	2,9 (0)	1,2 (5)	3,93 (4)	6,8 (6)
	C	30	2,9 (-6)	3,6 (7)	2,9 (0)	1,2 (5)	3,94 (4)	6,8 (6)
Гелий	A	30	0	1,9 (8)	5,6 (2)	3,0 (5)	1,76 (4)	4,6 (5)
	B	24,8	3,1 (-6)	1,8 (8)	6,1 (2)	2,5 (5)	9,55 (3)	5,0 (5)
	C	21,25	6,6 (-5)	1,8 (8)	6,7 (2)	1,8 (5)	3,94 (3)	5,1 (5)
^{12}C и ^{16}O	A	30	0	9,1 (8)	8,2 (4)	3,5 (5)	3,83 (3)	7,9 (3)
	B	12,5	7,2 (-5)	9,3 (8)	1,2 (5)	3,2 (5)	4,06 (3)	4,6 (3)
	C	10,15	2,9 (-6)	9,7 (8)	2,3 (5)	3,0 (5)	5,98 (4)	8,3 (3)
Водород	A	60	0	3,9 (7)	1,9 (0)	5,3 (5)	4,72 (4)	3,7 (6)
	B	60	2,7 (-6)	3,9 (7)	1,9 (0)	5,3 (5)	4,72 (4)	4,2 (6)
	C	60	5,4 (-6)	3,9 (7)	1,9 (0)	5,3 (5)	4,72 (4)	4,2 (6)
Гелий	A	60	0	2,0 (8)	3,2 (2)	1,1 (6)	1,02 (4)	2,8 (5)
	B	45,2	2,6 (-4)	1,9 (8)	2,7 (2)	8,8 (5)	4,23 (3)	3,1 (5)
	C	34,8	4,6 (-4)	1,9 (8)	3,4 (2)	8,1 (5)	4,43 (3)	3,2 (5)
^{12}C и ^{16}O	A	60	0	9,4 (8)	6,9 (4)	1,1 (6)	3,95 (3)	1,3 (2)
	B	24,8	4,0 (-5)	9,5 (8)	6,8 (4)	1,1 (6)	2,16 (5)	1,2 (2)
	C	14,6	1,0 (-4)	2,1 (8)	5,6 (2)	3,4 (5)	1,24 (5)	...

Параметры определяют условия вблизи начала горения водорода и гелия и в конце горения углерода, $t_{\text{эв}}$ — есть время до загорания следующего элемента. В последней строке таблицы приведена последняя модель данного варианта, где углерод еще не загорался.

Спектральный класс звезд
O4 O7 B0 B1 B3 B5 B8 A5 F5 G0 K0 M0 M4

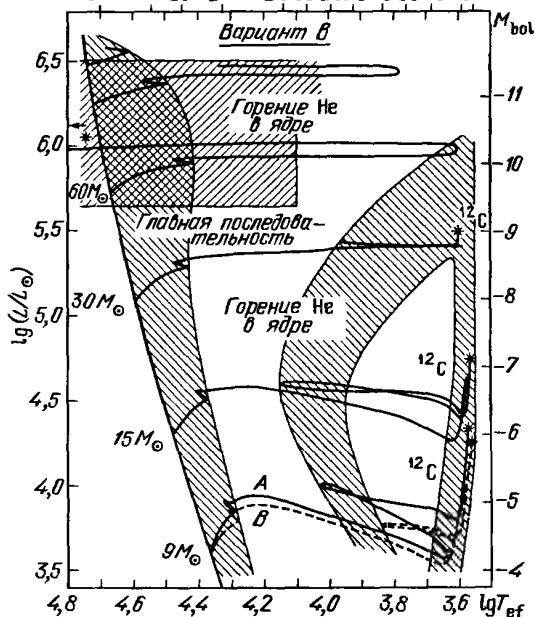


Рис. 68. То же, что на рис. 64 при учете потери массы $M = NL/c^2$, $N = 65-80$ (вариант В из [477], см. табл. 42). Для $M = 9 M_{\odot}$ для сравнения приведен трек без потери массы (А).

Спектральный класс звезд
O4 O7 B0 B1 B3 B5 B8 A5 F5 G0 K0 M0 M4

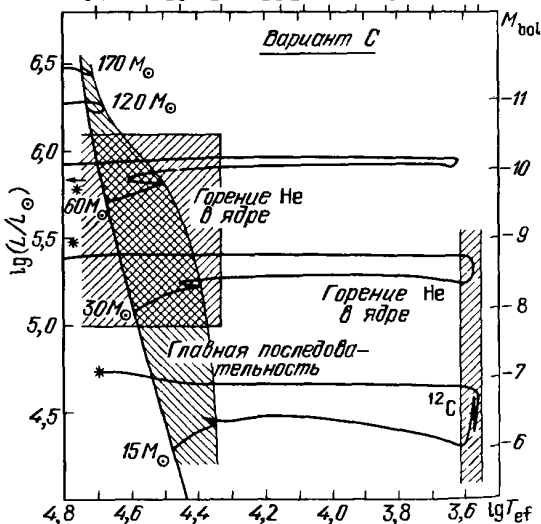


Рис. 69. То же, что на рис. 68 при $N = 135-150$ (вариант С из [477], см. табл. 42).

найти границу статических и истекающих моделей в отсутствие конвекции.

Решение [277]. Считая $m = M = \text{const}$ в уравнении (22.1) и $L = \text{const}$ в (22.4а), поделим (22.1) на (22.4а) и, используя $P(\rho, T)$ из (32.5) и граничное условие $P = 0, \rho = 0$ при $T = 0$, получим решение в виде

$$P = \frac{L_{c0}}{L} \frac{a(T^4 - T_c^4)}{3} + \frac{aT_c^4}{3} \frac{L_{c1}}{L} \frac{4}{4-n} \quad \text{при } T > T_c, \quad (2)$$

$$P = \frac{L_{c1}}{L} \frac{aT^4}{3} \frac{4}{4-n} \left(\frac{T_c}{T}\right)^n \quad \text{при } T < T_c,$$

$$\rho(T) = \left(P - \frac{aT^4}{3}\right) / \mathfrak{R}T, \quad (3)$$

$$L_{c0} = \frac{4\pi cGM}{\kappa_0}, \quad L_{c1} = \frac{4\pi cGM}{\kappa_1}. \quad (4)$$

Для одновременного обращения в нуль T и P из (2) требуется

$$n < 4. \quad (5)$$

Для одновременного обращения в нуль T, ρ и P из (3) требуется

$$n < 3, \quad \frac{L_{c1}}{L} \frac{4}{4-n} > 1. \quad (6)$$

После подстановки (2), (3) в (22.4а), решение с граничными условиями $\rho(R) = T(R) = P(R) = 0$ записывается в виде

$$\frac{1}{R} \frac{GM}{4\mathfrak{R}} + C_1 = \int \left[1 - \frac{L}{L_{c0}} + \left(\frac{T_c}{T}\right)^4 \left(\frac{4}{4-n} \frac{\kappa_0}{\kappa_1} - 1\right) \right]^{-1} dT \quad \text{при } T > T_c; \quad (7)$$

$$\frac{1}{R} \frac{GM}{4\mathfrak{R}} + C_2 = \int \left[\frac{4}{4-n} - \alpha \left(\frac{T}{T_c}\right)^n \right]^{-1} dT \quad \text{при } T < T_c,$$

$$\alpha = L/L_{c1}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из условия $T = T_c$ при $R = R_c$. Для $n = 1$ получаем

$$T = \frac{T_c}{\alpha} \left\{ \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3} - \alpha\right) \exp \left[\frac{\alpha}{T_c} \frac{GM}{4\mathfrak{R}} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R}\right) \right] \right\}, \quad T < T_c. \quad (8)$$

Для обращения в нуль T при конечном радиусе R требуется выполнение условия

$$\frac{GM}{4\mathfrak{R}R_c} > -\frac{T_c}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{3\alpha}{4} \right). \quad (9)$$

Условия (6) при $n = 1$ и (9) требуются для существования статической оболочки звезды. При нарушении условий (9) лучистая оболочка может быть только истекающей.

Задача 2. Показать, что при нарушении условий (6), (9) существует область, где имеется статическое решение с конвекцией и истекающее лучистое.

Решение. Так как конвекция (например, по теории пути перемешивания (22.46)) эффективно уменьшает α , то статическое решение имеет место и при формальном нарушении условия (9) или аналогичного ему при $n \neq 1$. Одновременно при нарушении этих условий существует истекающее на бесконечность решение для лучистого случая, полученное численно в [277] из уравнений (32.2) — (32.5) с учетом (1) для случаев $n = 1$, $\alpha = 5$, $L/L_{c0} = 1/2$, и $n = 1$, $\alpha = 2$, $L/L_{c0} = 1/2$.

§ 33. Эволюция при наличии вырождения, тепловые вспышки

В звездах малой массы $M \leq 2,25 M_{\odot}$ образуется вырожденное гелиевое ядро, в котором начало горения гелия происходит в виде тепловой вспышки. Вспышка является следствием тепловой неустойчивости, связанной с тем, что в вырожденном веществе рост температуры почти не сопровождается ростом давления. Теплоемкость звезды при этом положительна и отсутствует стабилизирующая обратная связь, имеющаяся у нормальных звезд с отрицательной теплоемкостью.

В результате тепловой вспышки гелиевое ядро становится невырожденным и снова наступает спокойная фаза эволюции с дальнейшим горением гелия в ядре. Эта стадия протекает качественно также, как и у звезд промежуточной массы $2,25 \leq M/M_{\odot} \leq \sim 8$, у которых вырождение в центральных областях впервые наступает только после образования углеродного ядра и двух слоевых источников: гелиевого и водородного.

Эволюция звезд на стадии горения слоевых источников как малой, так и промежуточной массы (МП-звезды) оказывается удивительно похожей. На этой стадии наблюдаемые свойства звезды — ее положение на ГР диаграмме — слабо зависят от полной массы звезды и определяются, в основном, массой углеродного ядра. Все звезды движутся в среднем по одному и тому же треку, называемому конвергентным. Звезды, попадающие на этот трек, называют также принадлежащими асимптотической ветви гигантов (АВГ). Движение по конвергентному треку сопровождается тепловыми вспышками в гелиевых слоевых источниках, количество вспышек растет с ростом массы звезды. Природа этих вспышек отличается от природы гелиевой вспышки в ядре, так как вещество в гелиевом слоевом источнике невырождено. Общим свойством является положительная теплоемкость, которая в данном случае связана с формой источника энергии в виде тонкого слоя. Эволюция вдоль конвергентного трека сопровождается потерей массы, что в итоге ведет к образованию белого карлика из вырожденного углеродного ядра. Непосредственно перед образованием белого карлика происходит быстрый сброс оставшейся части оболочки, которая затем наблюдается в виде туманности, освещаемой излучением горячей центральной звезды (планетарная туманность). В наиболее массивных звездах углеродное ядро достигает массы $M = 1,39 M_{\odot}$, когда в нем развивается тепловая неустойчивость, результатом которой обычно считается наблюдаемый взрыв сверхновой I типа. Рассмотрим подробнее упомянутые выше стадии эволюции МП-звезд.

а) Гелиевая вспышка в ядре (ГВЯ). Развитие тепловой неустойчивости в вырожденном ядре звезды было предсказано Местелом [484] и впервые рассчитано в работах Шварцшильда с соавторами [573, 569, 388, 386]. В [386] рассматривалась звезда второго населения (обедненная металлами) с $M = 1 M_{\odot}$, начальным химическим составом $x_H = 0,9$, $x_{He} = 0,099$, $x_Z = 0,001$ и критерием конвекции Шварцшильда. Конвекция в ядре всегда принималась адиабатической, включая момент максимума вспышки. Максимальная центральная температура при вспышке составила $2 \cdot 10^8 K$, а максимальная скорость энерговыделения из-за горения гелия $\sim 10^{11} L_{\odot}$. Светимость звезды за время вспышки мало меняется от $2720 L_{\odot}$ до $2740 L_{\odot}$ в максимуме, а затем через $3,5 \cdot 10^5$ лет уменьшается до $170 L_{\odot}$. За это время эффективная температура проходит значения 4500, 4060 и 4610 K, а радиус — 105, 106 и $20 R_{\odot}$. Последние цифры соответствуют модели, в которой гелий горит уже в невырожденном ядре. В максимуме вспышки x_Z в центре достигает значения 0,0077, что соответствует выгоранию 0,7% гелия в центре ядра. Скорость выделения энергии такова, что ядро продолжает оставаться в состоянии, близком к статическому равновесию. Конвекция, развивающаяся в ядре во время вспышки, не достигает водородного слоевого источника, остановившись от него в двух шкалах высот по плотности.

В дальнейшем расчеты гелиевой вспышки проводились неоднократно (см. обзор [561]) и всегда конвекция из ядра не достигала водородного слоя. Важным неучтенным фактором является нестационарность конвекции во время вспышки. Неясной в этих условиях остается и стабилизирующая роль градиента химического состава $\nabla \mu$. Второй тип перемешивания, который может произойти при вспышке, связан с проникновением внешней конвективной оболочки вглубь ядра. Результаты разных авторов здесь противоречивы, причем они сильно зависят от принятой формы нейтринных потерь из-за плазменных нейтрино, для которых имеются расхождения (см. [268]) [561]. Основной общий результат всех расчетов состоит в том, что после вспышки возникает звезда с невырожденным ядром, где горит гелий, а количество гелия, сгоревшего во время вспышки, не превышает 1%. Длительность вспышки $5 \cdot 10^4$ лет, в процессе ее положение звезды на ГР-диаграмме меняется слабо. В [415] на основе численных расчетов получены интерполяционные формулы для массы гелиевого ядра M_{CHe} перед вспышкой (в $M_{\odot}$):

$$M_{CHe} = 0,475 + 0,23 (0,3 - x_{He}) - 0,01 (\lg x_Z + 3) + 0,035 (0,8 - M), \quad (33.1)$$

и времени эволюции звезды t_{RG} на стадии красных гигантов от светимости L_{RG} до ГВЯ:

$$\lg (t_{RG}/10^7 \text{ лет}) = 2,351 - 0,84 \lg (L_{RG}/L_{\odot}) - \quad (33.2)$$

$$- 0,04 (\lg x_Z + 3) + 1,36 \lg (1 - x_{He}) - 0,27 \lg M,$$

где M — масса звезды в $M_{\odot}$, x_{He} и x_Z — начальные концентрации. Приведем также формулу, определяющую время жизни звезды t_t до точки поворота с главной последовательности (см. рис. 56), как функцию светимости в 20^*

точке поворота L_t и начальных концентраций x_{He} и x_Z :

$$\lg \left(\frac{t_t}{10^{10} \text{ лет}} \right) = 0,42 - 1,1 \lg L_t + 0,59 (0,3 - x_{\text{He}}) - 0,14 (\lg x_Z + 3),$$

$$-4 \leq \lg x_Z \leq -3. \quad (33.3)$$

Эта формула полезна для оценки возраста скоплений по их ГР диаграмме.

б) Горизонтальная ветвь (ГВ). Звезды небольшой массы с невырожденным гелиевым ядром и водородной оболочкой, образующиеся в результате гелиевой вспышки, располагаются на ГР диаграмме вблизи линии, которая называется горизонтальной ветвью гигантов (ГВ). Ввиду слабой зависимости массы гелиевого ядра во время вспышки $M_{\text{СHe}}$ о массы звезды, модели звезд на горизонтальной ветви представляют собой гелиевые ядра почти одной и той же массы, окруженные водородными оболочками разной массы. В [590] рассчитана эволюция моделей с $M_{\text{СHe}} = 0,475 M_{\odot}$ и различными водородными оболочками. Результаты представлены на рис. 70. Начальные модели лежат на горизонтальной ветви нулевого возраста (ГВНВ). В них горит гелий в ядре и водород в слоевом источнике. По мере выгорания гелия модели отходят от ГВНВ и располагаются на ГВ. После выгорания в ядре гелия начинается стадия быстрого сжатия ядра (штриховая линия на рис. 70) до загорания гелиевого слоевого источника. После этого звезды занимают на ГР диаграмме место, которое называется верхней горизонтальной ветвью (ВГВ). Движение вдоль ВГВ сопровождается ростом роли водородного слоевого источника, сближением обоих слоевых источников, увеличением светимости звезды, и приводит к выходу на асимптоти-

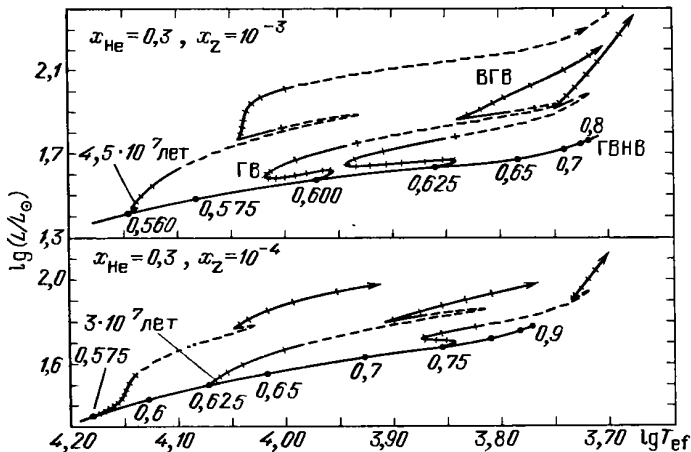
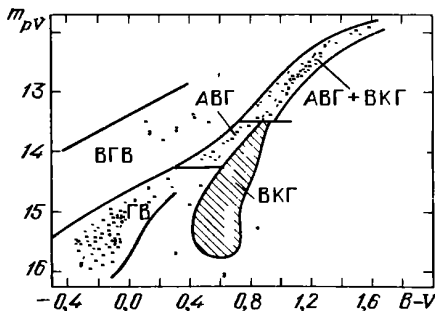


Рис. 70. Эволюционные треки звезд на стадии горения гелия в ядре и стадии двойного слоевого источника для двух химических составов в оболочке. ГВНВ – горизонтальная ветвь нулевого возраста, цифры на ней дают полные массы звезд, масса гелиевого ядра равна везде $0,475 M_{\odot}$. Сплошными линиями обозначены ГВ – горизонтальная ветвь, отходящая от ГВНВ, и ВГВ – верхняя горизонтальная ветвь. Штриховые линии – стадии быстрой эволюции. Между поперечными штрихами время эволюции равно $5 \cdot 10^6$ лет. После ВГВ звезды идут в АГВ – асимптотическую ветвь гигантов, из [590]

Рис. 71. Схематическая диаграмма цвет ($B - V$) – светимость (m_{pV}) для шарового скопления М 13. Выделены следующие группы звезд:

ВКГ – ветвь красных гигантов,
ГВ – горизонтальная ветвь,
ВГВ – верхняя горизонтальная ветвь,
АВГ – асимптотическая ветвь гигантов (из [590])



ческую ветвь гигантов АВГ. На АВГ приходят почти все звезды с ГВ, кроме звезд левого конца, упирающегося в гелиевую главную последовательность, с малой водородной оболочкой. Эти звезды превращаются в белые карлики, не заходя на АВГ. Звезды с $M \geq M_{\odot}$ после гелиевой вспышки не покидают ветви красных гигантов ВКГ с которой они, как и звезды промежуточной массы, почти непрерывно переходят на АВГ.

На рис. 71 из [415] на диаграмме для шарового скопления М 13 цвет ($B - V$) – светимость (m_{ph})*, которая подобна ГР диаграмме, указано расположение звезд на различных эволюционных стадиях, отмеченных выше. Время эволюции звезды на ГВ аппроксимируется формулой [415]

$$\lg(t_{ГВ}/10^7 \text{ лет}) = 0,74 - 2,2(M_{CHe} - 0,5), \quad (33.4)$$

причем зависимость $M_{CHe}(M, x_{He}, x_Z)$ дана в (33.1).

в) Асимптотическая ветвь гигантов (АВГ). Для звезд с вырожденным углеродным ядром и двумя очень близко расположенными гелиевым и водородным слоевыми источниками положение на ГР диаграмме почти не зависит от полной массы звезды и определяется, в основном массой углеродного ядра. АВГ представляет собой конвергентный трек, на который выходят все звезды МП. Существование конвергентного трека было установлено в работах Пачиньского [521, 523] и Ууса [204, 205]. Сходимость всех звезд к этому треку видна, например, на рис. 56 из [521]. Наличие двух тонких, близко расположенных слоевых источников создает большие вычислительные трудности при расчете эволюции на АВГ обычными методами (§ 22). Ситуация осложняется еще и тем, что на большей части АВГ гелиевый слоевой источник является неустойчивым и в нем происходят тепловые вспышки (ТП). Так же как и при ГВЯ, звезда при ТП остается в статическом равновесии. Для расчета одной вспышки тре-

*) Звездная величина M определяется логарифмом светимости звезды. Болометрическая (полная) абсолютная величина $M_{bol} = 4,74 - 2,5 \lg(L/L_{\odot})$. Видимая величина (без учета межзвездного поглощения) $m = M - 5 + 5 \lg d_{пк}$, $d_{пк}$ расстояние до звезды в парсеках. Для грубой оценки спектра используют звездные величины в отдельных спектральных диапазонах, задаваемых фильтрами: m_U вокруг $\lambda = 3650 \text{ \AA}$, m_B вокруг $\lambda = 4400 \text{ \AA}$, m_V вокруг $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ с $\Delta\lambda \approx 800 \text{ \AA}$. Фотовизуальная величина $m_{ph} \approx m_V$. Показатель цвета $B - V$ ($\equiv m_B - m_V$) не зависит от расстояния до звезды и отражает ее температуру, $B - V \approx (7300 \text{ K}/T_e) - 0,60$. Более точные определения звездных величин с учетом кривых прозрачности фильтров, распределения энергии в спектре звезды и межзвездного поглощения даны в [5].

буется несколько тысяч моделей, а количество вспышек для звезд промежуточной массы составляет порядка тысячи, так что прямой счет эволюции становится невозможным из-за больших затрат времени.

Было предложено несколько приближенных методов расчета эволюции на АВГ, позволяющих подавить ТП и получить усредненный эволюционный трек. Метод, используемый Пачинским и Уусом при открытии конвергентного трека, состоит в принятии приближения квазистационарности при протекании вещества через два тонких слоевых источника. Впервые такое приближение было применено в работе [344] для расчета тонкого водородного слоевого источника. Приближение основано на малости эйлеровых временных производных $(\partial/\partial t)_r$ по сравнению с лагранжевыми $(\partial/\partial t)_m$. Это связано с тем, что все параметры сильно меняются при переходе через слой горения, но параметры до и после слоевого источника со временем меняются слабо. Имеем [523]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r - \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_r \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)_t. \quad (33.5)$$

На границе ядра *) $\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_r \approx \frac{dM_c}{dt} = \dot{M}_c$, поэтому учитывая малость $(\partial/\partial t)_r$, имеем из (33.5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m = -\dot{M}_c \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)_t. \quad (33.6)$$

При выводе (33.5) учитывались соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial m}\right)_t \left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)_t \text{ и } \frac{dm}{dt} = \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_r + \left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)_t \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m \equiv 0. \quad (33.7)$$

Соотношение (33.6) позволяет свести уравнения звездной эволюции, в которых имеются частные производные в уравнениях для изменения химического состава и в выражении для гравитационной энергии (§ 22), к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Уравнения химической эволюции (22.5)–(22.7) заменяются уравнениями [204]

$$\frac{dx_H}{dm} = 4m_p \frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} \frac{1}{\dot{M}}, \quad \frac{dx_{\text{He}}}{dm} = -\frac{dx_H}{dm}, \quad \frac{dx_C}{dm} = 0 \quad (33.8)$$

в зоне горения водорода и уравнениями

$$x_H = 0, \quad \frac{d}{dm} (x_{\text{He}} + x_{1/2\text{C}} + x_{1/6\text{O}} + x_{2/10\text{Ne}}) = 0, \\ \frac{dx_{\text{He}}}{dm} = \left(\frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} + \frac{m_{1/2\text{C}} \epsilon_{1/2\text{C}\alpha}}{Q_{1/2\text{C}\alpha}} + \frac{m_\alpha \epsilon_{1/6\text{O}\alpha}}{Q_{1/6\text{O}\alpha}} \right) \frac{1}{\dot{M}_c}, \quad (33.9)$$

*) Масса ядра M_c определяется, как массы на середине водородного слоевого источника [521].

$$\frac{dx_{12C}}{dm} = \left(-\frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} + \frac{m_{12C} \epsilon_{12C\alpha}}{Q_{12C\alpha}} \right) \frac{1}{\dot{M}_c},$$

$$\frac{dx_{12O}}{dm} = \left(\frac{m_{16O} \epsilon_{16O\alpha}}{Q_{16O\alpha}} - \frac{(m_\alpha + m_{12C}) \epsilon_{12C\alpha}}{Q_{12C\alpha}} \right) \frac{1}{\dot{M}_c}$$

в зоне горения гелия. В (33.8) опущена реакция pp-цикла, а в (33.9) добавлена, по сравнению с (22.6), реакция $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$ (см. (14.32) и табл. 16). Член с гравитационной энергией из (22.3) примет вид

$$\epsilon_{\text{ГР}} = -\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \rho} - \frac{P}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{dm} + \frac{\partial E}{\partial T} \frac{dT}{dm} \right] \dot{M}_c. \quad (33.10)$$

В [205] модели с двойными слоевыми источниками строились без учета гравитационной энергии при $\epsilon_{\text{ГР}} = 0$. Запишем первое уравнение (33.8) и третье (33.9) в виде

$$\frac{dx_{\text{H}}}{dm} = \frac{\epsilon_{\text{H}}}{E_{\text{H}}} \frac{1}{\dot{M}_c}, \quad (33.11a)$$

$$\frac{dx_{\text{He}}}{dm} = \frac{\epsilon_{\text{He}}}{E_{\text{He}}} \frac{1}{\dot{M}_c}. \quad (33.11b)$$

Здесь $\epsilon_{\text{H}} = \epsilon_{\text{CNO}}$, $E_{\text{H}} = Q_{\text{CNO}}/4m_{\text{p}}$, $\epsilon_{\text{He}} = \epsilon_{3\alpha}$, $E_{\text{He}} = Q_{3\alpha}/3m_\alpha$ определяет энергию, выделяющуюся при превращении одного грамма гелия в углерод. Из (22.3) при $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\text{ГР}} = 0$ и (33.11), интегрируя, имеем

$$x_{\text{H}} = x_{\text{H}0} + \frac{L(m) - L}{E_{\text{H}} \dot{M}_c}, \quad L_{\text{He}} = L - x_{\text{H}0} E_{\text{H}} \dot{M}_c, \quad (33.12)$$

$$x_{\text{He}} = x_{\text{H}0} + x_{\text{He}0} + \frac{L(m) - L_{\text{He}}}{E_{\text{He}} \dot{M}_c},$$

$$L_i = L_{\text{He}} - (x_{\text{H}0} + x_{\text{He}0}) E_{\text{He}} \dot{M}_c.$$

Здесь L_{He} — светимость на границе между слоевыми источниками, L — внешняя светимость, L_i — светимость углеродного ядра. Из (33.12) получается связь между L , L_i , $\dot{M}_c$:

$$\dot{M}_c = \frac{L - L_i}{x_{\text{H}0} E_{\text{H}} + (x_{\text{H}0} + x_{\text{He}0}) E_{\text{He}}}. \quad (33.13)$$

С учетом (33.13) из (33.12) получается распределение x_{H} и x_{He} в слоевых источниках, как функция светимости $L(m)$ с полной светимостью L в виде параметра. Процедура построения равновесной модели с двумя квазистационарными источниками с $\epsilon_{\text{ГР}} = 0$ сводится к следующему [205]. Внутри углеродного ядра выбирается место сшивки при $m = m_f$. Для данного L и эффективной температуры T_{ef} уравнения (22.1)–(22.4) с учетом (33.12) и (33.13) интегрируются внутрь до $m = m_f$, где $\rho = \rho_f$, $T = T_f$, $r = r_f$. Считая углеродное ядро изотермическим с нулевой светимостью $L_i = 0$, выполняем интегрирование из центра с данными ρ_c и $T_c = T_f$. В точке сшивки m_f получаем рассогласование по ρ и r . Построение модели с данными L и M сводится к поиску T_{ef} и ρ_c , удовлетворяющих условиям сшивки по ρ и T . Метод нахождения T_{ef} и ρ_c аналогичен методу Шварцшильда из § 22, но вместо четырех параметров в § 22 здесь ищется только два.

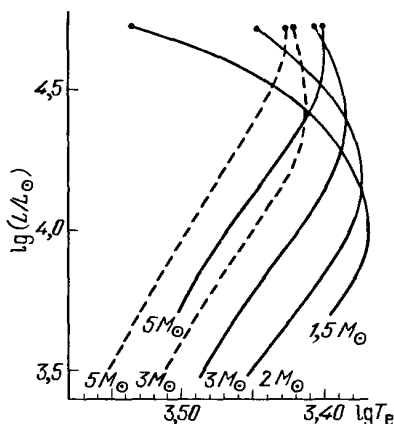


Рис. 72. Треки звезд промежуточной массы на АВГ из [205]. Для сравнения штриховыми линиями приведены треки из [521]

В [205] начальный состав выбирался в виде $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,26$, $x_Z = 0,04$, а путь перемешивания $l = H_p$. Эволюционные треки приведены на рис. 72. Полученные модели имеют очень разреженную, почти полностью конвективную оболочку с большой областью инверсного градиента плотности. Все эволюционные треки при большой светимости поворачивают налево, причем $T_{ef, min} = 2300-2400$ К. Замечательной особенностью моделей является однозначная линейная зависимость светимости звезды от массы углеродно-кислородного ядра M_{CO} , полученная в [205] в виде

$$L/L_\odot = 59100 (M_{CO}/M_\odot - 0,51). \quad (33.14)$$

Подставляя в (33.13) численные значения констант и учитывая (33.14), имеем

$$\begin{aligned} \dot{M}_C &= 0,47 \cdot 10^{20} (M_{CO}/M_\odot - 0,51) \text{ г} \cdot \text{с}^{-1} = \\ &= 0,71 \cdot 10^{-6} (M_{CO}/M_\odot - 0,51) M_\odot/\text{год}. \end{aligned} \quad (33.15)$$

Масса ядра и светимость звезды экспоненциально растут со временем, причем длительность стадии роста ядра до загорания углерода ^{12}C составляет несколько миллионов лет. Масса вещества между слоевыми источниками на АВГ уменьшается со временем от $0,015 M_\odot$ при $M_{CO} = 0,6 M_\odot$ до $5 \cdot 10^{-6} M_\odot$ при $M_{CO} = 1,39 M_\odot$. Метод счета эволюции на стадии АВГ с подавлением тепловых вспышек, основанный на пренебрежении гравитационной энергией, рассматривался в [597].

Эволюция звезд на АВГ с использованием метода Хенби рассчитывалась в [521, 523]. В оболочке с $T_m \leq 10^6-10^7$ К система (22.1)–(22.4) интегрировалась снаружи до $T = T_m$ при $L = \text{const}$ и $\epsilon_{gr} = 0$ так же, как в [205]. При $T = T_m$ к этой системе добавлялись уравнения (33.8), (33.9). При этом $\epsilon_{gr} \neq 0$ бралось из (33.10), в отличие от [205]. В этом, более полном виде система интегрировалась дальше до точки сшивки в ядре при $m = m_f$. Величина $\dot{M}_C$ здесь не является однозначной функцией L , как в (33.13), а находится в результате сшивки с ядром, которое не считается изотермичным. Температура ядра в точке сшивки также находится при этой процедуре. Результаты интегрирования оболочек считались граничными условиями при определении структуры ядра методом Хенби (§ 22). В связи с большой светимостью звезд на АВГ, в [523] вводилось еще одно упрощение, связанное со слабой зависимостью параметров в области $T > T_m$ от эффективной температуры. Результаты расчетов треков для начального состава $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$ и $x_Z = 0,03$ при $l = H_p$

даны на рис. 56 [521], сравни с рис. 72 [205]. Различие треков связано, видимо, с различием в начальных составах, так как вычислительная точность в этих работах примерно одинакова. Зависимость светимости от массы ядра определяется соотношением [521]

$$L/L_{\odot} \approx 59250 (M_c/M_{\odot} - 0,52). \quad (33.16)$$

Она также не зависит от полной массы M и очень близка к (33.14) из [205]. Для звезд промежуточной массы $M \geq 2,25 M_{\odot}$ выделение гравитационной энергии становится существенным и светимость между вспышками определяется соотношением [423] (M в $M_{\odot}$)

$$L \approx (L_H + L_g) = 6,34 \cdot 10^4 (M_c - 0,44) (M/7)^{0,19}, \quad (33.17)$$

где учитывается слабая зависимость от полной массы M . Усредненное изменение радиуса звезды на АВГ определяется аппроксимационной формулой [420]

$$R = 312 (L/10^4 L_{\odot})^{0,68} \left(\frac{1,175}{M} \right)^{0,31S} \left(\frac{x_Z}{0,001} \right)^{0,088} (l/H_P)^{-0,52}, \quad (33.18)$$

$$\text{где } S = \begin{cases} 0 & \text{при } M \leq 1,175 \\ 1 & \text{при } M > 1,175 \end{cases}.$$

г) Тепловые вспышки в гелиевом слоевом источнике (ТВ). Последовательный расчет эволюции звезды с $M = 1 M_{\odot}$ без упрощающих условий предыдущего раздела привел [570] к открытию тепловой неустойчивости гелиевого слоевого источника при отсутствии в нем вырождения. Наличие этой неустойчивости является общим свойством звезд на большей части АВГ. В [570] дано подробное теоретическое объяснение этого явления (см. также § 47). Возможность развития тепловой неустойчивости в тонких невырожденных слоях горения была предсказана Гуревичем и Либединским еще в 1947 г. ((см. [95]).

Подробное исследование 13 ТВ при расчете эволюции звезды в $1 M_{\odot}$ на АВГ с начальным составом $x_H = 0,9$, $x_{He} = 0,099$, $x_Z = 0,001$, критерием конвекции Леду, $l = H_P$ в оболочке и приближением адиабатической конвекции в области ядерного горения сделано в [571]. Было последовательно построено более 25000 равновесных моделей на протяжении $4 \cdot 10^6$ лет эволюции звезды. Первая вспышка произошла, когда середина гелиевого слоевого источника находилась при $m_{He} = 0,465 M_{\odot}$, а последняя из рассчитанных, тринадцатая — при $m_{He} = 0,539 M_{\odot}$. Соответствующие массы для середины водородного слоевого источника M_c составляли 0,55 и 0,60 $M_{\odot}$ соответственно. Число вспышек в ходе дальнейшей эволюции может быть значительно больше.

На спокойной стадии эволюции основную роль в светимости играет горение водорода в силу его большей калорийности. Во время вспышек выделение энергии за счет горения гелия может превысить водородное более чем на пять порядков. Основные характеристики тепловых вспышек из [571] таковы. Центральные температуры на спокойных стадиях равнялись $(1,92 \div 2,14) \cdot 10^8$ К, а в максимумах вспышек $(1,84 \div 2,04) \cdot 10^8$ К; соответственно, центральные плотности равнялись $(4,35 \div 7,08) \cdot 10^5$ г · см⁻³ и $(4,11 \div 6,64) \cdot 10^5$ г · см⁻³, т.е. в процес-

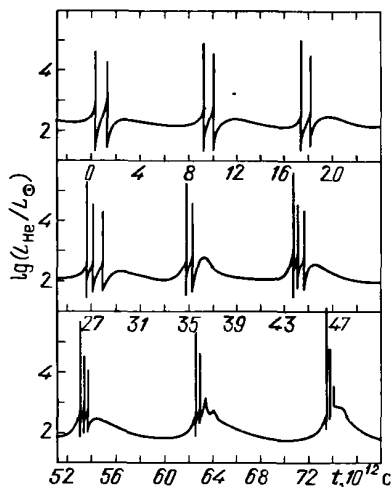


Рис. 73. Скорость горения гелия L_{He} в зависимости от времени для первых девяти релаксационных циклов, вызванных тепловой неустойчивостью в гелиевом слоевом источнике звезды с $M = 1 M_{\odot}$ населения II ($x_{\text{H}} = 0,9$, $x_{\text{He}} = 0,099$, $x_{\text{Z}} = 0,001$). Масса ядра, где выгорел водород, меняется от 0,554 до 0,6 $M_{\odot}$ при переходе от первой до тринадцатой вспышки, из [571]

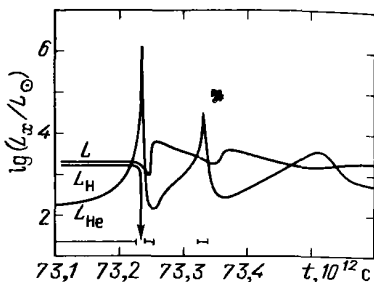


Рис. 74. Скорость горения гелия L_{He} , водорода L_{H} и поверхностная светимость звезды в процессе девятого цикла, см. рис. 73. Значком $\rightarrow$ указаны области неустойчивости из [571]

се ТП ядро немного расширяется и охлаждается. В середине гелиевого слоевого источника температуры на спокойных стадиях равны $(1,26 - 1,29) \cdot 10^8$ К, при вспышках $(1,69 - 2,54) \cdot 10^8$ К; соответствующие плотности равны $(1,38 - 3,46) \cdot 10^4$ г · см³ и $(4,06 - 4,88) \cdot 10^3$ г · см³. Изменение скорости выделения энергии за счет горения гелия L_{He} для первых девяти вспышек представлено на рис. 73, а L_{He} , L_{H} и светимость звезды L в процессе девятой вспышки даны на рис. 74 из [571].

Каждая вспышка состоит из двух-трех пиков, время между которыми меняется от 30 000 лет для первой вспышки до 1000 лет для тринадцатой. Длительность главного пика уменьшается при этом от 300 лет до одного года, L_{He} в максимуме меняется от $\sim 10^5$ до $\sim 10^7 L_{\odot}$. Время между вспышками примерно равно 300 000 годам. Отметим, что со временем интенсивность вспышек растет, увеличивается конвекция в зоне горения и, начиная с девятой вспышки, конвекция проникает в области, богатые водородом, приводя к существенным изменениям химического состава в результате появления свободных нейтронов в реакции $^{12}\text{C}(\text{p}, \gamma) ^{13}\text{N}(\beta^+ \nu) ^{13}\text{C}(\alpha, \text{n}) ^{16}\text{O}$.

Эволюция звезд с массами $M = 0,6$ и $0,8 M_{\odot}$ населения II с $x_{\text{H}} = 0,732$, $x_{\text{He}} = 0,266$, $x_{\text{Z}} = 0,001$ рассчитывалась в [598] вплоть до АВГ, где подробно изучено несколько ТВ. Результаты изменения L , L_{H} и L_{He} качественно совпали с [571]. Впервые показано, что при изменении L во время вспышки эффективная температура почти не меняется: $\Delta \lg T_{\text{e}} \leq \leq 10^{-2}$, так что на ГР диаграмме звезда ходит почти вертикально (см.

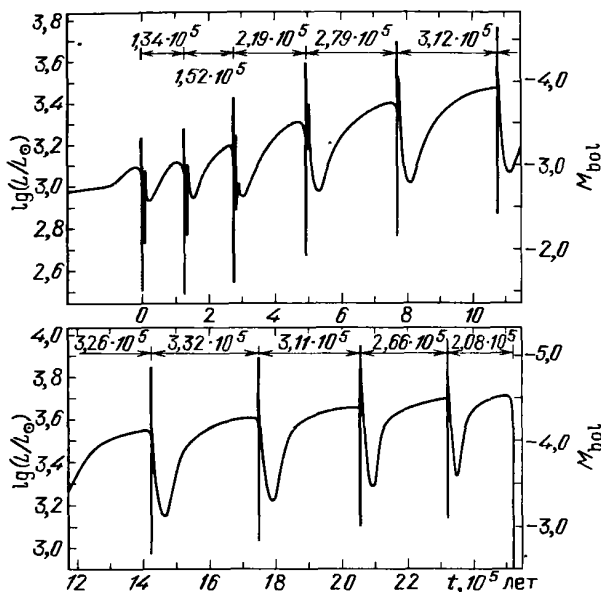


Рис. 75. Светимость и болометрическая звездная величина во время тепловых вспышек у звезды с $M = 0,6 M_{\odot}$ и начальным составом $x_H = 0,749$, $x_{He} = 0,25$, $x_Z = 0,001$. Цифры у горизонтальных стрелок показывают время между вспышками в годах, путь перемешивания принимался равным $l = 1,5 H_p$, $M_{bol} = -2,5 \lg (L/L_{\odot}) + 4,77$, из [419]

рис. 75 из [419]). ТВ возможны лишь у звезд с $M \geq 0,52-0,53 M_{\odot}$, причем общее число вспышек растет с массой звезды. Эволюция звезды с $M = 0,6 M_{\odot}$ рассчитывалась в [419]. На АВГ стадии эта звезда претерпела всего десять вспышек, представленных на рис. 75, прежде чем сойти с АВГ и направиться в область белых карликов (см. подробнее п. е). В максимумах вспышек при переходе от первой к десятой масса ядра меняется от $0,5272$ до $0,5901 M_{\odot}$, скорость выделения энергии за счет горения гелия L_{He} — от $3,3 \cdot 10^4$ до $2,9 \cdot 10^7 L_{\odot}$. Светимость звезды изменяется при этом гораздо слабее (см. рис. 75). Временная структура вспышек на звезде с $M = 0,6 M_{\odot}$ качественно такая же, как для $1 M_{\odot}$ (ср. рис. 74 и 75), однако, начиная с шестой вспышки последующие становятся однопиковыми, что, возможно, связано с малостью массы оболочки над M_c .

Зависимость временного интервала между вспышками $\Delta t_{ТВ}$ от массы ядра M_c исследовалась в [529, 530]. В [530] получена следующая приближенная зависимость (для $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$, $x_Z = 0,03$):

$$\lg \Delta t_{ТВ} \approx 3,06 - 4,5 \left(\frac{M_c}{M_{\odot}} - 1 \right). \quad (33.19)$$

Здесь $t_{ТВ}$ измеряется в годах.

Зависимость светимости звезды в максимуме вспышки L_m от массы M_c ядра, полученная на основе численных расчетов, приведена в [636]

$$\frac{L_m}{L_\odot} = 97000 \left(\frac{M_c}{M_\odot} - 0,52 \right). \quad (33.20)$$

д) Потеря массы на АВГ. Убедительным свидетельством потери вещества звездами малой и промежуточной массы МП в процессе эволюции являются наблюдения скоплений, состоящих из звезд примерно равного возраста. Точка поворота с главной последовательности для скопления Плеяды соответствует $M = M_t > 6M_\odot$. В то же время в этом скоплении найдены одиночные белые карлики, которые заведомо образовались из звезд с начальной массой $M > M_t$ и, следовательно, потеряли в ходе эволюции большую часть своей массы [631]. Таким образом, все одиночные МП звезды с $M \leq 8M_\odot$ превращаются в белые карлики, теряя в ходе эволюции до $7M_\odot$. Основная потеря массы происходит на стадии, когда звезда находится на АВГ. После сброса оболочки остается ядро в виде горячей звезды, которая нагревает улетающее вещество и делает его наблюдаемым в виде планетарной туманности. После остывания ядро превращается в белый карлик. Эволюционная схема красный гигант — планетарная туманность — белый карлик была предложена И.С. Шкловским в 1956 г. [233] на основе анализа наблюдательных данных.

Предложено несколько механизмов потери массы МП звездами, но окончательно этот вопрос еще не решен. В [472, 536] рассматривалась возможность сброса протяженной оболочки красного гиганта за счет энергии ионизации водорода, выделение которой делает энергетически выгодным улет оболочки на бесконечность. В отсутствие динамических расчетов подобного сброса нет возможности судить о том, насколько важен этот механизм.

Другим механизмом может быть истечение вещества под действием светового давления при большой непрозрачности в оболочке [356, 452, 453]. Этот механизм аналогичен рассмотренному в [45] для гигантов (см. § 32, п. г, а также [44]). Отметим, что уравнения в [452] остаются справедливыми, если критическая точка расположена при оптической толще $\tau < 1$.

Наиболее вероятным в последнее время считается механизм потери массы, связанный с колебательной неустойчивостью звезд и генерацией ударных волн, ведущих к порционному сбросу вещества. Численные расчеты подобного сброса проводились в [634, 200, 208, 635] на основе уравнений одномерной нестационарной гидродинамики. Расчеты, проведенные для вполне реалистических условий, показали достаточную эффективность данного механизма. В работах [200, 208] учитывалась дополнительная потеря массы за счет давления на пылинки. Наблюдательные аргументы в пользу эволюционной схемы Шкловского [233] приведены в [454].

Рассмотренные выше механизмы потери массы не включены пока, как составная часть, в эволюционную схему расчета. Если для первых квазистационарных механизмов можно использовать схему, аналогичную § 32 п.г, то для третьего механизма неясны даже принципы его самосогласованного учета.

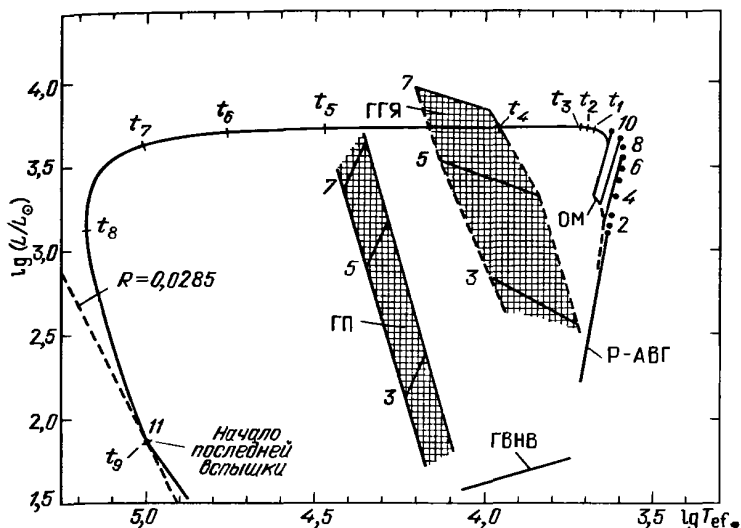


Рис. 76. Эволюционный трек звезды, превращающейся в белый карлик, с $M = 0,6 M_{\odot}$, начиная от P-ABГ; начальный состав - $x_H = 0,749$, $x_{He} = 0,25$, $x_Z = 0,001$. Точками обозначены положения звезды перед очередной тепловой вспышкой, номер которой указан. Штриховая линия OM - огибающая продолжительных минимумов светимости (dip's) при вспышках (см. рис. 75), указаны треки звезды в области минимумов вспышек № 7, 9 и 10. Времена эволюции t_i на штриховых отметках и соответствующие массы оболочек, богатых водородом, равны

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_i (10^4 \text{ лет})$	-3,0	-2,0	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	1,86
$M_{e,H} (10^{-3} M_{\odot})$	3,15	2,53	1,84	1,47	1,13	0,80	0,49	0,27	0,27

P-ABГ - ранняя асимптотическая ветвь гигантов (без вспышек), куда звезда приходит после исчезновения гелия в ядре. Заштрихованы области ГП - главная последовательность и ГГЯ - область горения гелия в ядре, где даны приближенные эволюционные треки звезд с $M = 3, 5, 7 M_{\odot}$ и $x_H = 0,719$, $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,001$. ГВНВ - горизонтальная ветвь нулевого возраста, где начинается горение гелия в статическом ядре. Штриховая линия слева соответствует звезде постоянного радиуса $R = 0,0285 R_{\odot}$ (горячий белый карлик), из [419, 421]

Эмпирическая зависимость $\dot{M}$ от параметров звезды получена Ламмерсом [460]:

$$\lg F_m = -5,23 (\pm 0,06) + 4,60 (\pm 0,45) \lg (T_{\text{ef}} / 3 \cdot 10^4 \text{ K}) - 0,48 (\pm 0,11) \lg (g_{\text{ef}} / 10^3) \text{ г} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (33.21)$$

$$\lg \dot{M} = -4,83 (\pm 0,28) + 1,42 (\pm 0,40) \lg (L / (10^6 L_{\odot})) - 0,99 (\pm 0,47) \lg (M / 30 M_{\odot}) + 0,61 (\pm 0,13) \lg (R / 30 R_{\odot}) M_{\odot} / \text{год}. \quad (33.22)$$

Другое соотношение проиводит Реймерс (см. [423], наблюдательные

данные см. в [549]) :

$$\dot{M} = -4 \cdot 10^{-13} \eta \left(\frac{L}{L_{\odot}} \frac{g_{\odot}}{g} \frac{R_{\odot}}{R} \right) \frac{M_{\odot}}{\text{год}}. \quad (33.23)$$

е) Эволюция с потерей массы: от АВГ к белому карлику. Эволюционный трек звезды с $M = 0,6 M_{\odot}$ от АВГ к белому карлику представлен на рис. 76 из [419, 421]. Ввиду малой массы эволюцию удалось просчитать точно, пройдя десять вспышек в галиевом слоевом источнике. Последняя, одиннадцатая вспышка происходит уже при движении звезды в область белого карлика при $M = 0,5997 M_{\odot}$. Так как положение звезды на АВГ определяется в основном массой M_c , данный трек, за исключением количества и некоторых особенностей вспышек, пригоден и для описания эволюции звезды начально большей массы.

Анализ наблюдений звезд на АВГ, планетарных туманностей и их ядер привел к представлению о двух типах потери массы на АВГ: спокойный звездный ветер, мощность которого выражается эмпирическими формулами (33.22) или (33.23) и стадия быстрого сброса (сверхветер), которая имеет место непосредственно перед уходом звезды с АВГ [423]. Из наблюдений получена формула (см. [423]) связывающая массу планетарной туманности M_{PN} с массой ее ядра (ЯПТ) M_{PNN} :

$$M_{PN} \approx b(1,69 - 8,09 M_{PNN} + 11,69 M_{PNN}^2 - 4,34 M_{PNN}^3). \quad (33.24)$$

Здесь $b = 0,5 \div 1$ — эмпирический коэффициент. В процессе эволюции звезды на АВГ со спокойной потерей массы M_c растет, а масса водородной оболочки M_e падает. Когда достигается равенство $M_e = M_{PN}$, предполагается быстрый сброс оболочки, которая позже, после освещения ее горячей центральной звездой с массой M_{PNN} , превратится в планетарную туманность. Если для $\dot{M}$ использовать (33.23), то с учетом (33.24) можно найти максимальное значение $\dot{M}$ в ходе эволюции для спокойного истечения в зависимости от начальной массы звезды M_i . Эта зависимость приведена на рис. 77 из [423]. Для масс M_i перед пиком на рис. 77 при $M_i < M_W$ спокойное истечение кончается сверхветром, который начинается при $M_e = M_{PN}$ из (33.24). В пике $M_i = M_W$ ядро успевает в точке быстрого сброса достичь массы $M_{Ch} = 1,39 M_{\odot}$, при которой начинается взрывное горение углерода. Для больших масс $M_i > M_W$ равенство $M_c = M_{Ch}$ достигается раньше, чем равенство $M_e = M_{PN}$. В этом случае стадия спокойного истечения заканчивается загоранием углерода, максимальная $\dot{M}$ спокойного истечения падает с ростом M_i из-за роста gR в (33.23) при том же L .

С учетом потери вещества трек на рис. 76 описывает эволюцию звезды с массой $\sim 2 M_{\odot}$. При этом $\sim 1,2 M_{\odot}$ звезда теряет спокойно, а затем по достижении $M_e = M_{PN}$ быстро сбрасывается $\sim 0,2 M_{\odot}$. С учетом быстрого сброса время эволюции от его начала до появления звезды на горизонтальной части трека может быть существенно меньше времени, указанного на рис. 76, которое определяется скоростью выгорания водорода.

Звезда с $M_i > M_W$ должна заканчивать эволюцию развитием тепловой неустойчивости и взрывным процессом (возможно сверхновой); белые карлики получаются, в основном, при $M_i < M_W$. В [423] приве-

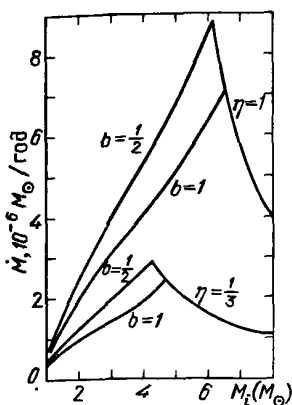


Рис. 77. Максимальная скорость "спокойной" потери массы $\dot{M}$ звездой с начальным составом $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,02$ на АВГ, достигаемая перед загоранием углерода и взрывом при $M_c = M_{Ch}$ для $M_i > M_W$ (M_W — масса, соответствующая пику) или перед быстрым сбросом оболочки и образованием белого карлика для $M_i < M_W$; $\dot{M}$ вычислялась по формуле (33.23), а быстрый сброс оболочки происходит, когда ее масса падает до $M_e = M_{PN}$ из (33.24). Величина M_W зависит от начального состава, неопределенностей в формулах (33.23) и (33.24) для $\dot{M}$ и M_{PN} , а также других факторов, указанных в § 31, из [423]

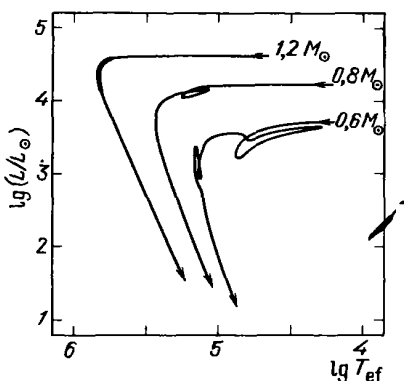


Рис. 78. Эволюционные треки моделей звезд с массами 0,6, 0,8 и $1,2 M_{\odot}$, проходящих стадию планетарных туманностей, из [525]

дена зависимость массы белого карлика M_f от начальной массы звезды M_i и параметра η из (33.23) для $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,02$

$$M_f \approx 0,53\eta^{-0,082} + 0,15\eta^{-0,35} (M_i - 1). \quad (33.25)$$

Значение M_W есть M_i из (33.25) при $M_f = M_{Ch} = 1,39 M_{\odot}$ и определяется, (с учетом зависимости от b), формулой [423]

$$M_W = 1,0 + 9,33\eta^{0,35} - 3,53\eta^{0,27} + 0,8(b - 1,0).$$

Отсюда имеем $M_W/M_{\odot} = 4,7, 4,3, 8$ для $(\eta, b) = (1/3, 1); (1/3, 1/2); (2, 1)$. Наблюдениям лучше соответствует значение $M_W = 8 M_{\odot}$ (см. п. д), однако значение $\eta = 2$ приводит к отсутствию гигантов при $M_i \leq 1,15 M_{\odot}$, что противоречит их наблюдениям. Подобное противоречие свидетельствует, видимо, о грубости формулы (33.23) с $\eta = \text{const}$ при эволюции. Учет переменности η или использование других, более точных и сложных формул для $\dot{M}$ должны привести к непротиворечивому значению $M_W = 8 M_{\odot}$.

Один из первых эволюционных расчетов от АВГ к белому карлику был сделан в работе [552], где рассматривалась эволюция звезды постоянной массы $M = M_i = 0,85 M_{\odot}$; $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,29$, $x_Z = 0,01$, $l = 0,7 H_P$. Подавление ТВ достигалось за счет пренебрежения горением гелия в слоевом источнике.

Более реалистическое рассмотрение, в котором учитывалась предшествующая потеря массы, было сделано Пачинским в [521, 525]. В этих работах проводился расчет эволюции звезд с $M_c = 0,6, 0,8$ и $1,2 M_{\odot}$, окруженных

водородными оболочками с $M_e = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $1,4 \cdot 10^{-4}$ и $4 \cdot 10^{-6} M_\odot$ соответственно, т.е. практически голых ядер. Расчет проводился обычным методом Хенри (§ 22) без требования стационарности (п.в.) для начального состава $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,27$, $x_Z = 0,03$ при $l = H_p$. Логарифмы эффективных температур начальных моделей произвольно выбирались равными 4,191, 4,202 и 4,728 соответственно. На основе [536], где рассматривалась роль энергии ионизации в сбросе оболочки, предполагалось, что начальные массы звезд равнялись, соответственно, 0,8, 1,5 и $3,0 M_\odot$, однако эта последняя связь весьма неопределенна. Полученные в результате расчетов эволюционные треки представлены на рис. 78 из [525]. Выбранные массы оболочек были столь малыми, что модели сразу отправились в область белых карликов, но по пути испытали по одной вспышке в гелиевом слоевом источнике. Эта последняя вспышка, открытая в [521, 525], сопровождается быстрым петлеобразным движением звезды на ГР диаграмме, особенно заметным на треке звезды с $M = 0,6 M_\odot$. Стадия расширения от левого конца петли к правому длится несколько сот лет, а возвращение на старое место $\sim 10^3$ лет. Наблюдаемые быстрые изменения (уменьшение T_e) у звезды FG Стрелы (Sagittae) связывались в [521, 525] с проявлением этой вспышки.

После расчетов Пачиньского, последняя вспышка на пути движения звезды от АВГ к белым карликам исследовалась многими авторами [599, 563, 422, 565]. Пример трека приведен на рис. 79 из [422] с указанием временного хода. Детальное изучение формы последней вспышки в зависимости от точки на эволюционном треке (фаза выброса), где начинается быстрый сброс оболочки (сверхветер), формирующий планетарную туманность, а также от массы водородной оболочки, оставшейся после окончания сверхветра, проведено в работах [420, 636]. Треки эти весьма разнообразны, что отмечалось также в [563]. Ожидаемая случайность в распределении по фазам выброса и оставшимся массам оболочек делает допустимыми любые из эволюционных треков звезд во время последней вспышки, полученных в [420, 636].

Эволюционный расчет с учетом эмпирической зависимости для $\dot{M}$, аналогичный расчетам для звезд большой массы (§ 32, п.г), впервые выполнен в работе [387]. Было исследовано влияние на эволюцию быстрой потери массы $\sim 10^{-3} M_\odot/\text{год}$, начинающейся в максимуме одной из ТП. За короткое время от звезды в $1 M_\odot$ остается ядро с массой $0,65 M_\odot$. Это ядро в процессе дальнейшей эволюции оставалось очень ярким ($\geq 10^3 L_\odot$) в течение времени, существенно превышающего времени жизни известных планетарных туманностей. Эволюционные расчеты для более реалистичных законов потери массы при переходе от АВГ к белым карликам проводились в [563, 565]. Сравнение расчетов с наблюдениями ядер планетарных туманностей проведено в [564, 566]. В работе [565] рассчитывалась эволюция звезд с $M = 0,8$ и $1 M_\odot$ с начальным составом $x_H = 0,739$, $x_{He} = 0,240$, $x_Z = 0,021$ от АВГ к белым карликам с учетом спокойной и быстрой стадий потери массы. Для получения остатков с массой $M < 0,6 M_\odot$ начало быстрой потери массы задавалось достаточно рано, при $L = 1400 L_\odot$ для $M = 0,8 M_\odot$ до наступления ТВ и при $L = 4500 L_\odot$ для $M = 1 M_\odot$ после пятой ТВ. На рис. 80 приведена зависимость $\dot{M}(T_{ef})$, принятая в расчетах, вместе

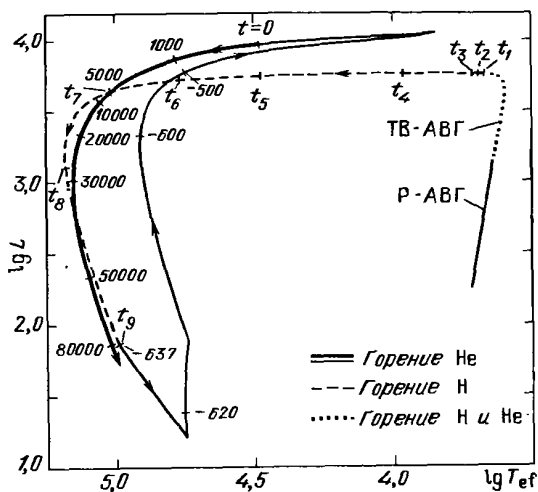


Рис. 79. Последняя гелиевая вспышка в звезде с $M = 0,6 M_{\odot}$, представленная петлей не ГР диаграмме, началу вспышки соответствует момент времени $t = -637$ лет. Приведен также трек, предшествующий вспышке, начиная с Р-АВГ (см. рис. 76). Времена t_i на этом треке те же, что и в подписи к рис. 76, из [422]

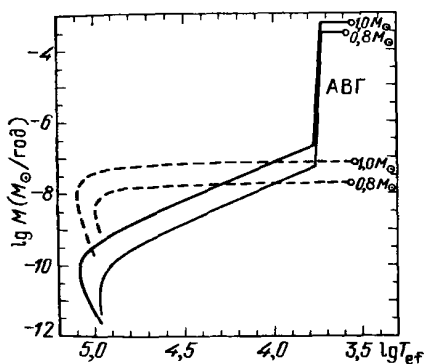


Рис. 80. Принимаемая в расчетах [565] скорость потери массы $|\dot{M}|$ в зависимости от T_{ef} (сплошные линии). Для сравнения дана скорость роста ядра $\dot{M}_c$ из-за горения водорода (штриховые линии)

со скоростью роста ядра $\dot{M}_c$. При $T_{\text{ef}} < 10^{3,7}$ К принималось $\dot{M} = (2 \div 4) \cdot 10^{-4} M_{\odot}/\text{год}$, а при большей T_{ef} использовался закон Реймерса (33.23) с $\eta = 1$.

Результаты расчетов представлены на рис. 81. Из-за быстрой потери массы модели движутся влево на ГР диаграмме. Слабые отклонения от теплового равновесия вызывают небольшой спад светимости ($\sim 20\%$ для $0,8 M_{\odot}$). Быстрая потеря массы длится $\sim 10^3$ лет, после чего остаются звезды с массами $0,546$ и $0,565 M_{\odot}$ от $0,8$ и $1 M_{\odot}$ соответственно, т.е. практически голые ядра, эволюционирующие в белые карлики. Из сравнения времен остывания для двух моделей на рис. 81 следует очень сильная зависимость от конечной массы. Увеличение массы на $0,019 M_{\odot}$ ведет к уменьшению времени остывания в ~ 20 раз (см. также [563, 525], рис. 76, 79).

Линейная связь (33.14) или (33.16) и между L и M_c непригодна для $M_c < 0,6 M_{\odot}$, так как горение гелия здесь дает существенный вклад в светимость: $\sim 30\%$ для $0,546 M_{\odot}$. Для малых ядер не выполняется

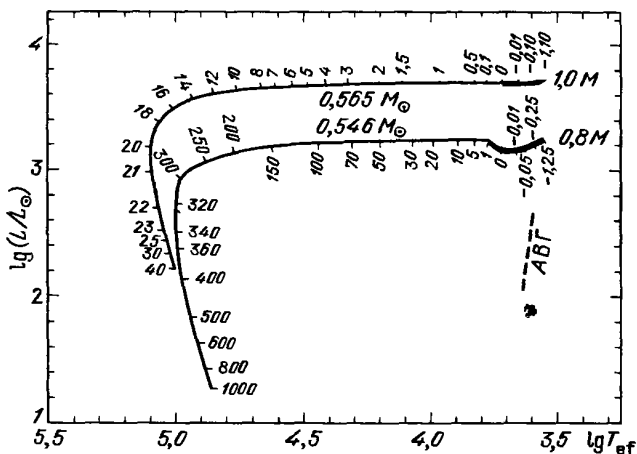


Рис. 81. Эволюционные треки звезд при движении от АВГ к белому карлику из [565]. Числа указывают возраст модели в 10^3 лет, начало отсчета соответствует $T = 5000$ К. Жирные части кривых соответствуют стадиям быстрой потери массы. Указаны начальные (справа) и конечные массы звезд

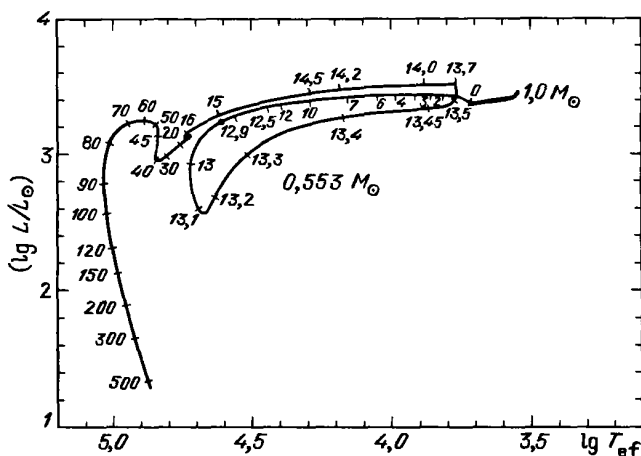


Рис. 82. То же, что на рис. 81 при конечной массе $0,553 M_{\odot}$, где последняя гелиевая вспышка происходит вдали от АВГ (см. рис. 79). Точке $\bullet$ соответствует максимальная скорость горения гелия с $L_{\text{He}} = 6,3 \cdot 10^4 L_{\odot}$. Видна также маленькая петля, соответствующая при $T_{\text{eff}} = 5 \cdot 10^4$ К малой дополнительной гелиевой вспышке с $L_{\text{He}} < 1,8 \cdot 10^3 L_{\odot}$, из [565]

также соотношение (33.19) для $\Delta t_{\text{ТВ}}$. Для $M_c = 0,56 M_\odot$ время между вспышками составляет $\sim 7 \cdot 10^4$ лет и увеличивается до $\sim 10^5$ лет при $M_c = 0,57 \div 0,58 M_\odot$. Только для больших M_c время $\Delta t_{\text{ТВ}}$ уменьшается с ростом M_c по закону (33.19).

Помимо треков на рис. 80в [565] получен также трек с последней ТВ, дающей петлю на ГР диаграмме, путем небольшого изменения начальных условий. Этот трек, приведенный на рис. 82, возникает, когда результатом действия сверхветра при эволюции звезды с $M = 1 M_\odot$ является остаток массы $0,553 M_\odot$.

Факт появления петли на ГР диаграмме зависит от фазы между двумя последовательными ТВ, на которой звезда начинает отходить от АВГ. Если эта фаза соответствует моменту вскоре после очередной ТВ, то звезда имеет запас времени до следующей ТВ, в течение которого водородная оболочка через слоевой источник перейдет в ядро и ТВ не возникает. Если же отход от АВГ совершается недалеко от очередной ТВ, то водородная оболочка не успевает спокойно перейти в ядро и возникает явление последней вспышки. Вероятность появления последней вспышки для звезд, ушедших с АВГ, оценивается в 20% в [565]. Помимо возможности интерпретации явлений, наблюдаемых в звезде FG Sge, последняя вспышка может вызвать дополнительное перемешивание из-за развития конвекции и обогащение поверхностных слоев гелием, что наблюдается в ядрах планетарных туманностей A 30 и A 78 [422, 565, 420], а также может увести звезду в область малых T_{ef} и вызвать сброс второй оболочки меньшей массы в режиме сверхветра [420].

ж) О перемешивании на АВГ и вблизи нее. В теории звездной эволюции проблемы конвекции и вызванного ею перемешивания относятся к числу самых трудных и неопределенных. Это связано с отсутствием надежной теории конвекции и далеко идущими упрощениями при ее описании в эволюционных задачах. Обычно в центральных областях звезды, включая слоевые источники, используется приближение адиабатической конвекции и не рассматриваются эффекты не только нестационарности и проникновения, но и неадиабатичности. Обычно выводы, связанные с развитием конвекции и перемешиванием, проверяются наблюдательно и считаются удовлетворительными при подтверждении какого-либо наблюдательного факта, связанного в основном с химическим составом звездных атмосфер.

Излагаемые ниже результаты являются в этом смысле удовлетворительными, однако следует иметь в виду, что теория, из которой эти результаты получены, весьма ненадежна, а возможность объяснения тех же наблюдательных данных другой теоретической моделью встречается довольно часто.

Основным механизмом перемешивания, приводящим к обогащению внешних слоев звезды тяжелыми элементами, является проникновение конвекции из оболочки вглубь звезды. Первое перемешивание имеет место после исчерпания водорода в центральном ядре и перехода звезды в область красных гигантов для звезд с начальными массами M_i , равными [423]

$$M_i < M_i^{\text{max}} = 8,95 + 69,4(x_Z - 0,02) - 31,3(x_{\text{He}} - 0,28)(M_\odot). \quad (33.26)$$

Второе перемешивание наступает после исчерпания гелия в центре при выходе на АВГ для звезд с начальными массами M_i , равными [423]

$$M_i > M_i^{\text{min}} = 4,59 + 82,5(x_Z - 0,02) - 6,88(x_{\text{He}} - 0,28)(M_\odot). \quad (33.27)$$

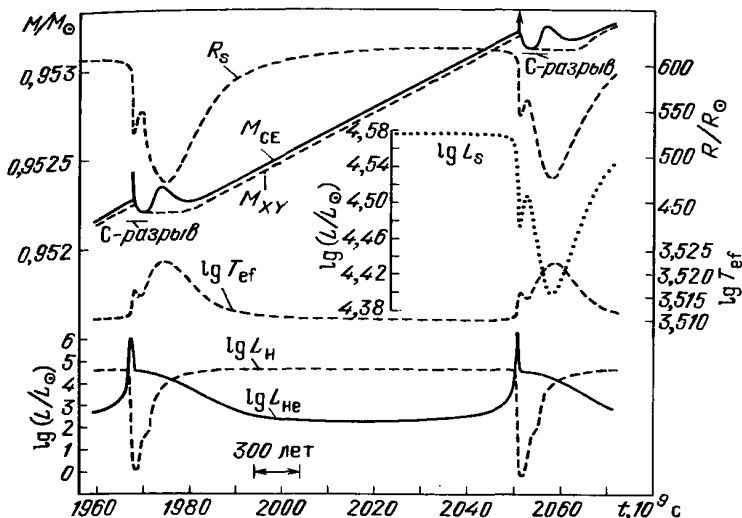


Рис. 84. Временные изменения параметров звезды с $M = 7 M_{\odot}$ и начальным составом $x_H = 0,7$, $x_{He} = 0,28$, $x_Z = 0,02$ при эволюции на стадии АВГ между седьмой и восьмой тепловыми вспышками (ТП-АВГ), L_H , L_{He} — скорости выделения энергии при горении водорода и гелия, L_s , R_s — светимость и радиус звезды, T_{ef} — эффективная температура, M_{XY} — масса ядра, где отсутствует водород, M_{CE} — масса внутри конвективной оболочки, C-разрыв определяет массу ядра, где отсутствует гелий, из [416, 423]

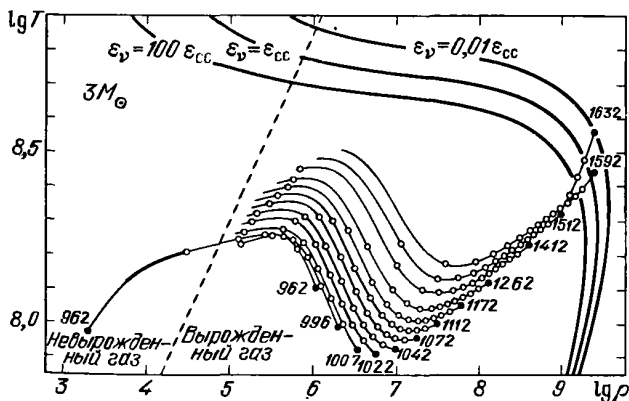


Рис. 85. Эволюция углеродно-кислородного ядра звезды с $M = 3 M_{\odot}$ на плоскости $\lg T - \lg \rho$. Каждая модель представлена линией с номером, кружки разделяют массовые слои с $0,1 M_{\odot}$. Положение гелиевого слоевого источника отмечено жирным отрезком. Указаны также линии с постоянным отношением $\epsilon_{\nu}/\epsilon_{CC}$, ϵ_{ν} — скорость нейтринных потерь, ϵ_{CC} — скорость выделения энергии при горении ^{12}C для $x_{^{12}C} = 0,5$. Углерод загорается, когда линия модели пересечет линию $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{CC}$, из [524]

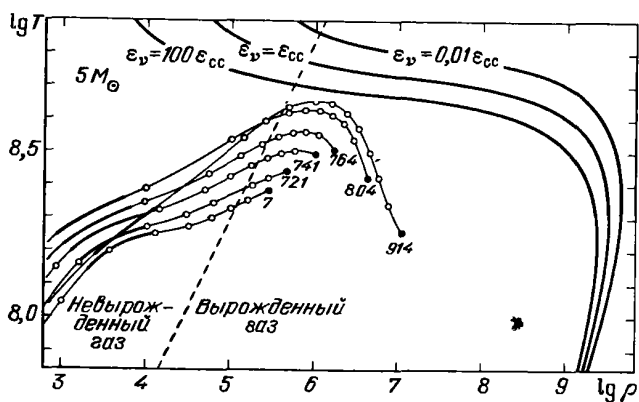


Рис. 86. То же, что на рис. 85 для $M = 5 M_{\odot}$, из [524]

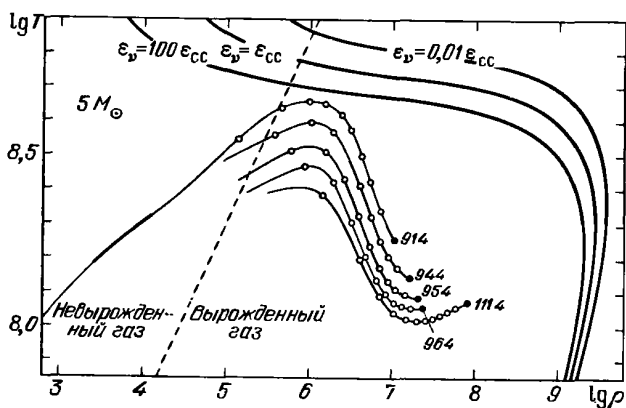


Рис. 87. То же, что на рис. 85 для $M = 5 M_{\odot}$, из [524]

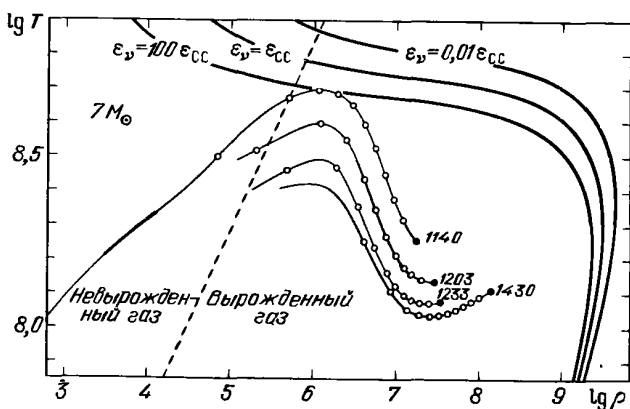


Рис. 88. То же, что на рис. 85 для $M = 7 M_{\odot}$, из [524]

[418], где конвективная оболочка проникает в область, занимаемую ранее конвективным слоем, на глубину $\Delta_d = 3,9 \cdot 10^{-4} M_\odot$. Изменение параметров во время ТВ с перемешиванием данного типа на звезде с $M = 7 M_\odot$ приведено на рис. 84 из [416].

Следует отметить, что количественные характеристики перемешивания и сам факт его в различные фазы эволюции сильно зависят от принятых параметров, например пути перемешивания l , непрозрачности, скоростей реакций. Сильное влияние могут оказать учет неадиабатичности конвекции в слое, нелокальность и проникновение конвекции в устойчивую область. Имеются также расхождения при описании пересечения конвективной зонной границы с разрывом химического состава [561]. Приведенный здесь вариант перемешивания считается удовлетворительным, так как дает наблюдательные следствия, близкие к реальности [423].

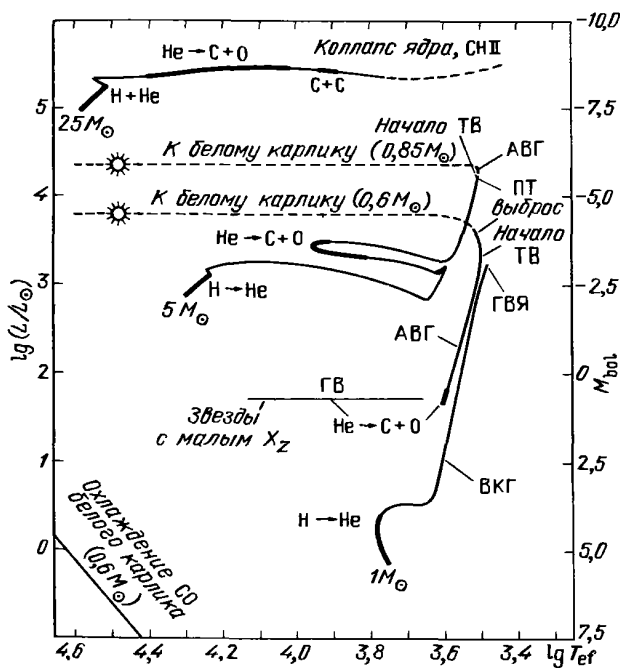


Рис. 89. Огрубленные эволюционные треки звезд с $M_i = 1, 5, 25 M_\odot$. Жирные отрезки соответствуют основным стадиям горения в ядре. Для $M_i < 2,3 M_\odot$ происходит ГВЯ (гелиевая вспышка в ядре), после чего начинается спокойное горение ${}^4\text{He}$. После выгорания ${}^4\text{He}$ в ядре звезды переходит на Р-АВГ (ранняя асимптотическая ветвь гигантов). Когда ядро, свободное от ${}^4\text{He}$ достигает массы $\sim 0,53 M_\odot$ начинаются ТВ (тепловые вспышки в слоевом источнике ${}^4\text{He}$). На стадии АВГ происходит потеря массы, которая заканчивается быстрым сбросом остатка водородной оболочки в виде ПТ (планетарной туманности). СО ядро с $M_f \approx 0,6 M_\odot$ превращается в белый карлик. Эволюция более массивных звезд с $M_i \leq 9 M_\odot$ на стадии АВГ и дальше происходит аналогично, M_f растет с ростом M_i и равно $\sim 1,08 M_\odot$ при $M_i = 8,8 M_\odot$. Знаком $\odot$ отмечено начало свечения планетарной туманности, когда T_{ef} звезды достигает $3 \cdot 10^4$ К и начинается ионизация газа в ПТ, из [421]

з) Тепловая неустойчивость в вырожденном углеродном ядре. Если углеродное ядро звезды на АВГ достигает массы чандрасекаровского предела $\sim 1,39 M_{\odot}$ (см. § 40), то давление вырожденных электронов уже не в силах поддерживать равновесие. Ядро начинает сжиматься, температура в нем вырастает до температуры загорания углерода и ввиду вырождения происходит тепловая вспышка, которая при определенных условиях может выделить энергию порядка энергии сверхновой. Момент загорания углерода определяется конкуренцией между выделением тепла в реакции $^{12}\text{C} (^{12}\text{C}, \gamma) ^{24}\text{Mg}$ и потерями энергии за счет излучения нейтрино, в основном, плазменных. Эволюционные изменения моделей без потери массы до загорания ^{12}C для масс $M = 3, 5, 7 M_{\odot}$ приведены на рис. 85–88 из [524]. Во всех моделях линия $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\text{CC}}$ (см. (15.1) и § 19 пп. в, г), которую естественно считать началом тепловой неустойчивости, пересекается сначала в центре звезды, хотя для $7 M_{\odot}$ периферийные области были близки от нее (рис. 88). Структура ядер на момент начала неустойчивости у всех звезд примерно одинакова и дана в табл. 43 из [524].

Т а б л и ц а 43

Модели углеродно-кислородных ядер с массой $1,4 M_{\odot}$ для моделей звезд в 3, 5, 7 $M_{\odot}$ в момент загорания углерода, из [524]

Номер зоны	$M_r/M_{\odot}$	$r/0,001R_{\odot}$	$L_r/L_{\odot}$	$\lg T$	$\lg \rho$
Центр	0,0	0	0	8,443	9,428
2	0,0017	0,097	1,05	8,438	9,420
11	0,0065	0,152	1,86	8,431	9,408
18	0,0181	0,216	0,23	8,418	9,388
25	0,0489	0,306	0,26	8,405	9,348
31	0,110	0,414	0,47	8,390	9,285
36	0,208	0,531	0,80	8,372	9,199
39	0,295	0,617	1,13	8,357	9,125
42	0,408	0,717	1,49	8,338	9,031
44	0,498	0,792	1,72	8,323	8,953
46	0,598	0,876	2,04	8,306	8,863
48	0,706	0,968	2,20	8,287	8,759
50	0,818	1,070	2,51	8,265	8,638
52	0,923	1,175	2,51	8,243	8,507
54	1,014	1,277	2,55	8,222	8,377
56	1,089	1,376	2,47	8,204	8,247
57	1,123	1,424	2,29	8,195	8,182
60	1,205	1,566	1,67	8,175	7,987
63	1,265	1,702	0,32	8,165	7,792
66	1,307	1,831	-2,26	8,172	7,597
72	1,3513	2,032	-13,72	8,240	7,269
76	1,3620	2,105	-21,97	8,288	7,140
81	1,3705	2,179	-32,40	8,348	6,999
86	1,3793	2,285	-42,16	8,436	6,777
94	1,3849	2,393	-29,35	8,496	6,517
106	1,3872	2,460	-6,80	8,511	6,327
	1,3903	3,4	200	8,40	4,95

Н и He слоевые источники

1,3904 8,4 5,21 (4) 7,0 -3,5

Увеличение нейтринной светимости за счет урка-оболочек (см. § 19) может существенно изменить характер развития неустойчивости. Согласно упрощенной модели [349] урка-оболочки могут привести к истощению углерода в центре вырожденного ядра звезды спокойным образом.

В заключение главы приведем рис. 89, взятый из [421], где дана полусхематическая общая картина эволюции звезд различной массы от главной последовательности до образования белого карлика, или взрыва сверхновой.

ГЛАВА 10

КОЛЛАПС И СВЕРХНОВЫЕ

Взрывы сверхновых являются самыми грандиозными событиями в мире звезд. Время выделения основной доли энергии (≤ 1 с) очень мало не только по меркам звездной, но и человеческой жизни, а количество ее на порядок и более превышает энергию, излученную звездой за все время ее существования, достигающего $\sim 10^{10}$ лет для звезд типа Солнца. При образовании нейтронной звезды основная доля ($\geq 99\%$) энергии вылетает в виде труднаблюдаемых нейтрино.

Вспышкой сверхновой заканчивают существование большинство массивных звезд с $M > 8 M_{\odot}$. Сама вспышка является результатом либо развития тепловой неустойчивости в вырожденном ядре, либо результатом выделения гравитационной и части ядерной энергий при коллапсе с образованием нейтронной звезды. Существенную роль в преобразовании гравитационной энергии в энергию наблюдаемой вспышки может играть вращение и магнитное поле. Небольшая часть звезд (наиболее массивные) видимо заканчивает свое существование коллапсом с образованием черной дыры. В этом случае коллапс может быть "беззвучным" и не сопровождаться вспышкой сверхновой.

Исследованию сверхновых, как наблюдательному, так и теоретическому, посвящена огромная литература, охватить которую здесь не представляется возможным. Наблюдения различают сверхновые I типа (СН I), в спектре которых не видно водорода, а имеются многочисленные линии поглощения различных тяжелых элементов, и сверхновые II типа (СН II), в которых много водорода и химический состав близок к нормальному. Установлено также, что СН II являются результатом эволюции массивных звезд, а прародителями СН I были звезды менее массивные, многие вспышки СН I, возможно, происходят в двойных системах. Считается, хотя и не с полной достоверностью, что пульсары рождаются в результате вспышек СН II, а СН I сопровождается полным разлетом звезды. Такое положение позволяет допустить, что СН I являются продуктом ядерного взрыва, а СН II — результатом гидродинамического коллапса.

Наличие водорода в спектрах СН II свидетельствует о том, что взрыв произошел до потери звездой водородной оболочки. Форма кривой блеска указывает на то, что перед взрывом эта оболочка была чрезвычайно протяженной, $10^3 - 10^4 R_{\odot}$ [116]. Наблюдения СН 1987А в Большом Магелла-

новом Облаке, первой за более чем 300 лет видимой простым глазом, показывают возможность взрыва СНІ в достаточно компактной звезде, являющейся голубым сверхгигантом. Кривая блеска СНІ987А требует продолжительного выделения энергии после основного взрыва. Разнообразие кривых блеска СНІ существенно больше, чем у СНІ [596].

Отсутствие водорода в спектрах СНІ указывает на потерю звездой водородной оболочки в процессе эволюции до взрыва и на компактность предсверхновой звезды. Форма кривой блеска у СНІ объясняется, если излучаемая энергия обеспечивается радиоактивным распадом ${}^{56}_{28}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe}$, причем для обеспечения энергетики свечения требуется $M_{{}^{56}\text{Ni}} = 0,3 - 1,1 M_{\odot}$ [640]. Медленное выделение энергии в течение двух — двадцати дней обеспечивает длительную фазу максимума блеска (10 — 20 дней) в компактной звездной модели [116].

Точная связь СНІ и СНІІ с массами исходных звезд, с механизмами взрыва и с результирующими остатками надежно не установлена. Новые наблюдательные данные могут заставить нас изменить сложившиеся на сегодня модельные представления. Различные аспекты проблемы сверхновых, связанные с наблюдениями и их интерпретацией изложены в книге [234].

Изложенный в данной главе материал в какой-то мере субъективен и связан с научными интересами автора.

Рассмотренные в 1-й части настоящей книги физические процессы — ядерные реакции, нейтринные процессы и т.д. — протекают при взрыве сверхновой и при коллапсе, как и на спокойных эволюционных фазах. Отличие теории сверхновых от теории эволюции состоит в использовании нестационарных гидродинамических уравнений вместо уравнений гидростатики, в продвижении в область более высоких значений температуры и плотности, решающей роли нейтринных процессов. Несмотря на большие усилия, теория сверхновых даже в сферически-симметричном приближении еще далека от завершения, ввиду больших численных трудностей и трудностей принципиального характера, связанных с нестационарной конвекцией и уравнением состояния вещества при плотностях, больше ядерной.

§ 34. Модели предсверхновых

Как уже отмечалось выше, сверхновая есть результат развития гидродинамической или тепловой неустойчивости.

а) Звездные ядра на пороге гидродинамической устойчивости. Энергетический метод. Рассмотрим политропные звезды с $P = K\rho^{\gamma}$. Из уравнений равновесия (22.1) и неразрывности (22.2) получаем уравнение для функции $\rho(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left[K \gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G \rho r^2. \quad (34.1)$$

Вводя безразмерные переменные θ и ξ

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad r = \alpha \xi, \quad \alpha = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \right]^{1/2}, \quad (34.2)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n},$$

получим уравнение равновесия Лэна-Эмдена (см. [218])

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (34.3)$$

с граничными условиями

$$\theta = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (34.4)$$

Граница звезды соответствует $\xi = \xi_1$, так что $\theta(\xi_1) = 0$. Масса звезды M выражается через переменные (34.2) в виде

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = 4\pi \rho_c \alpha^3 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi = \\ &= 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \frac{3}{\rho_c^{2n}} - \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi. \end{aligned} \quad (34.5)$$

Из (34.3) следует соотношение

$$\int_0^{\xi} \theta^n \xi^2 d\xi = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}, \quad -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = M_n. \quad (34.6)$$

Очевидно, что при $n = 3$, $\gamma = 4/3$ масса звезды не зависит от ρ_c и однозначно определяется константой K в уравнении состояния. При $\gamma > 4/3$ масса звезды растет с ростом ρ_c , а при $\gamma < 4/3$ — падает. Если показатель политропы совпадает с показателем адиабаты $\gamma = \gamma_{ad}$, то при $\gamma > 4/3$ звезда устойчива, при $\gamma < 4/3$ неустойчива, а случай $\gamma = 4/3$ является граничным и соответствует безразличному равновесию.

Реальная звезда не является политропной, но на границе устойчивости приближенно сохраняется условие $\gamma = 4/3$, если под γ понимать соответствующим образом усредненную по звезде величину показателя адиабаты.

Строгий вывод условий устойчивости проводится с помощью вариационного метода в гл. 13. Равенство нулю первой вариации приводит к уравнению равновесия, а для устойчивости необходима положительность второй вариации. В политропной изэнтропической звезде с $\gamma = 4/3$ ρ_c произвольно, а распределение плотности $\theta(\xi)$ инвариантно относительно гомологического сжатия или расширения. Будем считать эти свойства приближенно справедливыми и в том случае, когда $\gamma = 4/3$ лишь в среднем. Выведем тогда условия равновесия и устойчивости с помощью упрощенного вариационного метода в предположении гомологичности и сохранении структуры звезды при вариациях плотности [109], который обычно называется энергетическим. Запишем полную энергию мгновенно статической звезды, являющейся аналогом потенциальной энергии консервативной механической системы:

$$\epsilon = \int_0^M E(\rho, T) dm - \int_0^M \frac{G m dm}{r} - 5,06 \frac{G^2 M^3}{R^2 c^2}, \quad (34.7)$$

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr.$$

Здесь первый член есть внутренняя энергия $\epsilon_{\text{вн}}$, второй — ньютоновская гравитационная ϵ_G , а третий $\epsilon_{\text{ОТО}}$ — малая $\left(\frac{r_g}{r} = \frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1\right)$ — поправка за счет общей теории относительности (ОТО), вычисленная для распределения вещества по политропе $n = 3$ в [109] (см. § 42).

Член с ньютоновской гравитационной энергией равновесной звезды вычисляется явно для произвольного уравнения состояния [145]. Из уравнения равновесия (22.1) следует

$$\epsilon_G = -G \int_0^m \frac{mdm}{r} = 4\pi \int_{P_c}^0 r^3 dP = -12\pi \int_0^R Pr^2 dr = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm. \quad (34.8)$$

Формальное интегрирование уравнения равновесия

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{d\varphi_G}{dr} = 0 \quad (34.9)$$

приводит к интегральному соотношению

$$(n+1) \frac{P}{\rho} + \varphi_G = -\frac{GM}{R}. \quad (34.10)$$

Константа справа следует из условия $P/\rho = 0$ на границе звезды и нормировки $\varphi_G = 0$ при $r = \infty$. Вычислим ϵ_G из другой формы записи, учтя (34.8)–(34.10):

$$\begin{aligned} \epsilon_G &= \frac{1}{2} \int_0^M \varphi_G dm = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{n+1}{2} \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = \\ &= -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{6} \epsilon_G. \end{aligned} \quad (34.11)$$

Из (34.11) следует

$$\epsilon_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (34.12)$$

Для адиабаты с $\gamma = \gamma_{\text{ад}}$ имеем $E = n \frac{P}{\rho}$ и из (34.8)–(34.12) для звезды в равновесии следуют равенства

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{вн}} &= -\frac{n}{3} \epsilon_G = \frac{n}{5-n} \frac{GM^2}{R}, \\ \epsilon_{\text{н}} &= \epsilon_{\text{вн}} + \epsilon_G = \frac{n-3}{5-n} \frac{GM^2}{R}, \end{aligned} \quad (34.13)$$

где ϵ_H — полная энергия ньютоновской звезды. Полная энергия устойчивой звезды отрицательна, поэтому для устойчивости необходимо $n < 3$, $\gamma > 4/3$. Радиус политропной звезды с учетом (34.2), (34.5), (34.6) равен

$$R = \alpha \xi_1 = \left[\frac{(n+1)}{4\pi G} K \right]^{1/2} \rho_c^{-1/2n} \xi_1 = \\ = \left(\frac{\xi_1^3}{4\pi M_n} \right)^{1/3} M^{1/3} \rho_c^{-1/3} = \frac{M^{1/3} \rho_c^{-1/3}}{0,426}. \quad (34.14)$$

Здесь использованы значения для политропы $n = 3$ (см. [218] и задачу к данному §): $\xi_1 = 6,89685$, $M_3 = 2,01824$. При этом отношение ρ_c к средней плотности $\bar{\rho} \left(M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R^3 \right)$ есть

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(0,426)^3} = 54,18.$$

Из (34.14) и (34.12) следует [109]

$$\epsilon_G = -0,639 GM^{5/3} \rho_c^{1/3}, \quad (34.15)$$

а из (34.7) получаем

$$\epsilon_{\text{ОТО}} = -0,918 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}. \quad (34.16)$$

При гомологических вариациях меняется только один параметр, $\rho_c^{1/3}$ или R :

$$\rho = \rho_c \varphi \left(\frac{m}{M} \right), \quad \varphi \left(\frac{m}{M} \right) - \text{неизменная функция}, \quad (34.17)$$

поэтому вариации энергии сводятся к обыкновенным производным. С учетом (34.15) — (34.17) имеем из (34.7) условие равновесия, считая энтропию при вариациях постоянной

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_c^{1/3}} = 3 \rho_c^{-4/3} \int_0^M P \frac{dm}{\varphi \left(\frac{m}{M} \right)} - 0,639 GM^{5/3} - \\ - 1,84 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{1/3} = 0. \quad (34.18)$$

На границе устойчивости обращается в нуль вторая производная от энергии

при $S = \text{const}$:

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{(\partial \rho_c^{1/3})^2} = 9 \rho_c^{-5/3} \int_0^M \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) P \frac{dm}{\varphi(m/M)} - 1,84 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} = 0. \quad (34.19)$$

Здесь использованы термодинамические соотношения (см. § 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \rho_c^{1/3}} &= \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_S \frac{\partial \rho}{\partial \rho_c} \cdot 3 \rho_c^{2/3} = \frac{P}{\rho^2} \varphi(m/M) 3 \rho_c^{2/3} = \\ &= 3 \frac{P}{\varphi\left(\frac{m}{M}\right)} \rho_c^{-4/3}, \end{aligned} \quad (34.20)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho_c^{1/3}} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \varphi\left(\frac{m}{M}\right) 3 \rho_c^{2/3} = 3 \gamma P \rho_c^{-1/3}, \quad \gamma \equiv \gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S.$$

Уравнения (34.18), (34.19) получены в работе [24] и использовались для определения границы устойчивости различных звездных моделей.

Для холодных звезд критическая масса минимальна. При малой температуре электроны вблизи критической точки близки к вырождению и ультрарелятивизму. Ядра при этом можно считать невырожденными. Температура по звезде близка к постоянной, ввиду большой теплопроводности вырожденных электронов (см. § 8). Такие звезды называются белыми карликами (см. § 40). Используя (2.33), запишем уравнение состояния в виде (без учета кулоновских поправок)

$$\begin{aligned} P &= \frac{m_e^4 c^5}{12 \pi^2 \hbar^3} y^4 \left(1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2} + \frac{4}{Z\alpha y} \right), \\ y &= \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu_Z m_u} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c}, \quad \alpha = \frac{m_e c^2}{kT} \end{aligned} \quad (34.21)$$

Здесь учтено давление невырожденных ядер. Для звезды, состоящей из железа ^{56}Fe при $\rho_c = 1,15 \cdot 10^9$ ($1,24 \cdot 10^9$) г · см⁻³ начинается нейтронизация (см. § 4, пп. а и д), ведущая к увеличению μ_Z при $A = \text{const}$ (см. (2.17)). С учетом последовательных электронных захватов при равновесной нейтронизации железа ^{56}Fe приближенно получаем [79, 55]

$$\mu_Z = \frac{56}{26} (1 + \nu y), \quad \nu = 6 \cdot 10^{-3}. \quad (34.22)$$

Вычисляя γ ($\equiv \gamma_1$ из (1.11)), получаем [24, 79, 55]

$$P(\gamma - 4/3) = \frac{m_e^4 c^5}{9 \pi^2 \hbar^3} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{\nu y^5}{3} + \frac{y^3}{Z\alpha} - \frac{\pi^2 y^2}{2\alpha^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\pi^2 Z}{\alpha y} \right)^{-1} \right]. \quad (34.23)$$

При этом изменение μ_Z учтено только в первом, основном члене давления в (34.21). Ввиду того что основной член в давлении соответствует $\gamma = 4/3$, нахождение критических параметров из уравнений (34.18), (34.19) является в данном случае асимптотически точной процедурой. Эволюционная последовательность $T(\rho_c)$ при данной массе M для излучающих сжимающихся изотермических звезд находится из (34.18) с учетом (34.21), а для нахождения критических параметров $\rho_{c,cr}$ и T_{cr} дополнительно используется (34.19) и (34.23). Без учета нейтронизации ($\nu = 0$) решение этих уравнений получено в [24]. Эволюционные кривые и критическая кривая для этого случая приведены на рис. 90. Учет нейтронизации сделан в [79, 55]. Равновесная нейтронизация приводит к потере устойчивости при плотности, примерно на порядок меньшей, чем ОТО, т.е. является основной причиной потери устойчивости. В реальности скорость электронных захватов достаточно мала, а нейтронизация протекает неравновесно (см. § 20), с характерным временем, которое вблизи границы устойчивости много больше гидродинамического и которое определяет скорость сжатия [56], (см. подробнее § 36). Неустойчивость за счет эффектов ОТО сразу ведет к гидродинамическому коллапсу. Для достаточно холодных звезд $\pi^2 Z / 6\alpha \mu \ll 1$ уравнения (34.18), (34.19) при $\nu = 0$ решаются приближенно аналитически с точностью $\sim 1\%$ [24, 56]

$$\rho_{c,cr} = 6,7 \cdot 10^9 \mu_Z^2 \left(1 + 17 \frac{\mu_Z^{4/3}}{\alpha A} \right) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3},$$

$$M_{cr}/M_\odot = \frac{5,83}{\mu_Z^2} \left(1 - \frac{0,046}{\mu_Z^{2/3}} + \frac{0,53 \mu_Z^{2/3}}{\alpha A} \right), \quad \alpha \gg 0,087 Z \mu_Z^{1/3}. \quad (34.24)$$

Критическая масса железных звезд при $T = 0$ из-за ОТО ($1,222 M_\odot$) несколько больше, чем при учете нейтронизации ($1,16 M_\odot$)*. Из сравнения плотности начала нейтронизации различных ядер с (34.24) видно (табл. 44), что углеродные и гелиевые белые карлики теряют устойчивость за счет эффектов ОТО. Влияние ОТО на устойчивость белых карликов впервые исследовано С.А. Капланом [121].

С ростом температуры, ввиду стабилизирующего действия нерелятивистских ядер, растут M_{cr} и $\rho_{c,cr}$. При $T = 1,4 \cdot 10^{10}$ К имеем $M_{cr} = 1,4 M_\odot$ для ^{56}Fe в ОТО. величина $\rho_{c,cr}$ достигает максимума $\sim 5,2 \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и уменьшается с дальнейшим ростом критической массы (рис. 90) [24].

Когда звезда становится невырожденной, будем рассматривать вместо изотермической звезды адиабатическую, возможно из-за действия конвекции. С ростом массы критическая энтропия звезды S_{cr} растет,

*) Это значение получается из (36.1) энергетическим методом при $T = 0$, $\rho_c = 1,24 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Точный расчет без кулоновских поправок в [56] приводит к критической массе холодного белого карлика из ^{56}Fe , равной $1,181 M_\odot$ для начала нейтронизации при $\rho_c = 1,15 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. При этом ядро новой фазы имеет конечную массу $m_{\pi} = 1,4 \cdot 10^{-3} M$. Увеличение массы ядра новой фазы от нуля до m_{π} сопровождается увеличением массы звезды $\Delta M = 0,15 m_{\pi}$ (см. (39.11)).

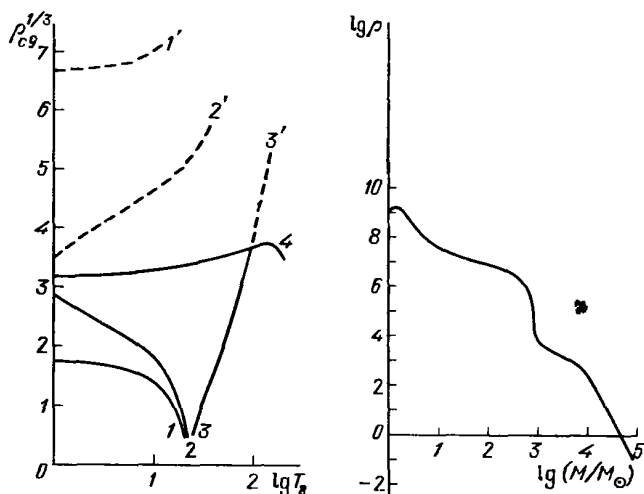


Рис. 90. Эволюционные кривые и критические состояния на плоскости $(\rho_{c9}^{1/3}, \lg T_8)$ с эффектами ОТО без нейтронизации, из [24]; 1, 2, 3 – эволюционные кривые для $M = 1,19, 1,20$ и $1,36 M_\odot$ соответственно. Штриховыми линиями 1', 2' и 3' даны неустойчивые равновесные состояния этих звезд, 4 – кривая критических состояний, последняя точка на ней соответствует $M = 1,7 M_\odot$

Рис. 91. Зависимость центральной плотности в критическом состоянии от массы звезды по [46] для $M \geq 5 M_\odot$ и с учетом нейтронизации для малых масс

но центральная температура $T_{c,cr}$ падает. Численные расчеты критических параметров изэнтропических звезд проведены в [46] на основе решения уравнений (34.18), (34.19). В квадрате $10^5 \leq \rho \leq 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $10^9 \leq T \leq 2 \cdot 10^{10} \text{ К}$ термодинамические функции брались из [114], где рассматривалось ядерное равновесие с учетом ${}^5\text{Fe}$, α , n , p и приближение $\mu_{\nu_e} = 0$ для нейтрино (см. § 3). Слева и снизу от этого квадрата термодинамические функции рассчитывались в [46] по формулам (2.9)–(2.14), (2.58)–(2.60), см. рис. 3–6. Приближенные параметры изэнтропических звезд различной массы в критических состояниях приведены в табл. 45 и на рис. 91 из [46]. Полная энергия равновесной звезды, согласно (34.7), (34.15)–(34.18) равна

$$\epsilon_{eq} = \int_0^M \left(E - 3 \frac{P}{\rho} \right) dm + 0,918 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3} \quad (34.25)$$

и рассчитана в [46]. Удельные энергии связи звезд из табл. 45 в критическом состоянии существенно меньше, чем выделение энергии при сгорании грамма водорода ($\sim 6 \cdot 10^{18} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1}$), гелия ($\sim 5,8 \cdot 10^{17} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1}$) и углерода ($\sim 5,6 \cdot 10^{17} \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1}$), см. § 14, 15.

Критические параметры для $M = 1,5 M_\odot$ по расчетам (34.18)–(34.23) неплохо согласуются с соответствующими параметрами в точке начала коллапса для звезд с $M = 15$ и $25 M_\odot$ из табл. 39. Массы железных ядер звезд

Плотности начала нейтронизации ρ_n различных ядер и критические плотности холдных звезд $\rho_{c,OTO}$ за счет эффектов ОТО [110]

Элемент	$\epsilon_\beta = \epsilon_{Fe}$, МэВ	$\rho_n, 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\rho_{c,OTO}, 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
$^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn}$	3,7 (3,81)	1,15 (1,24)	31
$^{32}\text{S} \rightarrow ^{32}\text{P}$	1,7	0,15	27
$^{28}\text{Si} \rightarrow ^{28}\text{Al}$	4,64	1,97	27
$^{24}\text{Mg} \rightarrow ^{24}\text{Na}$	5,5	3,2	27
$^{20}\text{Ne} \rightarrow ^{20}\text{F}$	7,03	6,2	27
$^{16}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{N}$	10,4	19	27
$^{12}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{B}$	13,4	39	27
$^4\text{He} \rightarrow ^3\text{H} + n$	20,6	137	27

В скобках для ^{56}Fe даны значения ϵ_β и ρ_n при захвате на первый возбужденный уровень конечного ядра 109 кэВ, так как захват на основной уровень сильно запрещен правилами отбора.

для этих масс в критическом состоянии равны $1,56 M_\odot$ для $15 M_\odot$ и $1,61 M_\odot$ для $25 M_\odot$, (см. рис. 60, 62).

Причины потери устойчивости для железных ядер различных масс различны. При $M > 1,2 M_\odot$ нейтронизация, как причина неустойчивости, постепенно уступает место диссоциации железа, которая остается основной причиной неустойчивости вплоть до $\sim 500 M_\odot$. При $M = 500 \div 10^4 M_\odot$ неустойчивость вызвана рождением пар, а при $M > 10^4 M_\odot$ главную роль играют эффекты ОТО. Для таких сверхмассивных звезд энтропии в критическом состоянии столь велика, что основную роль в давлении играет излучение с небольшой примесью плазмы, важной для устойчивости. Согласно [109] зависимость $\rho_{c,cr}(M)$ определяется формулой

$$\rho_{c,cr} = 2,4 \cdot 10^{17} \frac{1}{\mu^3} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{7/2} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \text{ } \mu \text{ дано в (1.6)}. \quad (34.26)$$

В имеющихся расчетах эволюции одиночных звезд с постоянной массой [626, 633, 640] массы железных ядер на пороге устойчивости $M_{Fe,cr}$ не

Таблица 45

Параметры ядер звезд в критическом состоянии

$M/M_\odot$	$\rho_c, \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$T_c, \text{ К}$	$S, \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	$\epsilon, \text{ эрг}$	$\epsilon/M, \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}$
5	1,0 (8)	6,7 (9)	2,1 (8)	-1,3 (51)	-1,3 (17)
10	4,2 (7)	6,4 (9)	3,2 (8)	-1,9 (51)	-9,4 (16)
50	1,0 (7)	6,0 (9)	6,8 (8)	—	—
100	9,4 (6)	6,4 (9)	9,9 (8)	—	—
500	3,1 (6)	6,0 (9)	2,1 (9)	—	—
1000	6,3 (3)	1,1 (9)	2,8 (9)	-3,7 (51)	-1,8 (15)

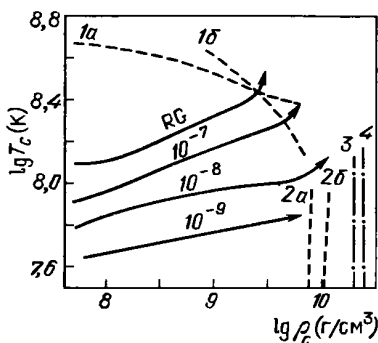
превышают $2,45 M_{\odot}$. Ввиду имеющихся неопределенностей*), а также необходимости учета потери массы и различных видов перемешивания (перехлест конвекции, меридиональная циркуляция) результаты этих расчетов не вполне надежны и не исключено, что значения $M_{\text{Fe, cr}}$ у звезд могут быть значительно больше.

б) Звездные ядра на пороге тепловой неустойчивости. В работе Арнетта [255] было впервые предположено, что тепловая неустойчивость, развивающаяся в вырожденном углеродном ядре с массой $1,4 M_{\odot}$, приведет к взрыву сверхновой и сделан модельный расчет взрыва. Модель предсверхновой была получена из грубого эволюционного расчета, давшего на границе устойчивости параметры С-О ядра: $M_{\text{core}} = 1,37 M_{\odot}$, $\rho_c = 1,7 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Начальная температура для гидродинамических расчетов $T_c = 3,5 \cdot 10^8 \text{ К}$ ненамного превышала граничную температуру начала развития тепловой неустойчивости, когда $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\text{CC}}$ (см. § 33, п. з), но ввиду очень резкой зависимости скорости ядерной реакции (15.1) от T возмущение оказалось большим, приведшим сразу к детонации и полному разлету. О дальнейших расчетах моделей сверхновых на основе данного механизма см. § 35. Более точный расчет эволюции в [524] привел к критическим параметрам С-О ядра: $M_{\text{core}} = 1,39 M_{\odot}$, $\rho_c = 2,68 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $T_c = 2,77 \cdot 10^8 \text{ К}$ (табл. 43). Особенность предсверхновых данного типа состоит в универсальности критической модели для широкого интервала масс ($3 - 8 M_{\odot}$ в [524]). Только наиболее массивные звезды из этого интервала могут взорваться как сверхновые, так как из-за потери вещества масса С-О ядра не вырастает до граничного значения и оно остается в виде белого карлика.

Модели на границе тепловой устойчивости, отличные от модели в табл. 43, могут появиться при эволюции в парах. Упрощенные эволюционные расчеты при росте С-О ядра за счет аккреции в двойных системах сделаны в [350]. Помимо величины $\dot{M}_C$, критическая модель существенно зависит от формы кривой $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\text{CC}}$, которая в области больших плотностей определяется эффектами экранирования и функцией нейтринных потерь (см. § 17, 19). В [593] отмечалось, что учет нейтральных токов в функции охлаждения ([336, 496], см. § 19) мало меняет ее по сравнению с [268] для заряженных токов. Изменение за счет различных вариантов экранирования существенно сильнее. На рис. 92 из [593] приведены треки эволюции С-О ядер на АВГ и при аккреции в паре, согласно [350]. Приведены критические кривые $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\text{CC}}$ для экранирования по [557] и [433, 434]. Как видно из рис. 92, критическая плотность растет с уменьшением $\dot{M}_C$ и максимальна в пикноядерном пределе с $\rho_{c, \text{max}} = (0,7 \div 1) \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ для $\dot{M}_C \leq 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$. Таким образом, для малых $\dot{M}_C$ при аккреции в двойной системе критическая плотность может увеличиться в 3–4 раза по

*) Ср. рис. 60–63, взятые из [626], и результаты последующих расчетов [633, 640]. Более точный учет нейтринных процессов на ядрах [367–370], пересмотр скорости реакции $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, приведший к ее увеличению в ~ 3 раза для условий в массивных звездах по сравнению с (14.41) из [361], другие поправки изменили массы железных ядер перед потерей устойчивости от $1,56$ до $1,33 M_{\odot}$ для $15 M_{\odot}$ и от $1,61$ до $2,22 M_{\odot}$ для $25 M_{\odot}$. При этом центральная энтропия уменьшилась для $15 M_{\odot}$ и увеличилась для $25 M_{\odot}$.

Рис. 92. Эволюция вырожденных С-О ядер на плоскости $\lg T_c - \lg \rho_c$, RG – эволюция ядра гиганта на АВГ стадиях $\dot{M}_C = 6 \cdot 10^{-7} M_\odot/\text{год}$, цифры на эволюционных треках задают $\dot{M}_C$ в $M_\odot/\text{год}$, 1 – кривые $\epsilon_\nu = \epsilon_{\text{СС}}$, 1а – для экранирования по работе [433, 434], 1б – по работе [557], 2 – кривые $\epsilon_\nu = \epsilon_{\text{СС}}$ для пикноядерного режима, 2а – по статическому, 2б – по приближению полной релаксации решетке из [557], см. (17.37), (17.38), 3 – критические состояния для потери динамической устойчивости из-за нейтронизации кислорода, 4 – то же из-за эффектов ОТО, из [593]



сравнению с одиночной звездой. В [507] показано, что для малых $\dot{M}_C$ при аккреции равенство $\epsilon_\nu = \epsilon_{\text{СС}}$ может быть достигнуто впервые вне центра, приводя к нецентральному взрыву.

В звездах с $M > 8 M_\odot$ загорание углерода происходит в отсутствие вырождения, но образующееся ядро из ^{16}O , ^{20}Ne и ^{24}Mg оказывается полностью или частично вырожденным при $M < 13 M_\odot$ [506]. Для звезд с $M = 8 \div 10 M_\odot$ образуется вырожденное $^{16}\text{O} + ^{20}\text{Ne} + ^{24}\text{Mg}$ ядро, температура которого недостаточна для загорания ^{20}Ne . Когда масса ядра достигнет $1,37 M_\odot$, начинается нейтронизация (см. табл. 44), которая определяет начальную скорость сжатия [56, 398]. Кислородная $\text{O} + \text{O}$ вспышка происходит на стадии сжатия, когда ρ_c достигнет $\sim 2 \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ [593, 398].

Звезды с массами $10 - 13 M_\odot$ в результате горения ^{12}C образуют $^{16}\text{O} + ^{20}\text{Ne}$ ядро с массой $1,37 - 1,5 M_\odot$. Ввиду роста скорости плазменных нейтринных потерь с плотностью (см. § 19), центральные области охлаждаются сильнее и максимум температуры достигается вне центра при массовой координате $m < 0,8 M_\odot$, уменьшающейся с ростом массы. При $M = 13 M_\odot$ инверсия температуры исчезает. Инверсия приводит к нецентральной неонно-кислородной вспышке*). Зона горения распространяется внутрь и наружу и достигает центра. В результате вспышки образуется невырожденное ядро, эволюционирующее спокойным образом до образования в нем элементов железного пика. Динамическое влияние вспышки существенно только для $M = 10 - 11 M_\odot$, когда возможен сброс гелиевой оболочки. Для $M = 11 M_\odot$, $M_{\text{He}} = 2,8 M_\odot$, $M_{\text{ONe}} = 1,42 M_\odot$, M_{He} – масса ядра, окруженного гелиевым слоем.

Расчеты эволюции гелиевых звезд с массами $M_{\text{He}} = 8, 3,3, 3,0, 2,8, 2,2 M_\odot$ приведены на рис. 93 из [508]. Исходные массы звезд составляли при этом 25, 13, 12, 11, 9 $M_\odot$ соответственно. Из рис. 93 видно, что звезда с $M_{\text{He}} = 2,2 M_\odot$ пересекает плотность нейтронизации ^{24}Mg и ^{20}Ne до неонной и кислородной вспышки, у звезд с $M_{\text{He}} = 3 M_\odot$ загорание ^{16}O и ^{20}Ne происходит на границе сильного вырождения, что приводит к слабой вспышке, снимающей вырождение, а при $M_{\text{He}} = 3,3$ и $8 M_\odot$ загорание неона и кислорода происходит, когда вырождение слабо.

*) Горение неона начинается с фотоотщепления α -частицы, которая затем захватывается. В результате неонного горения увеличивается концентрация ^{16}O и образуются ^{24}Mg и ^{28}Si .

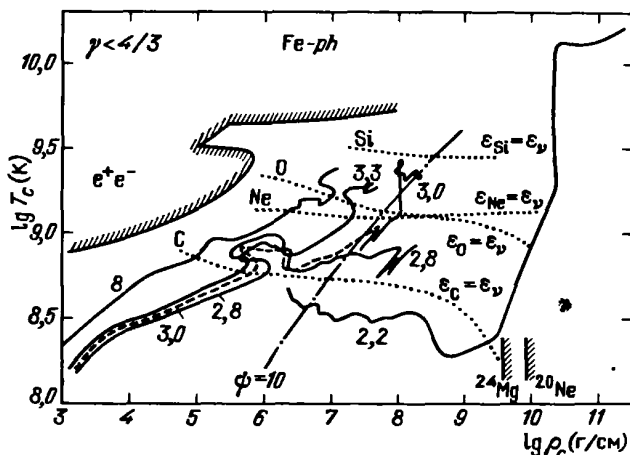


Рис. 93. Эволюционные кривые гелиевых звезд с $M_\alpha = 8; 3.3; 3.0, 2.8$ и $2.2 M_\odot$ на диаграмме $(\lg T_c, \lg \rho_c)$. Соответствующие массы указаны цифрами у треков. Массы исходных звезд равны 25, 13, 12, 11 и $9 M_\odot$, соответственно. Даны примерные линии загорания ^{12}C , ^{20}Ne , ^{16}O и ^{28}Si , где скорости горения равны скорости нейтринных потерь. Справа внизу отмечены плотности начала нейтронизации ^{24}Mg и ^{20}Ne , а в левом верхнем углу выделена область с $\gamma_1 < 4/3$ (γ_1 из (1.11)) за счет рождения пар (e^+e^-) и фотодиссоциации элементов железного пика (Fe-ph). Штрих-пунктирная линия $\psi = \mu_{\text{eff}}/kT = 10$ (см. (2.2)) указывает область сильного вырождения (справа) (из [508])

Отметим, что на рис. 93 область с $\gamma < 4/3$ немного отличается от рис. 6 из [46, 114]. Это связано, видимо, с различиями в выборе продуктов фотодиссоциации железа при термодинамических расчетах.

Задача. Вычислить интегралы типа

$$I_{lk} = \frac{1}{M} \int_0^M \varphi^l(m/M) \xi^k(m/M) dm \quad (1)$$

для политропы $n = 3$, получающиеся после подстановки (34.21) – (34.23) в (34.18), (34.19).

Решение. С учетом (34.6), имеем

$$dm/M = \theta^3 \xi^2 d\xi / M_3. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая по (34.17), (34.2), что $\varphi\left(\frac{m}{M}\right) \equiv \theta^3(\xi)$, получим

$$I_{lk} = \frac{1}{M_3} \int_0^{\xi_1} \theta^{3l+3} \xi^{k+2} d\xi = \frac{J_{pr}}{M_3} = \frac{J_{pr}}{J_{23}}, \quad (3)$$

$$p = 3l + 3, \quad r = k + 2,$$

Интегралы

$$J_{pr} = \int_0^{\xi_1} \theta^p \xi^r d\xi, \quad \xi_1 = 6.897 \quad (4)$$

Интегралы J_{pr}

r	p							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,848	2,132	1,293	0,9144	0,7043	0,5718	0,4809	0,4148
2	14,19	4,327	2,018	1,181	0,7881	0,5709	0,4372	0,3482
3	52,47	11,67	4,224	2,037	1,170	0,7517	0,5216	0,3823
4	222,8	37,94	10,85	4,318	2,127	1,207	0,7559	0,5080

вычисляются после численного интегрирования уравнения (34.3) для нахождения $\theta(\xi)$. Результаты численного расчета интегралов даны в таблице 46.

Дополнение. В энергетическом методе исследования устойчивости вращающихся звезд в ОТО встречаются двойные интегралы [292] типа

$$I_{mn,pq} = \int_0^{\xi_1} \theta^m \xi^n d\xi \int_0^{\xi} \theta^p \xi^q d\xi, \quad I_{mn,(pq)^2} = \int_0^{\xi_1} \theta^m \xi^n d\xi \left(\int_0^{\xi} \theta^p \xi^q d\xi \right)^2, \dots$$

которые для встречающихся в [292] значений равны

$$\begin{aligned} I_{3-1,12} &= 0,4745 & I_{31,74} &= 0,4117 \\ I_{31,34} &= 2,096 & I_{4-4(12)^2} &= 0,08089 \\ I_{31,42} &= 0,6609 & I_{5-1,12} &= 0,2139 \\ I_{31,52} &= 0,5161 & I_{71,52} &= 0,09474. \end{aligned}$$

§ 35. Взрывы при развитии тепловой неустойчивости вырожденных углеродных ядер

а) Основные уравнения. В сферически-симметричном случае уравнения динамики звезд с учетом тепловых процессов имеют вид (см. § 26, п. б)

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{r^2}, \quad \frac{\partial r^3}{\partial t} = \frac{3}{4\pi\rho}, \quad (35.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) = \epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_{\nu d} - \frac{\partial L_{\text{conv}}}{\partial m}, \quad (35.2)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = -\sum_j \frac{\epsilon_{nj}}{E_{ij}}, \quad E_{ij} = \frac{Q_j}{a_{ij} A_i m_u}. \quad (35.3)$$

Здесь в уравнении энергии (35.2) ϵ_n — скорость энерговыделения, ϵ_ν — скорость нейтринных потерь, $\epsilon_{\nu d}$ — скорость нагрева из-за взаимодействия с нейтрино, идущими из внутренних областей звезды. Последний процесс был назван депозицией в первых расчетах гидродинамического коллапса железного ядра [331]. При учете этого нагрева, способствующего поджиганию ядерного топлива в расчетах теплового взрыва [325] он был назван игнитацией. В (35.2) оставлен только конвективный тепловой поток

L_{conv} (эрг $\cdot$ с $^{-1}$), так как на динамических стадиях переносом тепла теплопроводностью обычно можно пренебречь. В уравнениях (35.3) i — элементы, участвующие в горении; суммирование проводится по j реакциям, в которых участвуют элементы i ; Q_j — выделение энергии на одну j -ю реакцию (см. § 22, 23), a_{ij} — число ядер i -го элемента, участвующих в j -й реакции, $a_{ij} < 0$ для образующихся ядер.

Решение уравнений (35.1) — (35.3) проводилось во всех работах по изучению тепловой вспышки, начиная с [255]. Помимо отличий в численных схемах счета, в разных работах выбирались различные начальные центральные плотности, профили температуры, способы учета конвективного переноса. Рассмотрим кратко результаты, классифицируя их по режимам горения.

б) **Детонация.** В работе [255] предполагалось, что горение, начавшись в центре, будет распространяться по звезде в виде детонационной волны, удовлетворяющей условию Чепмена — Жуге, т.е. движущейся относительно горячего газа со скоростью звука в этом газе. Последующие расчеты (см. обзор в [593]) показали, что режим детонации является самоподдерживающимся. Результатом взрыва звезды на границе тепловой устойчивости (рис. 93, 94) с детонацией является ее полный разлет. Такой результат ясен из простых энергетических оценок. Так как распределение плотности в звезде перед взрывом близко к политропе $n = 3$, ввиду основного вклада давления вырожденных электронов, энергия связи $\bar{\epsilon}_b = 5 \cdot 10^{50}$ эрг много меньше гравитационной энергии звезды $\bar{\epsilon}_g = 3,1 \cdot 10^{51}$ эрг. Энергия, выделяющаяся в результате полного выгорания углерода до элементов железного пика с $Q = 7,7 \cdot 10^{17}$ эрг $\cdot$ г $^{-1}$, есть $\bar{\epsilon}_n = 2,2 \cdot 10^{51}$ эрг для $M = 1,4 M_\odot$, что много больше $\bar{\epsilon}_b$ и величины нейтринных потерь $\bar{\epsilon}_\nu = 6 \cdot 10^{49}$ эрг.

в) **Дефлаграция.** В работе [435] был исследован численно процесс развития тепловой неустойчивости в вырожденном углеродном ядре. Получено, что детонация не устанавливается, а фронт горения распространяется с дозвуковой скоростью в режиме дефлаграции. По мере движения наружу фронта горения развиваются колебания, приводящие в итоге к разлету всей звезды. В последующих расчетах той же группы [325] была учтена нейтринная игнитация, связанная с нагревом при нейтрино-электронном рассеянии. Расчеты были проведены для нескольких начальных центральных плотностей. Обзор этих расчетов дан в [116]. При $\rho_{c0} = 5,03 \times$

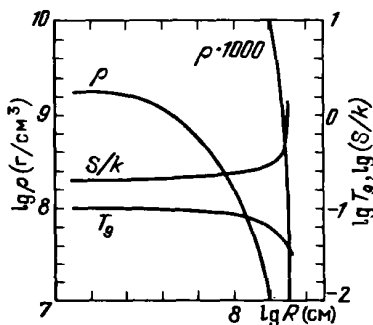


Рис. 94. Распределение плотности ρ , температуры T и энтропии S в начальной гидростатической модели, ($T_g = T/10^9$ K), из [66]

$\times 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ за мелкими пульсациями следуют сильное расширение и сильное сжатие, заканчивающееся образованием мощной ударной волны и полным разлетом звезды. Горение углерода в самом конце происходит в режиме детонации. Кинетическая энергия разлета $\bar{\epsilon}_{\text{kin}} = 1,8 \cdot 10^{51} \text{ эрг}$ достаточна для объяснения энергетики сверхновых. В варианте с $\rho_{c0} = 9,22 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ волна горения при выходе в оболочку также становится детонационной, но она приводит лишь к слабому выбросу $\sim 10^{-2} M_{\odot}$ с $\bar{\epsilon}_{\text{kin}} = 1,4 \cdot 10^{49} \text{ эрг}$. Основная часть $\sim 1,4 M_{\odot}$ коллапсирует с образованием нейтронной звезды. Для объяснения наблюдаемой энергетики взрывов сверхновых с остатком в виде нейтронной звезды здесь предполагается последующее действие магниторотационного механизма [31, 291, 280, 12], см. § 38. Центральная плотность $\rho_{c0} = \rho_c^* = 9 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ считается в [325] граничной, отделяющей модели с полным разлетом и мощным выходом энергии ($\rho_{c0} < \rho_c^*$) от коллапсирующих моделей со слабым выбросом и малым энерговыходом. Как видно из рис. 92, вариант с $\rho_{c0} > \rho_c^*$ может реализоваться только при малой скорости аккреции в двойной системе, если для пикноядерной реакции горения применимо приближение полной релаксации (см. § 17).

В изложенных выше расчетах пренебрегалось конвекцией, а все диссипативные процессы были связаны со схемой вязкостью из-за достаточно грубой расчетной сетки. Расчеты с различными параметрами конвекции в теории пути перемешивания показали большую чувствительность результатов к этому параметру (см. обзоры [593, 65]). Грубость расчетных сеток, связанная с ограниченными возможностями даже самых мощных компьютеров, а также отсутствие строгой теории конвекции не позволяют считать завершенной теорию термоядерных взрывов. Различные ограничения на модели термоядерных взрывов можно получить из сравнения с наблюдениями сверхновых I типа (СН1), с которыми связываются эти взрывы, и на основе расчетов нуклеосинтеза в вырожденном веществе [65]:

– "Радиоактивная" модель кривой блеска из-за распада $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$ требует производства большого количества ^{56}Ni в выброшенном веществе. Такое производство имеет место как в дефлаграционной, так и в детонационной модели, хотя последние описывают кривую блеска несколько хуже.

– В модели дефлаграции внешние области звезды успевают сильно расшириться до приближения к ним фронта горения. Это приводит к тому, что ядерное статистическое равновесие не успевает установиться и в выброшенном веществе оказывается много, $\sim 0,3 M_{\odot}$, промежуточных элементов ^{28}Si , ^{32}S , ^{36}Ar , ^{40}Ca , наблюдаемых в СН1 вблизи максимума блеска. Модель детонации дала бы промежуточные элементы только в условиях пониженной плотности, например, при быстром вращении.

– Существенное расхождение с наблюдениями дает дефлаграционная модель для изотопного состава элементов железного пика. Медленное горение при дефлаграции приводит к тому, что с повышением температуры успевает пройти много электронных захватов и увеличивается степень нейтронизации – отношение N_n/N_p . В выброшенном веществе отношение $^{54}\text{Fe}/^{56}\text{Fe}$ оказывается в 3 – 5 раз выше наблюдаемого, равного 0,061 для Солнечной системы, отношение Ni/Fe по всем стабильным изотопам завышено также в ~ 5 раз, а отношение $^{58}\text{Fe}/^{56}\text{Fe}$ в варианте с $\rho_{c0} =$

$= 2,5 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ получается выше солнечного в ~ 40 раз.*) Столь сильное расхождение подвергает сомнению модель дефлаграции, которая возникает в большинстве расчетов углеродного взрыва. Новый подход к проблеме и возможный путь разрешения этой трудности предложен в работе [68].

г) **Спонтанное горение и детонация.** В отсутствие сколько-нибудь убедительных расчетов, естественным начальным профилем температуры является адиабатический, который возможен из-за действия конвекции в начале горения углерода при $T \geq 3 \cdot 10^8 \text{ К}$. Тогда распределение температуры вблизи центра имеет вид

$$T = T_c \left[1 - \left(\frac{2}{3} \pi G \rho_c^2 P_c^{-1} \gamma_{2c} \right) r^2 \right]. \quad (35.4)$$

Здесь $\gamma_2 = (\partial \ln T / \partial \ln P)_S$ (см. (1.12)). Разложение (35.4) следует из уравнений (22.1), (22.2), которые дают вблизи центра

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3, \quad P = P_c - \frac{2\pi G}{3} \rho_c^2 r^2, \quad (35.5)$$

и разложения для T при адиабате

$$T = T_c + \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{dr^2} r^2 = T_c + \frac{1}{2} \frac{T_c}{P_c} \gamma_{2c} \frac{d^2 P}{dr^2} r^2. \quad (35.6)$$

В случае плавного изменения T скорость горения слабо меняется с радиусом и фронт горения перемещается со скоростью, определяемой начальным профилем температуры, причем, возможно, $v_\Phi \gg v_s$. В пределе $T \rightarrow \text{const}$ скорость $v_\Phi \rightarrow \infty$, т.е. выгорание может произойти одновременно во всей области. При $v_\Phi > v_s$ режим распространения фронта горения называется спонтанным [106]. Возможность реализации этого режима при углеродных вспышках отмечена в работе [68], где рассмотрена модель с $\rho_{c0} = 3 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, состоящая из равного количества ^{12}C и ^{16}O . Время τ_b (см. (13.6)) выгорания ^{12}C при $0,6 < T_9 < 0,9$ определяется формулой (см. (15.1))

$$\tau_b = 10^{-3} T_9^{-20} \text{ с}. \quad (35.7)$$

Вычисляя коэффициент в (35.4), имеем

$$T = T_c (1 - 2,0 \cdot 10^{-16} r^2). \quad (35.8)$$

Скорость фронта спонтанного горения определяется формулой

$$D_{sp} = \left(\frac{d\tau_b}{dr} \right)^{-1} = 1,2 \cdot 10^{17} T_{c9}^2 r^{-1} (1 - 2,0 \cdot 10^{-16} r^2)^{21} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (35.9)$$

При

$$r > r_s = \frac{10^5}{\tau_b} \text{ см}, \quad (35.10)$$

где $\tau_b = 10, 1, 0,1$ с для $T_{c9} = 0,63, 0,71$ и $0,80$ соответственно, скорость D_{sp} становится меньше скорости звука v_s и режим спонтанного горения прекращается. Все оценки выше сделаны при постоянной плотности. Как показали численные расчеты распространения волны горения, проведенные в [68]

*) Заметим, что ^{56}Fe , в основном образуется при распаде $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$, так что $(N/Z)_{^{56}\text{Ni}} = 1 < (N/Z)_{^{56}\text{Fe}} = 14/13$; стабильные изотопы Ni имеют $A = 58, 60, 61, 62$ и 64 .

методом характеристик, после режима спонтанного горения происходит формирование ударной волны и выход на режим детонации. При выходе детонационного фронта в области с достаточно низкой плотностью происходит уширение фронта горения, возможен срыв детонации и переход к дефлаграционному режиму. В [68] отмечено, что многочисленные расчеты теплового взрыва, связанные с методом искусственной вязкости являются слишком грубыми и не способны разрешить картину гидродинамического течения при углеродном взрыве. Появление детонации или дефлаграции в подобных расчетах отражает свойства численной схемы и может не совпадать с реальностью. Дальнейший прогресс в этой области возможен, по-видимому, после перехода к другим численным схемам типа метода характеристик, где не производится искусственная размазка ударного фронта.

§ 36. Коллапс звездных ядер малой массы

В звездах с начальной массой $8 \div 10 M_{\odot}$ после спокойного горения ^{12}C образуется вырожденное $\text{O} + \text{Ne} + \text{Mg}$ ядро, которое теряет устойчивость из-за нейтронизации ^{24}Mg и ^{20}Ne . Расчеты показали, что роль ядерного горючего состоит в некотором замедлении сжатия, по сравнению с коллапсом железного ядра, но какого-либо выброса не происходит [508].

Нейтронизация может стать причиной начала коллапса аккрецирующего железного белого карлика в двойной системе, когда масса его превысит $M_{\text{сн}} = 1,18 M_{\odot}$ (см. § 34).

Если одиночная звезда с начальной массой $M > 10 M_{\odot}$ быстро потеряет оболочку после образования железного ядра и масса остатка немного превысит $M_{\text{сн}}$, то после остывания, когда плотность ρ_c достигнет $1,15 \cdot 10^9 (1,24 \cdot 10^9) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, начнется потеря устойчивости за счет нейтронизации ^{56}Fe . При $M - M_{\text{сн}} \ll M_{\text{сн}}$ время остывания может быть достаточно большим, что соответствует наблюдаемым взрывам сверхновых I типа в эллиптических галактиках, где мало или совсем отсутствуют массивные звезды [55]. Медленная аккреция в двойной системе может дать аналогичную задержку момента потери устойчивости. Отметим, что тот же качественный вывод останется справедливым для остывающего или аккрецирующего белого карлика, состоящего из ^{24}Mg , ^{40}Ca или какого-либо другого достаточно тяжелого элемента. Выделение энергии при образовании ^{56}Fe после начала коллапса будет здесь еще менее существенным, чем при коллапсе $\text{O} + \text{Ne} + \text{Mg}$ ядра.

Если пренебречь членами $\sim T^2$ и зффектами ОТО, то зависимость $M(\rho_c, T)$ после подстановки (34.21) без третьего члена в скобках в (34.18) без последнего члена имеет вид [56]

$$M = \frac{5,83}{\mu_Z^2} \left(1 - 5,4 \cdot 10^4 \frac{\mu_Z^{2/3}}{\rho_c^{2/3}} + 1,7 \cdot \frac{10^{-7}}{A} \mu_Z^{4/3} \frac{T}{\rho_c^{1/3}} \right). \quad (36.1)$$

При температуре T и той же центральной плотности масса звезды больше массы холодной звезды на величину ΔM :

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1,7 \cdot 10^{-3}}{A} \mu_Z^{4/3} \frac{T_7}{\rho_{c9}^{1/3}}, \quad T_7 = \frac{T}{10^7 \text{ К}}, \quad (36.2)$$

$$\rho_9 = \rho / 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Потеря устойчивости произойдет при конечном ядре новой фазы, когда ρ_c на малую, но конечную величину превысит плотность нейтронизации ρ_n [56], см. § 39, 45. Для оценки ΔM достаточно подставить в (36.2) плотность начала нейтронизации из табл. 44. В сочетании с кривой остывания белых карликов (§ 39), формула (36.2) дает зависимость $\tau(\Delta M)$, т.е. время задержки коллапса в зависимости от избытка массы ΔM^*

$$\tau = 2,18 \cdot 10^8 \frac{(\mu_Z/2)^{16/3} (M/10^3 \Delta M)}{(\mu/2) (A/12)^{7/2} \rho_{c9}^{5/6}} \text{ лет} \quad (36.3)$$

для $x_Z = 1$; $\mu_Z = A/Z$, $\mu = A/(Z + 1)$.

Качественная картина развития неустойчивости вследствие нейтронизации дана в [56]. 'Когда центральная плотность превысит плотность начала нейтронизации ρ_n , звезда оказывается неустойчивой для равновесного состава, т.е. при условии очень большой скорости нейтронизации. В то же время она устойчива относительно замороженного состава, т.е. в отсутствие нейтронизации при постоянном μ_Z . При малом $\rho_c - \rho_n$ скорость нейтронизации (бета-процесса) мала и именно она определяет начальный темп сжатия звезды. С ростом плотности

- растет скорость бета-процессов,
- увеличивается роль эффектов ОТО,
- происходит нагрев звезды из-за адиабатического сжатия и из-за неравновесности бета-реакций (см. § 20), что в итоге ведет к диссоциации железа и уменьшению $\gamma < 4/3$ при замороженных бета-процессах.

Все это приводит к гидродинамическому коллапсу со скоростью, близкой к скорости свободного падения. Расчет сжатия, обусловленного нейтронизацией, требует совместно с гидродинамическими уравнениями (35.1) – (35.3) решения уравнений кинетики нейтронизации типа (3.6) со скоростями реакций из (19.31), которые определяют скорость сжатия на этой стадии. Неравновесный нагрев приводит к существенному росту температуры и делает невозможным "холодный" коллапс.

Расчеты коллапса маломассивных звездных ядер в приближении гомологического сжатия при заданном профиле плотности [26] проводились в [19, 20]. Решение уравнений газодинамики (35.1) – (35.3) совместно с уравнениями кинетики типа (3.6) для проблемы коллапса маломассивного железного ядра получено в [66]. В качестве начальной модели рассматривалась гидростатически равновесная звезда из ^{56}Fe с $M = 1,2 M_\odot$, $\rho_c = 1,78 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $T_c = 10^8 \text{ К}$ и распределением температуры $T = T_c(\rho/\rho_c)^{0,1}$. В уравнении состояния учитывались вырождение и релятивизм электронов и идеальный ядерный газ (§ 2). Масса звезды превышает предельную (§ 34), соответственно, начальная плотность в центре на конечную величину превышает плотность нейтронизации $\rho_n = 1,15 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Разность $\rho_c - \rho_n$ определяет начальные скорости нейтронизации и сжатия звезды. Для сквозного счета медленных начальных и быстрых гидродина-

*) Формула (36.3) справедлива при $\frac{\Delta M}{M} > 6 \cdot 10^{-5} \frac{\rho_c^{1/6} \mu_Z^{1/3}}{A}$, когда температура

в точке потери устойчивости T_{cr} выше $0,1 \theta < T_{\text{cr}}$, где θ из (4.38) – дебаевская температура вырождения кристалла (см § 39).

мических стадий в [66] был разработан подход, основанный на решении неявным методом обыкновенных дифференциальных временных уравнений, получающихся после разбиения звезды на лагранжевы зоны. Использовалась искусственная вязкость и учитывалось в полном объеме нейтринное охлаждение (см. § 19), конвекцией и теплопроводностью пренебрегалось. В качестве граничных условий принималось, что скорость $v = 0$ в центре и давление $P = 0$ на внешней границе. При $T < 3 \cdot 10^9$ К решались уравнения кинетики нейтронизации для каждой из реакций цепочки $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn} \rightarrow ^{56}\text{Cr} \rightarrow ^{56}\text{V} \rightarrow ^{56}\text{Ti}$. При $T > 3 \cdot 10^9$ К включался переход к ядерному статистическому равновесию. Для плавного описания такого перехода вводилось кинетическое уравнение для величины f — весовой доли вещества, перешедшего в статистическое равновесие. Скорость изменения f выбиралась в соответствии с реакцией (γ, p) на железе, экспоненциально зависящей от T . Доля $(1-f)$ по-прежнему описывалась системой уравнений кинетики нейтронизации. При $f > 0,99$ осуществлялся переход к равновесной концентрации ядер с одним кинетическим уравнением (3.6).

Распределение параметров в начальной модели дано на рис. 94. На рис. 95 представлены значения температуры T , энтропии S и μ_Z в центре звезды в зависимости от центральной плотности ρ_c . Пунктиром приведены результаты расчетов с более точным учетом нейтринного излучения, включающим захваты электронов через гигантский гамов-теллеровский резонанс по работам [367–370]. При этом возрастает эффективность неравновесного нагрева, которая частично связана с высокой энергией возбуждения ядра при гамов-теллеровских переходах (см. § 18, п. д). Зависимость от времени ρ_c и нейтринной светимости J_ν даны на рис. 96. От начала сжатия до $\rho_c = 10^{10}$ г · см⁻³, $T = 3 \cdot 10^9$ К температура росла главным образом за счет неравновесного нагрева бета процессами (см. § 20). Как видно из рис. 95 переход к статистическому равновесию при $T_9 > 3$, $\rho_c \approx 10^{10}$ г · см⁻³ сопровождается сильным разогревом — тепловой вспышкой. Энергия для

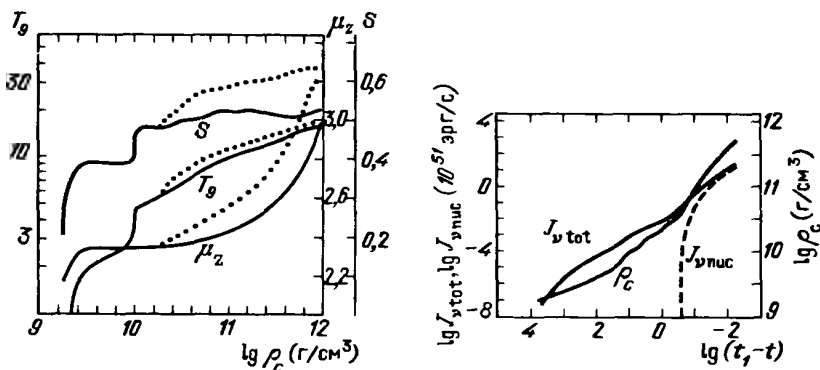


Рис. 95. Зависимости T_9 , S (в единицах $\frac{k}{m_u}$), и μ_Z из (2,17) от центральной плотности ρ_c . Сплошные линии — без учета, пунктирные — с учетом гамов-теллеровского резонанса. В области $10 \leq \lg \rho_c \leq 10,3$ приведены кривые, сглаженные по пульсациям (из [66])

Рис. 96. Полная нейтринная светимость $J_{\nu, \text{tot}}$, светимость за счет бета-процессов на нуклонах $J_{\nu, \text{bec}}$ и ρ_c в зависимости от времени t . Момент $t = t_1 = 5098$ с соответствует $\lg \rho_c = 11,96$ (из [66])

этой вспышки накопилась во время предшествующей нейтронизации, когда ядерный состав все больше отклонялся от равновесного, аналогично холодной нейтронизации, рассмотренной в § 4, п. д для образования неравновесного слоя в оболочке нейтронной звезды.

Удельная энергия связи в результате нейтронизации стала равной $8,72 \text{ МэВ} \cdot \text{нуклон}^{-1}$ (для ^{56}Cr), а в статистически равновесном состоянии при той же плотности $\rho_c = 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ имеет место $E_b = 8,74 \text{ МэВ} \cdot \text{нуклон}^{-1}$. Избыток энергии связи $0,02 \text{ МэВ} \cdot \text{нуклон}^{-1}$ превращается в тепло при переходе к равновесию и увеличивает температуру

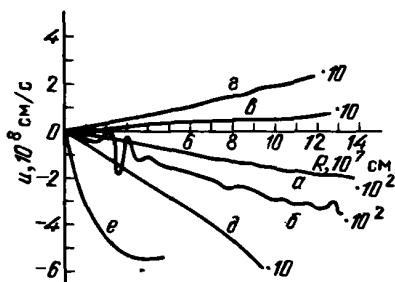


Рис. 97. Профили скорости u в зависимости от радиуса R при $\lg \rho_c = 9,96$ (а), $10,00$ (б), $10,07$ (в), $10,18$ (г), $10,52$ (д), $11,96$ (е), из [66]. Реальные значения скорости умножены на величины, указанные около кривых

в центре T_c с $3 \cdot 10^9$ до $4,7 \cdot 10^9$ К. Распределение скорости по радиусу для различных значений центральной плотности приведено на рис. 97. Тепловая вспышка порождает звуковую волну (кривая (б) на рис. 97), которая переходит в почти гомологическое колебание звезды в целом. После нескольких десятков колебаний они прекращаются при $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ из-за демпфирования потоком нейтринного излучения. При $\rho_c \geq 10^{12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ коллапс становится негомологическим, а центральная часть звезды непрозрачной относительно излучения нейтрино. Дальнейшие расчеты в [66] велись в адиабатическом приближении и привели к формированию гомологического ядра с массой $1,1 M_\odot$, от которого происходит отражение ударной волны — отскок (bounce). Корректный учет нейтринных процессов может существенно уменьшить мощность отраженной ударной волны, как в случае коллапса более массивных звезд, рассмотренного ниже в § 37. Взрыв с энергией $\epsilon = 2 \cdot 10^{51}$ эрг в результате отскока, получившийся в расчетах нейтронизации и коллапса $O + Ne + Mg$ ядра, оставшегося после эволюции звезды с начальной массой $8-10 M_\odot$ [398], требует дополнительной проверки из-за отсутствия ясности в способе учета в этой работе нейтринного переноса.

§ 37. Гидродинамический коллапс ядер звезд

Железные ядра с массой $M_{Fe} \geq 1,4 M_\odot$ теряют устойчивость за счет диссоциации железа, которая сразу приводит к быстрому коллапсу. С уменьшением массы возрастает роль нейтронизации и временной интервал, на котором сжатие идет со скоростью бета-процессов. Как отмечалось в § 34, п. б, железное ядро образуется у звезд с начальной массой $M_i \geq 10 M_\odot$, причем при $M_i > 13 M_\odot$ все стадии ядерного горения проходят спокойно. Так как эволюционные расчеты дают заметную неопределенность

в связи $M_{Fe}(M_f)$, можно лишь утверждать, что неустойчивость за счет диссоциации железа теряют одиночные звезды с $M_f > 13 \pm 3 M_\odot$.

Гидродинамические расчеты коллапса железных ядер впервые были сделаны в [331] и вскоре затем в [111, 254]. Решались гидродинамические уравнения (35.1)–(35.3), в качестве начальных условий рассматривались массивные звездные ядра ($M \geq 2 M_\odot$) на границе гидродинамической устойчивости (см. § 34, п. а). В этих работах было исследовано влияние электронных и мюонных нейтрино на коллапс, роль депозиции нейтрино, приводящей к нагреву оболочки и возможному ее выбросу, а также влияние горения термоядерного топлива ^{12}C , ^{16}O , сохранившегося вокруг железного ядра. В [291] было отмечено, что отражение падающего вещества от поверхности устойчивой нейтронной звезды и образование ударной волны (bounce) также может быть важным для появления взрыва сверхновой.

Многочисленные расчеты коллапса, проведенные к настоящему времени, см. обзоры [116, 633, 640, 65, 397], выявили чувствительность результатов к уравнению состояния ядерной материи, количеству оставшегося термоядерного горючего, возможной конвекции. Наиболее сильное и, возможно, решающее влияние на результаты оказывают способы учета нейтрино на прозрачных и непрозрачных стадиях. Во многих работах получался сильный взрыв в двух противоположных физических предположениях: при адиабатическом коллапсе с зависящим от плотности ρ показателе адиабаты γ и в приближении полностью прозрачных нейтрино. В первом случае взрыв получался в результате отскока падающего вещества от поверхности образующейся нейтронной звезды и формирования мощной ударной волны, распространяющейся наружу. В приближении прозрачных нейтрино их средняя энергия 30–50 МэВ оказывается достаточной для сильной депозиции, приводящей к взрыву.

Первые расчеты, в которых нейтринные процессы были учтены самосогласованно по всей звезде, сделаны Д.К. Надежиным [498, 499]. В этих работах получено образование ядра, непрозрачного для нейтрино. В этом ядре вместо уравнения энергии (35.2) используются уравнения (21.9)–(21.11), в которых учитывается энергия и давление равновесных нейтрино и перенос лептонного заряда. Над поверхностью непрозрачного для нейтрино ядра (нейтриносферы) учитывалось как собственное излучение, так и поглощение нейтрино, идущих из ядра и нагрев ими вещества (депозиция). При этом поглощение принималось из дилутированного фермиевского спектра нейтрино, идущих от нейтриносферы [498, 116]. В расчетах [499] выяснилось, что основная роль нейтрино состоит в способствовании превращения кинетической энергии падения в тепло вблизи нейтриносферы и практическим отсутствием в связи с этим отскока. Максимальная скорость падения, полученная в [499] для коллапса ядра в $2M_\odot$, составила $37\,000 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$ через 0,12 с после начала коллапса. В этот момент скорость была в 1,5 раза меньше скорости свободного падения. Температура за фронтом ударной волны поднималась до $(4 \div 5) \cdot 10^{10} \text{ К}$ и вещество там становилось непрозрачным для нейтрино. Граница фронта практически совпадала с границей нейтриносферы и нейтринного ядра. Рост нейтринного ядра связан с превращением кинетической энергии вещества в тепловую при переходе через фронт ударной волны. Масса горячего нейтринного ядра быстро (за $\sim 0,04 \text{ с}$) вырастает до $\sim 0,8 M = 1,6 M_\odot$, а радиус до $\sim 80 \text{ км}$. После

этого наступает длительная стадия аккреции оставшейся оболочки на нейтринное ядро, которое теряет энергию и постепенно сжимается. Через четыре секунды нейтринная звезда превращается в гидростатически равновесную горячую нейтронную звезду с $R \approx 12,5$ км, которая продолжает остывать. Большая часть излученной в виде нейтрино энергии $\sim 5 \cdot 10^{53}$ эрг $\approx 0,15 M_{\odot} c^2 \approx 0,3 M_{\odot} c^2$ теряется при охлаждении горячей нейтронной звезды за время $t \approx 20$ с. Средние энергии нейтрино, возникающих при коллапсе, составляют ~ 10 МэВ*) и их депозиция недостаточна для обращения коллапса оболочки и получения мощного взрыва. Учет термоядерного горения кислорода в оболочке, мюонных и тау-нейтрино, учет передачи импульса от нейтрино ядрам за счет когерентного рассеяния на нейтральных токах (см. § 18) практически не изменили результатов. Во многих работах, появившихся после [498, 499], механизм отскока продолжал использоваться для получения мощного взрыва при грубом описании нейтринных процессов. В последних работах нейтрино учитываются точнее и получение взрыва стало затруднительным.

В работах, изложенных в [633, 640, 65, 397], было уточнено описание кинетики нейтронизации, нейтрино описывались с помощью уравнения переноса, учитывались эффекты неидеальности в уравнении состояния при околоядерных плотностях. В условиях большой концентрации нейтрино существование тяжелых ядер сохраняет вплоть до почти ядерных плотностей из-за подавления электронных захватов. Это ведет к преобладающей роли лептонов в давлении, имеющих $\gamma = 4/3$, на стадии непрозрачного нейтринного ядра. При $\gamma = 4/3$ гомологическое сжатие вещества с $\tau_{\nu} > 1$ объясняется то, что центральные области с $\tau_{\nu} > 1$ называются гомологическим ядром. После достижения плотности $\rho = 2,5 \cdot 10^{14}$ г·см⁻³ ядра диссоциируют и вклад нерелятивистских нуклонов в давление резко возрастает, приводя к $\gamma > 4/3$ и негомологичности коллапса. На внутренней границе гомологического ядра, но глубоко под нейтриносферой возникает сильная ударная волна, в которой удельная энтропия возрастает в 6–7 раз. Значительная часть энергии этой волны тратится на диссоциацию тяжелых ядер, а при выходе на границу нейтриносферы оставшаяся часть энергии излучается в виде нейтринного импульса с $L_{\nu} \approx 10^{54}$ эрг·с⁻¹. В результате при коллапсе ядра звезды с $M_{\text{core}} \geq 1,5 M_{\odot}$ ударная волна затухает и выброса не происходит.

Еще одна попытка получить мощный выброс при коллапсе железных ядер была сделана в [276]. Рассматривалась стадия остывания нейтринной звезды, светимость которой $L_{\nu_e} = L_{\tilde{\nu}_e} \approx 4 \cdot 10^{52}$ эрг·с⁻¹, средняя энергия излучаемых нейтрино ~ 5 МэВ, радиус нейтриносферы $R_{\nu} \approx 30$ км. Масса коллапсирующего ядра составляла 1,64 – 1,69 $M_{\odot}$. Малая ($\sim 0,1\%$) часть нейтринного потока поглощается во внешних слоях, приводя к их сильному разогреву. Расчеты проведенные в [276] для $t = 0,1 - 0,8$ с показали, что нейтринный нагрев приводит к росту давления, образованию ударной волны, распространение которой наружу дает выброс с энергией $\sim 4 \cdot 10^{50}$ эрг, что не достаточно для объяснения энергетики наиболее мощных сверхновых. Скорость падения вещества перед фронтом состав-

*) В [481а] средние энергии электронных нейтрино равнялись 14 МэВ, электронных антинейтрино – 15 МэВ, остальных типов нейтрино ($\nu_{\mu}, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}, \bar{\nu}_{\tau}$) – 32 МэВ.

ляла $(2 \div 3) \cdot 10^9 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$, а движения фронта наружу $\sim 5 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ для времени $t \geq 0,5 \text{ с}$ после начала коллапса. В работе [497] сделаны расчеты при уточненном по сравнению с [276] описании нейтринного переноса и получено полное отсутствие взрыва и выброса. В этой же работе подвергаются сомнению с точки зрения описания нейтринных процессов все работы, в которых получен взрыв после коллапса. Рассмотрим некоторые интересные физические эффекты, возникающие при гидродинамическом коллапсе.

а) Низкоэнергичное окно для нейтрино. Ввиду того что сечение взаимодействия нейтрино с веществом растет с энергией (см. § 18), толща по взаимодействию падает с уменьшением энергии нейтрино и их улет возможен более свободно. Улет таких нейтрино облегчается и тем, что в условиях вырождения электронов и нейтрино свободный пробег нейтрино еще более увеличивается (§ 8). В [482] предполагалось, что открытие низкоэнергичного окна приведет к увеличению потока энергии нейтрино из ядра и облегчению взрыва сверхновой при коллапсе.

Расчеты [455] показали, что вырождение нейтрино ослабляет только (ν_e) -рассеяние, но почти не влияет на рассеяние на нуклонах или когерентное рассеяние на ядрах. Причина этого состоит в том, что при столкновении нейтрино с тяжелыми ядрами и нуклонами передача энергии очень мала, меняется лишь импульс: при столкновении с электронами передача энергии и импульса сравнимы между собой. Как следует из интеграла столкновений для фермионов (21.1), в случае когда обмен энергией пренебрежимо мал и $\epsilon = \epsilon'$, члены, характеризующие вырождение, выпадают. Отсутствие вклада вынужденных процессов свойственно и томсоновскому рассеянию без передачи энергии фотонов (бозонов) в (5.16). Рассеяние на нуклонах и ядрах является главным источником нейтринной непрозрачности. Расчет процессов рассеяния нейтрино за счет нейтральных токов [336, 455] привел к значению свободного пробега λ_{el} относительно рассеяния на нуклонах и когерентного рассеяния на ядрах

$$\lambda_{el} \approx 1,0 \cdot 10^6 \left(\frac{\rho}{10^{12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{x_Z \bar{A}}{12} + x_n \right)^{-1}, \quad (37.1)$$

x_Z , x_n весовые концентрации тяжелых ядер и свободных нейтронов (см. также (18.90)). Аналогичный расчет длины пробега λ_e относительно рассеяния нейтрино на электронах привел к соотношению [455]

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_{el}} \approx 20 \left(\frac{\mu_Z}{2} \right) \left(\frac{x_Z \bar{A}}{12} + x_n \right) \left(\frac{\epsilon_{Fe}}{30 \text{ МэВ}} \right)^2 \left(\frac{kT}{3 \text{ МэВ}} \right)^{-2}, \quad (37.2)$$

где ϵ_{Fe} — энергия Ферми электронов (2.21), T — температура в области рассеяния, μ_Z — число нуклонов на один электрон из (2.17). Из (37.2) видно, что для характерных значений $\mu_Z = 2$, $x_Z \bar{A} \geq 12$, $\epsilon_{Fe} \geq 30 \text{ МэВ}$ и $kT \leq 3 \text{ МэВ}$ соотношение $\lambda_e \gg \lambda_{el}$ справедливо при любой степени вырождения нейтрино, а из (37.1) видно, что пробег λ_{el} меньше радиуса нейтриносферы R_ν . Таким образом, вырождение нейтрино не влияет на низкоэнергичное окно, оно открыто слабо, не ведет к заметному росту плотности потока нейтрино и не устраняет трудностей с получением взрыва сверхновой при коллапсе.

б) Конвективная неустойчивость в коллапсирующих ядрах звезд. В области нейтриносферы поток энергии нейтрино из ядра приводит к тому, что концентрация лептонов быстро падает наружу в соответствии с падением давления. В этих условиях развивается конвективная неустойчивость [348], так как при движении элемента вещества внутрь его плотность должна быть выше плотности окружающей среды для компенсации давления, а при движении наружу — меньше (см. § 10). Крупномасштабные конвективные движения в области нейтриносферы могли бы привести к выносу наружу очень горячего вещества, увеличению средней энергии и потока улетающих нейтрино, депозиция которых привела бы к взрыву.

Анализ возможности развития такой неустойчивости был проведен в работе [464]. Использовалось уравнение состояния для равновесного горячего вещества большой плотности [456] с термодинамически равновесными нейтрино. Исследование конвективной неустойчивости в [464] (см. аналогичное в § 10) позволило сделать вывод о том, что в области нейтриносферы при $dx_l/dr < 0$ (x_l — относительная концентрация лепто-

нов) развитие конвекции возможно только при $\gamma_l = \left(\frac{\partial S}{\partial x_l} \right)_{\rho, P} < 0$, если отсутствует дестабилизирующее влияние энтропии, т.е. если энтропия не падает с радиусом. Вычисление γ_l по уравнению состояния [456] показало, что при больших T и ρ , где состав является чисто нуклонным, величина $\gamma_l > 0$ и развитие конвекции при $\rho > 10^{14}$ г · см⁻³ вряд ли возможно. Рассмотрение движения ударной волны в области под нейтриносферой показало, что энтропия за фронтом растет с уменьшением плотности, поэтому конфигурация остается устойчивой относительно конвекции. В ходе дальнейшей эволюции вид профиля энтропии может измениться. Для более определенных утверждений нужны дополнительные расчеты. Лептонный градиент, устанавливающийся после прохождения ударной волны при $\rho < 10^{12}$ г · см⁻³ оказывает стабилизирующее влияние на конвекцию. Анализ нейтринной конвекции при $10^{12} < \rho < 10^{14}$ г · см⁻³ на основе гидродинамических расчетов показал, что даже в случае ее развития степень усиления нейтринного потока и возможности получения взрыва остаются сомнительными [466].

в) Несимметричное излучение нейтрино при коллапсе звезды с сильным магнитным полем. В сильном магнитном поле энергия электрона зависит от ориентации его спина [144]:

$$E = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma_e \right) \frac{|e| \hbar}{m_e c} B + \frac{p_z^2}{2}. \quad (37.3)$$

Здесь $n = 0, 1, \dots$ — номер уровня Ландау, $\sigma_e = \pm 1/2$ — проекция спина электрона на направление $\vec{B}$. Состояние с $\sigma_e = -1/2, n = 0$ имеет минимальную энергию, поэтому электроны в сильном магнитном поле поляризованы. Для позитронов из-за перемены знака заряда энергетически выгоднее состояние с $\sigma_e = 1/2, n = 0$. Степень поляризации электронов зависит от параметра p , определяемого соотношениями [225, 101]:

$$\begin{aligned} \text{а) } p &= \frac{\hbar \omega_B}{kT} \quad \text{для невырожденного нерелятивистского газа,} \\ \text{б) } p &= \frac{\hbar \omega_B}{\epsilon_F e} \quad \text{для вырожденного нерелятивистского газа,} \end{aligned} \quad (37.4)$$

$$(в) p = \frac{\sqrt{\hbar \omega_B m_e c^2}}{\epsilon_{Fe}} \text{ для вырожденного релятивистского газа}$$

$$(г) p = \frac{\sqrt{\hbar \omega_B m_e c^2}}{kT} \text{ для невырожденного релятивистского электронного газа.}$$

Здесь ϵ_{Fe} дано в (2.21),

$$\omega_B = \frac{eB}{m_e c} \text{ — частота Лармора.} \quad (37.5)$$

Степень поляризации близка к единице при $p > 1$. Существование сильных магнитных полей на поверхности нейтронных звезд $B = 10^{12} - 10^{13}$ Гс следует из наблюдений пульсаров [153]. Во внутренних областях поля могут быть еще больше. Ввиду того, что нейтрино обладают левой спиральностью (антинейтрино — правой, см. § 18) они имеют преимущественное направление вылета, когда рождаются в реакциях с поляризованными $e^\pm$. Угловая зависимость интенсивности нейтринного излучения за счет магнитной анизотропии определяется функцией

$$g(\theta) = \frac{1}{4\pi} (1 + a \cos \theta), \quad (37.6)$$

где θ — угол между направлением вылета нейтрино и направлением магнитного поля. Вычисляя плотность энергии E_ν и плотность потока энергии нейтрино F_ν , аналогично фотонам по формулам (6.3), (6.4), получим для распределения (37.6)

$$F_{\nu B} = \frac{acE_\nu}{3} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1*} \quad (37.7)$$

Если суммарный направленный импульс нейтринного излучения нейтронной звезды есть

$$P_\nu = f \frac{Q_\nu}{c}, \quad (37.8)$$

$Q_\nu = 0,1 Mc^2$ — полная излученная энергия, примерно равная энергии связи нейтронной звезды, то нейтронная звезда приобретает скорость

$$v_n = 0,1 cf. \quad (37.9)$$

Фактор асимметрии f находится путем усреднения (37.7) по поверхности нейтриносферы. Если полоидальная часть поля нейтринной звезды имеет форму диполя (Д):

$$B_z = d(3 \cos^2 \theta - 1), \quad B = d\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (37.10)$$

и $a = \alpha B$ (37.4а, б), то при $E_\nu = \text{const}$ после интегрирования по нейтриносфере получаем $P_\nu = 0$. Для $a = \alpha\sqrt{B}$ из (37.4в, г) получаем

$$f = \frac{4a_0}{3\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{3x^2 - 1}{(3x^2 + 1)^{1/4}} dx \approx -0,0776a_0, \quad (37.11)$$

* $F_{\nu B}$ — часть нейтронного потока связанная с магнитной анизотропией.

$a_0 = \alpha\sqrt{2d}$ — значение a при $\theta = 0$ на полюсе,

$$\int_0^1 \frac{3x^2 - 1}{(3x^2 + 1)^{1/4}} dx = -0,0823.$$

В этом случае средний нейтринный импульс направлен обратно его направлению на полюсах.

Если поле внутри звезды однородно и направлено вдоль оси z (II), то $a = \text{const}$ и

$$P_\nu = \frac{4a}{3c} Q_\nu, \text{ т.е. } f = \frac{4a}{3}^* \quad (37.12)$$

Основным источником непрозрачности для нейтрино в нейтронных звездах на стадии излучения главного нейтринного импульса является урка-процесс на нуклонах (19.30):

$$(a) \quad p + e^- \rightarrow n + \nu, \quad (37.13)$$

$$(б) \quad n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}.$$

Ввиду большой массы нуклоны обычно находятся в неполяризованном состоянии. Расчет вероятности реакции (37.13) в сильном магнитном поле с неполяризованными нуклонами сделан в [101]. Асимметрия вылета нейтрино возникает при захвате электронов только с нижнего уровня Ландау ($\sigma_e = -1/2, n = 0$), причем ее максимальное значение есть

$$a_{\max} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + 3\alpha^2}, \quad \alpha = G_A/G_V \approx 1,25. \quad (37.14)$$

Асимметрия имеется только за счет разных констант векторного и аксиального взаимодействия. Для малых значений B приближенно имеем

$$a = a_{\max} p^2 = 0,099 p^2, \quad p \ll 1. \quad (37.15)$$

Подставляя в (37.9) значение f из (37.11), (37.12) и учитывая (37.15), (37.4в, г), получим

$$v_n = \frac{4c}{A} \frac{B}{B_c} \begin{cases} \left(\frac{m_e c^2}{\epsilon_{Fe}} \right)^2, & \epsilon_{Fe} \gg kT \\ \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^2, & \epsilon_{Fe} \ll kT, \quad B_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 4,414 \cdot 10^{13} \text{ Гс}, \end{cases} \quad (37.16)$$

$$A = 303 \text{ (II)}; \quad A = -5,21 \cdot 10^3 \text{ (II)}.$$

Отрицательное v_n соответствует скорости нейтронной звезды с направлением, противоположным магнитному полю на полюсах. Для сильно вырожденных электронов с $\epsilon_{Fe} = 60 m_e c^2$ (см. (4.19)) имеем скорость нейтронной звезды за счет нейтринного излучения в реакции (37.13а)

$$v_n^{(\nu)} \approx \begin{cases} 1,2 (B/B_c) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (II)} \\ -0,064 (B/B_c) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \text{ (II)}. \end{cases} \quad (37.17)$$

В условиях сильного вырождения электронов плотность позитронов мала и они слабо вырождены со средней энергией $\sim kT$. В этих условиях пара-

*) Основной поток на нейтринносфере $F_\nu = \frac{cF_\nu}{4}$.

метр p определяется из (37.4г), а степень асимметрии антинейтринно, образующихся в реакции (37.13б) в $(\epsilon_{Fe}/kT)^2$ раз больше, чем у нейтринно в реакции (37.13а). При стационарном составе количество вылетающих нейтринно и антинейтринно одинаково, $\bar{\epsilon}_\nu \approx \epsilon_{Fe}$, $\bar{\epsilon}_{\bar{\nu}} \approx kT$. Как отметил М.Б. Волошин, импульс, передаваемый нейтринной звезде от антинейтринного импульса в $\sim \epsilon_{Fe}/kT$ раз больше, чем от нейтринного в этих условиях и направлен в ту же сторону. При $\epsilon_{Fe} = 10kT$ получаем, что скорость приобретаемая нейтринной звездой равна

$$v_n = v_n^{(\nu)} + v_n^{(\bar{\nu})} \approx \begin{cases} 13,2(B/B_c) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} (\Pi) \\ -0,72(B/B_c) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} (Д). \end{cases} \quad (37.18)$$

Эти скорости слишком малы для разрыва тесной пары при взрыве или для объяснения происхождения больших скоростей радиопульсаров.

г) **Нейтринные осцилляции в веществе.** Неодинаковость взаимодействия различных типов нейтринно с веществом приводит к изменению возможных нейтринных осцилляций в веществе по сравнению с вакуумом [160]. Различия связаны с тем, что электронные нейтринно взаимодействуют с веществом за счет заряженных и нейтральных токов, а μ - и τ -нейтринно практически только за счет нейтральных токов из-за больших масс мюона и тау-лептона. Влияние среды сводится к изменению глубины колебаний (угла перемешивания θ_m) и осцилляционной длины l_m , причем взаимодействия могут привести как к подавлению ($\theta_m < \theta$), так и к усилению ($\theta_m > \theta$) осцилляций, (θ, l — значения для вакуума). Усиление осцилляций в среде может быть либо для нейтринно (тогда для антинейтринно осцилляции ослабляются), либо для антинейтринно. В среде с переменной плотностью возможно резонансное усиление осцилляций, когда нейтринно данной

энергии перемешиваются в тонком слое при [544а]: $\rho = \rho_0 = \frac{\Delta(m^2)}{\epsilon_\nu} \times$
 $\times \frac{\mu z}{0,65 \cdot 10^{-7} \cos 2\theta (\text{г/см}^3)}, \sin 2\theta_m = \sin 2\theta / A, l_m = l / A, A = [\cos^2 2\theta \times$
 $\times (1 - \rho/\rho_0)^2 + \sin^2 2\theta]^{1/2}, l = 2,5 \epsilon_\nu / \Delta(m^2) (\text{м});$ ширина резонанса $\Delta\rho/\rho_0 = \text{tg } 2\theta$; ϵ_ν — энергия нейтринно (МэВ), $\Delta(m^2)$ — разность квадратов нейтринных масс ($e\mu$) или ($e\tau$) (эВ^2); для взаимодействий с электронами. Расчеты показали, что $(\nu_e \nu_\mu)$ и $(\nu_e \nu_\tau)$ — резонансные осцилляции на Солнце под влиянием вещества — могут существенно ослабить поток нейтринно от него [160, 274]. Это может быть объяснением очень малых измеренных потоков нейтринного ν_e излучения от Солнца (см. § 18).

Применение того же механизма для изучения нейтринно, излучаемых при коллапсе, сделано в [161]. Ввиду того что знак эффекта различен при взаимодействии с электронами и нейтронами, осцилляции в ядре и оболочке могут частично компенсироваться. В отсутствие осцилляций средние энергии излучаемых ν_e и $\bar{\nu}_e$ ниже, чем у $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ нейтринно, а нейтринно-сфера их больше, так что имеет место почти равномерное распределение между всеми шестью типами нейтринно, излучаемых при коллапсе [481а]. Действие осцилляций вне нейтринно-сферы может привести к существенным отклонениям от этого равномерного распределения. Осцилляциям подвержены либо нейтринно, либо антинейтринно, поэтому за счет механизма усиления осцилляций примерно половина нейтринного потока выходит наружу почти без ис-

кажения. Так как методы регистрации ν_e и $\bar{\nu}_e$ сильно отличны, для наблюдательных предсказаний очень важно установить, для каких частиц ν_e или $\bar{\nu}_e$ происходит усиление осцилляций в веществе. Несмотря на большую степень правдоподобия, существование вакуумных нейтринных осцилляций окончательно не доказано, а без них отсутствуют и осцилляции в веществе.

§ 38. Магниторотационная модель взрыва сверхновой

Энергия вращения нейтронной звезды, образующейся в результате коллапса, с помощью магнитного поля может быть преобразована в кинетическую энергию оболочки и привести к вспышке сверхновой и в том случае, когда рассмотренные выше механизмы взрывов оказываются неэффективными. Магниторотационная модель взрыва предложена в работе [31]*). Численные расчеты данной модели в цилиндрическом приближении сделаны в [291, 12], в сферически-симметричном приближении в [490] и в упрощенном варианте двумерной постановки в [516]. Результаты всех расчетов качественно согласуются и приводят к превращению $\sim 3\%$ энергии вращения в кинетическую энергию выброса. При $E_{\text{rot}} = 10^{53}$ эрг имеем $E_{\text{kin}} = 3 \cdot 10^{51}$ эрг, что достаточно для объяснения взрыва сверхновой.

а) **Механизм магниторотационного взрыва.** При быстром вращении предсверхновой в результате коллапса образуется быстровращающаяся нейтронная звезда, окруженная дифференциально вращающейся оболочкой, в которой центробежные силы сравнимы с гравитационными. Дифференциальное вращение в результате закручивания силовых линий приводит к линейному росту со временем магнитного поля, начальная энергия которого $\epsilon_M \ll \epsilon_G$. Когда поле в оболочке вырастает до величины $\epsilon_M \sim \epsilon_G$, магнитное давление выталкивает вещество наружу. Образующаяся волна сжатия распространяется по среде со спадающей плотностью, усиливается, превращается в ударную и приводит к мощному взрыву. В процессе движения волны сжатия и ударной волны наружу энергия ее продолжает возрастать за счет энергии вращения, извлекаемой посредством магнитного поля. С помощью магнитного поля внешним слоям передается также существенная часть вращательного момента системы. Качественная картина взрыва изложена в [31, 291, 280, 451]. Ранее [123] закручивание магнитных силовых линий применялось для объяснения передачи энергии от нейтронной звезды в Крабовидную туманность и поддержки ее свечения. Отметим работу [467], в которой сделан численный расчет коллапса вращающейся звезды с очень сильным начальным магнитным полем $\epsilon_M \sim \epsilon_G$. Полученная там картина взрыва в виде направленных выбросов вдоль оси диполя отличается от магниторотационного взрыва, в котором выброс происходит, в основном, в экваториальной плоскости. Начальные магнитные поля в [467] значительно превышают реально наблюдаемые.

б) **Основные уравнения.** Уравнения магнитной гидродинамики (МГД) с гравитацией в цилиндрических зйлеровых координатах (r, φ, z) при бес-

*) Косвенным свидетельством существенной роли магнитного поля при взрыве сверхновой являются наблюдения радиоизлучения на сравнительно ранних стадиях вспышки, начинающегося по прошествии примерно года после максимума блеска [619]. Радиоизлучение наблюдалось у СНИ, где предполагается рождение пульсара и в небольшой доле СНИЦ в которых также возможно рождение нейтронной звезды [582].

конечной проводимости, наличии плоскости симметрии $z = 0$ и аксиальной симметрии ($\partial/\partial\varphi = 0$) имеют вид [146]

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_G}{\partial r} + \frac{1}{c} (j_\varphi B_z - j_z B_\varphi), \quad (38.1)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \frac{1}{c} (j_z B_r - j_r B_z), \quad (38.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_G}{\partial z} + \frac{1}{c} (j_r B_\varphi - j_\varphi B_r), \quad (38.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = 0, \quad (38.4)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (v_z B_r - v_r B_z), \quad (38.5)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi B_z - v_z B_\varphi) - \frac{\partial}{\partial r} (v_r B_\varphi - v_\varphi B_r), \quad (38.6)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(v_z B_r - v_r B_z)], \quad (38.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (38.8)$$

$$j_r = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad (38.9)$$

$$j_\varphi = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad (38.10)$$

$$j_z = -\frac{c}{4\pi r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r}, \quad (38.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_G}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_G}{\partial z^2} = 4\pi G \rho, \quad (38.12)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v_r \frac{\partial E}{\partial r} + v_z \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{P}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -f_\nu, \quad (38.13)$$

$$P = P(\rho, T), \quad E = E(\rho, T), \quad f_\nu = f_\nu(\rho, T), \quad \text{см. гл. 1 и § 19.} \quad (38.14)$$

Здесь уравнения (38.1)–(38.3) – уравнения движения с магнитными полями, (38.4) – уравнение неразрывности, (38.5)–(38.7) – уравнения вращательности поля ($\partial \vec{B}/\partial t = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$), (38.8) – уравнение бездивергентности поля ($\text{div} \vec{B} = 0$), (38.9)–(38.11) – уравнения генерации поля электрическими токами (без токов смещения, $\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$), (38.12) – уравнение Пуассона, (38.13) – уравнение энергии, $\vec{v}(v_r, v_\varphi, v_z)$ – скорость, $\vec{B}(B_r, B_\varphi, B_z)$ – магнитная индукция, $\vec{j}(j_r, j_\varphi, j_z)$ – плотность тока, c – скорость света, φ_G – гравитационный потенциал.

Решение системы (38.1)–(38.14) ищется для звезды массы M при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \text{а) } P = \rho = T = B_\varphi &= 0 && \text{на внешней границе,} \\ \text{б) } v_r = j_r = B_r &= 0 && \text{при } r = 0, \\ \text{в) } v_\varphi = j_\varphi = B_\varphi &= 0 && \text{при } r = 0, \\ \text{г) } v_z = 0, \frac{\partial j_z}{\partial z} \text{ или } j_z = 0, \frac{\partial B_z}{\partial z} \text{ или } B_z &= 0 && \text{при } z = 0. \end{aligned} \quad (38.15)$$

При расчетах пренебрегается диссипативными процессами, учитывается нейтринное излучение в f_ν , для расчета ударных волн используется искусственная вязкость. В [13], где использовались лагранжевы координаты, введение искусственной вязкости состояло в замене P в уравнениях движения (38.1)–(38.3) и энергии (38.13) на величину

$$P + \omega_1 = P - \nu \operatorname{div} \vec{v} = P - \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right], \quad (38.16)$$

ν — коэффициент вязкости.

В начальный момент задаются распределения $\rho(\vec{r})$, $T(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$, причем последнее распределение должно удовлетворять условию отсутствия магнитных зарядов (38.8), а также приводить к конечным значениям $\vec{j}(\vec{r})$ по всей звезде, согласно (38.9)–(38.11). Поверхностные и линейные токи, связанные с сингулярностями $\vec{j}(\vec{r})$, в расчетах обычно не рассматривают. Если равенство (38.8) справедливо в начале, то оно сохранится со временем, если для определения поля использовать только уравнения (38.5) – (38.7).

в) Цилиндрическое приближение. В одномерной постановке рассматривается однородный по оси z цилиндр с $v_z = B_z = j_r = j_\varphi = 0$. Это соответствует пренебрежению движением вдоль оси z в реальной звезде. Основные уравнения с лагранжевой независимой переменной

$$s = \int_0^r \rho' r' dr' \quad (38.17)$$

запишутся в виде [291, 12]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (rv_r), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v_r, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{v_\varphi}{r}, \quad (38.18)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -r \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{1}{8\pi r} \frac{\partial}{\partial s} (rB_\varphi)^2 + g. \quad (38.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (rv_\varphi) = \frac{rB_r}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s} (rB_\varphi), \quad (38.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_\varphi}{\rho r} \right) = rB_r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right), \quad rB_r = A = \text{const}, \quad (38.21)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -P \frac{\partial}{\partial s} (rv_r) - f_\nu, \quad (38.22)$$

$$g = -2G \frac{2\pi(M_0 + s)}{r}. \quad (38.23)$$

Здесь M_0 — масса единицы длины однородно твердотельно вращающегося ядра, приходящаяся на один радиан, g — гравитационное ускорение. В [291, 12] использовалось приближенное уравнение состояния в виде

$$P = \begin{cases} 3,09 \cdot 10^{12} \rho^{5/3} \frac{1 + 1,59 \cdot 10^{-3} \rho^{1/3}}{(1 + 3,18 \cdot 10^{-3} \rho^{1/3})^2} + 6,5 \cdot 10^4 \rho^2 + \\ + aT^4/3 + \rho RT \text{ при } \rho < 3 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \\ 2,04 \cdot 10^{27} + 6,5 \cdot 10^4 \rho^2 + aT^4/3 + \rho RT \text{ при } \rho \geq 3 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \end{cases} \quad (38.24)$$

$$E = \begin{cases} \frac{4,635 \cdot 10^{12} \rho^{2/3}}{1 + 3,18 \cdot 10^{-3} \rho^{1/3}} + 6,5 \cdot 10^4 \rho + \frac{aT^4}{\rho} + \frac{3}{2} RT \\ \text{при } \rho < 3 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \\ 5,19 \cdot \frac{10^{27}}{\rho} + 2,41 \cdot 10^{18} (\rho - 3 \cdot 10^9)/\rho + 6,5 \cdot 10^4 \rho + \frac{aT^4}{\rho} + \frac{3}{2} RT \\ \text{при } \rho \geq 3 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \end{cases} \quad (38.25)$$

Здесь приближенно учтен переход от нерелятивистских к релятивистским электронам при сильном вырождении. После начала нейтронизации давление электронов принималось постоянным. Функция нейтринных потерь за счет урка-процессов принималась в виде (19.35)–(19.36) с функцией

$$\phi(\rho/T_9^3) = [1 + (7,1 \cdot 10^{-5} \rho/T_9^3)^{2/5}]^{-1}. \quad (38.26)$$

Помимо искусственной вязкости (38.16), в [291, 12] для описания вращательных разрывов рассматривался еще один ее вид:

$$\omega_2 = \mu \rho r^2 \frac{\partial}{\partial s} (v_\varphi/r), \quad (38.27)$$

так что член $\partial \omega_2 / \partial s$ добавлялся к правой части уравнения (38.20), а член $\omega_2 \frac{\partial}{\partial s} (v_\varphi/r)$ — к правой части уравнения энергии (38.22).

В начальный момент $t = 0$ принималось $T = 0$, а распределение плотности задавалось в виде [12]

$$\rho(s, 0) = a \exp[-b(r - R_0)^2]; \quad a, b = \text{const}. \quad (38.28)$$

Здесь $R_0 = R(0, t)$ — радиус ядра; M — масса оболочки на единицу длины и один радиан. Принималось $v_r(s, 0) = 0$, $B_\varphi(s, 0) = 0$ и использовались граничные условия (38.15а). Задавались также константа A из (38.21) и начальное распределение $v_\varphi(s, 0)$ из радиального уравнения равновесия (38.19) при $\partial v_r / \partial t = 0$:

$$\frac{v_\varphi^2(s, 0)}{r(s, 0)} - r(s, 0) \frac{\partial}{\partial s} P(s, 0) + g(s) = 0. \quad (38.29)$$

В процессе счета предполагалось сохранение вращательного момента системы ядро + оболочка, которое благодаря непрерывности v_φ на границе

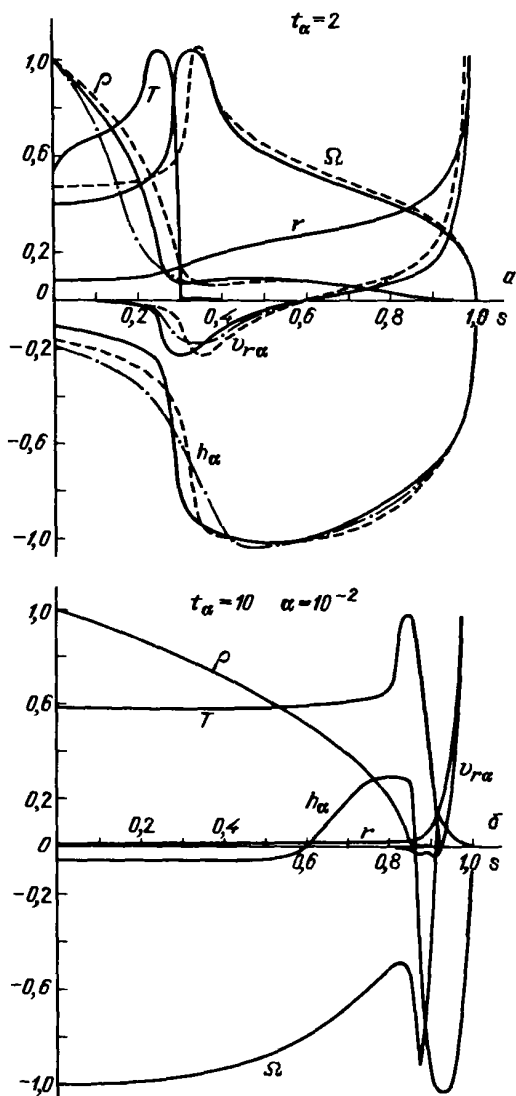


Рис. 98. а — распределение по безразмерному параметру s функций $\rho, T, r, \Omega, v_{r\alpha}, h_\alpha$ для случаев $\alpha = 0,01$ (сплошная линия), функций $\rho, v_{r\alpha}, h_\alpha, \Omega$ для $\alpha = 10^{-4}$ (штриховая линия), функций $\rho, v_{r\alpha}, h_\alpha$ для $\alpha = 10^{-8}$ (штрих-пунктир) на момент времени $t_\alpha = 2$. Все величины нормированы к максимальным значениям, которые в безразмерных переменных равны $\rho^* = 1,2$; $T^* = 60$; $r^* = 11,6$; $\Omega^* = 0,772$; $v_{r\alpha}^* = 6,04$; $|h_\alpha|^* = 0,513$. б — то же, что на а для $\alpha = 10^{-2}$ на момент времени $t_\alpha = 10$ ($\rho^* = 2,11$; $T^* = 42,1$; $r^* = 114$; $\Omega^* = 0,332$; $v_{r\alpha}^* = 15,6$; $|h_\alpha|^* = 0,42$) (из [12]).

ядра записывалось в виде граничного условия

$$\frac{M_0}{2} \frac{\partial h}{\partial s} - h = 0 \text{ при } s = 0, \quad (38.30)$$

$$h = rB_\varphi.$$

г) Результаты расчетов. Решение задачи проводилось численно в области $t > 0$, $0 < s < M$ ($R_0 < r < R(t)$). (38.31)

Ввиду отсутствия вращательных разрывов в [12] оказалось возможным ограничиться искусственной вязкостью ω_1 из (38.16), а коэффициент ν подбирался так, чтобы эффективная ширина размазывания ударной волны составляла несколько интервалов массовой сетки. Основными безразмерными параметрами задачи являются

$$\alpha = \frac{A^2}{4\pi M V_0^2} \quad (V_0 = \sqrt{2\pi G M_0}), \quad \beta = \frac{M_0}{M}. \quad (38.32)$$

Решение в [12] было получено для $\beta = 1, \alpha = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}$. При переходе к безразмерным величинам все переменные представлялись в виде $F = F_0 \tilde{F}$ со следующими масштабными переменными F_0 :

$$v_0 = V_0, \quad r_0 = R_0, \quad t_0 = R_0/V_0, \quad h_0 = A, \quad \rho_0 = M/R_0^2,$$

$$P_0 = M V_0^2 / R_0^2, \quad E_0 = V_0^2, \quad \Omega_0 = V_0/R_0 \quad (\Omega = v_\varphi/r), \quad (38.33)$$

$$s_0 = M, \quad T_0 = V_0^2/10^3 R, \quad f_{\nu 0} = V_0^3/R_0$$

при $R_0 = 10^6$ см, $2\pi M_0 = 0,5 \cdot 10^{-6} M_\odot$.

С уменьшением параметра α характерные времена процессов растут $\sim \alpha^{-1/2}$. При $\alpha \rightarrow 0$ удобно ввести безразмерные функции

$$t_\alpha = t \alpha^{1/2}, \quad v_{r\alpha} = v_r \alpha^{-1/2}, \quad h_\alpha = h \alpha^{1/2}, \quad f_{\nu\alpha} = f_\nu \alpha^{-1/2}, \quad (38.34)$$

связи между которыми оказываются одинаковыми при всех малых α . Для остальных функций $F_\alpha = F$. Результаты численных расчетов представлены на рис. 98–102 из [12]. На рис. 98 и 99 видно распространение медленной ($v < v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$) ударной МГД волны по оболочке. Область резкого пика температуры за фронтом разрыва является главным источником нейтринного излучения (рис. 101). Из рис. 98, 101, 102 видно, что зависимости между переменными (38.34) слабо меняются при уменьшении α . Увеличение характерного времени $\sim \alpha^{-1/2}$ связано с ростом числа оборотов $\sim \alpha^{-1/2}$ магнитных силовых линий для достижения условия $\epsilon_M \sim \epsilon_G$, при котором начинается разлет. Из рис. 100 видно увеличение числа оборотов с уменьшением α для того же момента t_α . Рис. 102 иллюстрирует переход энергии вращения в другие виды энергии.

Оценки, основанные на учете сферического гравитационного потенциала реальной звезды и проведенных численных расчетов, дают для массы и энергии улетевшего вещества

$$M_B \approx 0,13 M, \quad \epsilon_B \approx 0,035 \epsilon_{\text{rot}}, \quad (38.35)$$

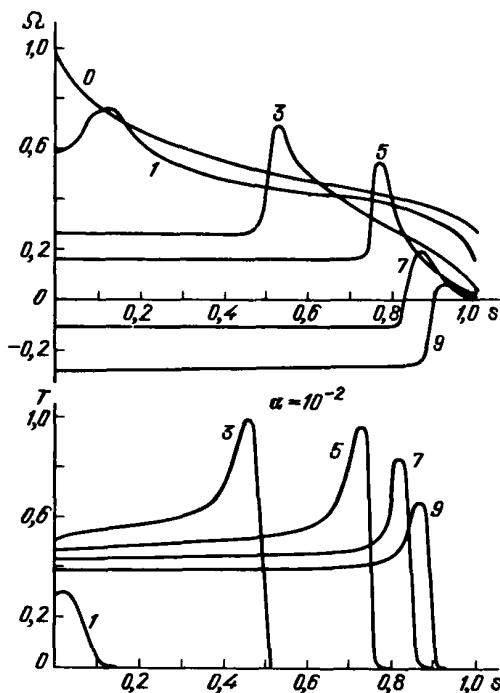


Рис. 99. Распределение по безразмерному параметру s температуры T и угловой скорости Ω , нормированных к максимальным безразмерным значениям $T^* = 64.6$ и $\Omega^* = 1$ на разные моменты времени для $\alpha \approx 0,01$. Возле каждой кривой указан момент времени t_α , которому она соответствует (из [12])

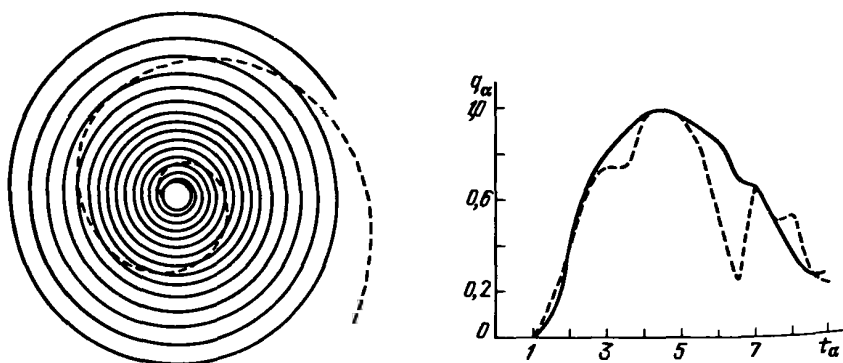


Рис. 100. Форма силовых линий магнитного поля в области вблизи ядра на момент времени $t_\alpha = 7$ для $\alpha = 0,01$ (штриховая линия) и $\alpha = 10^{-4}$ (сплошная линия) (из [12])

Рис. 101. Нейтринная светимость $q_\alpha = \frac{1}{\int \nu \alpha ds}$ как функция времени t_α , нормированная к максимальному безразмерному значению $q_\alpha^* = 1,4$ для случаев $\alpha = 0,01$ (штриховая линия) и $\alpha = 10^{-4}$ (сплошная линия) (из [12])

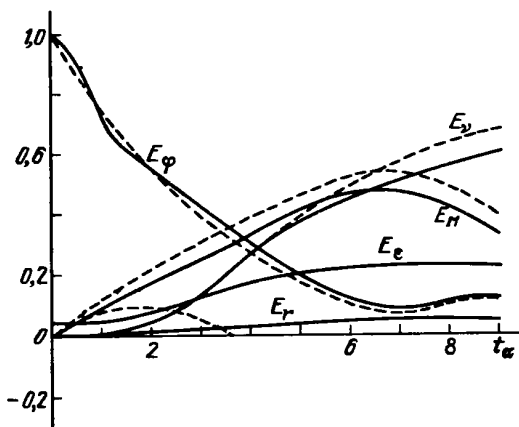


Рис. 102. Изменение со временем t_α вращательной E_φ , радиальной кинетической E_r , внутренней тепловой E_e и магнитной E_M энергий, полных потерь энергии за счет излучения нейтрино E_n для $\alpha = 0,01$ (сплошная линия) и $\alpha = 10^{-4}$ (штриховая линия). Все величины нормированы к максимальному значению вращательной энергии $E_\varphi^* = 10^{47}$ эрг/см на единицу длины цилиндра (из [12])

причем эти цифры справедливы для малых α ; для $\alpha = 10^{-2}$ получается $\epsilon_v \approx 0,08 \epsilon_{\text{rot}}$. Основная часть оболочки присоединяется к ядру и вращается вместе с ним твердотельно. Угловая скорость результирующей модели составляет $\sim 0,1 V_0/R_0$, т.е. уменьшается в ~ 10 раз по сравнению с начальной. Основная доля начальной энергии вращения уносится в виде нейтринного излучения, а большая часть вращательного момента уносится выброшенной оболочкой. Интегральный нейтринный поток $Q_\nu = \int_0^{t_\alpha} \int_0^M f_\nu ds dt = \int_0^{t_\alpha} \int_0^M f_{\nu\alpha} ds dt_\alpha$ слабо зависит от α .

Интересным результатом расчетов является возможная стадия магниторотационных колебаний системы ядро—оболочка, в процессе которых угловая скорость меняет знак. В результирующем ядре угловая скорость может иметь направление, противоположное начальному. В результате магниторотационного взрыва возможно образование молодых пульсаров, угловая скорость которых в примерно десять раз меньше скорости предельного вращения.

После сброса оболочки остается молодой пульсар, продолжающий поддерживать ускорение оболочки давлением своего излучения в виде частиц высоких энергий или дипольного электромагнитного излучения [518, 304]. Действие магнитогидродинамического ротационного механизма сброса оболочки и следующая за ним активность молодого пульсара, видимо, проявлялись при взрыве и формировании кривой блеска сверхновой SN 1987A [596].

ПОСЛЕДНИЕ СТАДИИ ЗВЕЗДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

На последних стадиях эволюции ядерные источники энергии исчерпаны и звезда светит за счет остывания. При этом она сравнительно холодная с очень большой плотностью, когда давление связано в основном с вырождением вещества. В 1931 г. С. Чандрасекхар [322] получил фундаментальный результат о существовании предельной массы звезды, давление которой определяется вырожденными электронами (белый карлик). При $\rho_c > 1,15 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ (для ^{56}Fe , см. табл. 44 для других ядер) начинается нейтронизация и звезды становятся неустойчивыми. Только при $\rho_c \approx 1,5 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ снова появляются устойчивые звезды (нейтронные), которые существуют до $\rho_c \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, когда наступает неустойчивость за счет эффектов общей теории относительности (ОТО). Существование предела массы нейтронных звезд установлено Оппенгеймером и Волковым в 1939 г. [517], но численное значение этого предела многократно пересчитывалось для различных уравнений состояния. Решение уравнений равновесия для холодных звезд (22.1) – (22.2) в ньютоновской теории и (40.3) – (40.4) в ОТО при известном уравнении состояния $P(\rho)$ позволило получить кривую $M(\rho_c)$, наглядно отражающую существование двух предельных масс и области неустойчивости (падающие $M(\rho_c)$). На рис. 103 дана кривая $M(\rho_c)$ из [267] для приведенного там уравнения состояния, соответствующего минимуму энергии вещества (см. табл. 8).

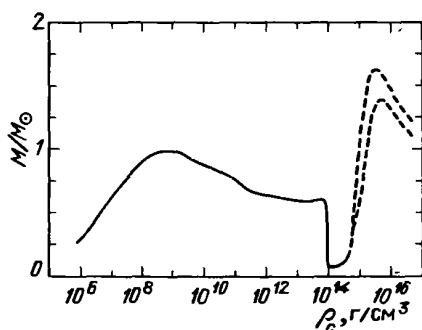


Рис. 103. Зависимость массы от центральной плотности для невращающихся звезд нулевой температуры в состоянии полного ядерного равновесия. Звезды слева от максимума (Чандрасекхаровского предела) при $\rho_c = 1,4 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$ есть устойчивые белые карлики, а справа от минимума при $\rho_c = 1,55 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ – нейтронные звезды. При построении штриховых линий используются уравнения состояния, полученные Пандарипанде с учетом гиперонов (нижняя кривая) и для чистых нейтронов (верхняя). Нейтронные звезды за вторым максимумом неустойчивы

Белые карлики (до первого максимума $M(\rho_c)$) образовались из звезд с начальными массами $M_i \leq 8 M_\odot$, нейтронные звезды (между минимумом и вторым максимумом) – из звезд с начальными массами $M_i = 8 \div M_{\text{lim}}$, где $M_{\text{lim}} = 20 - 50 M_\odot$. Если $M_i > M_{\text{lim}}$, то в результате коллапса возможно образование черной дыры.

Эволюционные пути определяют реальные массы белых карликов и нейтронных звезд. Из наблюдений массы одиночных белых карликов $\geq 0,6 M_\odot$ [566, 148], а в двойных системах могут быть гораздо меньше (см., например, [34a]). Наблюдательные оценки массы нейтронных звезд $\sim 1,4 M_\odot$ [605].

§ 39. Белые карлики

а) Случай $T = 0$. Когда давление обусловлено вырожденными электронами (2.22) с постоянным μ_Z , уравнения равновесия (22.1) – (22.2) приводятся к одному уравнению [218]

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\sqrt{y^2 + 1}}{dr} \right) = - \frac{y^3}{l_1^2}, \quad (39.1)$$

$$l_1 = \frac{1}{2 \mu_Z m_u m_e} \left(\frac{3 \pi \hbar^3}{c G} \right)^{1/2} = \frac{7,77 \cdot 10^8}{\mu_Z} \text{ см},$$

где y определено в (2.21), а μ_Z в (2.17). Имеем из (2.19)

$$\rho = B y^3, \quad B = \frac{m_e^3 c^3 \mu_Z m_u}{3 \pi^2 \hbar^3} = 9,74 \cdot 10^5 \mu_Z. \quad (39.2)$$

Решение уравнения (39.1) позволяет получить зависимости $M(\rho_c)$, $R(\rho_c)$ для холодных белых карликов [218]. Для больших ($y \gg 1$) и малых ($y \ll 1$) плотностей уравнение состояния (2.22), (2.23) сводится к полиномиальным. С учетом (2.31) имеем

$$\begin{aligned} P &= \frac{m_e^4 c^5}{15 \pi^2 \hbar^3} y^5 = \frac{(3 \pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e (\mu_Z m_u)^{5/3}} \rho^{5/3} = \\ &= \frac{1,0036 \cdot 10^{13}}{\mu_Z^{5/3}} \rho^{5/3} \quad \text{при } y \ll 1, \end{aligned} \quad (39.3)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{m_e^4 c^5}{12 \pi^2 \hbar^3} y^4 = \frac{(3 \pi^2)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c}{(\mu_Z m_u)^{4/3}} \rho^{4/3} = \\ &= \frac{1,2435 \cdot 10^{15}}{\mu_Z^{4/3}} \rho^{4/3} \quad \text{при } y \gg 1. \end{aligned} \quad (39.4)$$

Из (39.3), (34.2) и (34.6) получаем зависимости для нерелятивистских белых карликов

$$M = \frac{3 \pi^{3/2}}{2 (\mu_Z m_u)^{5/2}} \left(\frac{\hbar^2}{2 G m_e} \right)^{3/2} M_{1,5} \rho_c^{1/2} = \frac{2,81 M_\odot}{\mu_Z^2} \left(\frac{\rho_{c6}}{\mu_Z} \right)^{1/2}, \quad (39.5)$$

где [218] $M_n = 2,71406$ для $n = 1,5$ (см. (34.7)), $\rho_{c6} = \rho_c \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} < 0,3 \mu_Z$

$$R = \frac{(9 \pi)^{1/6}}{2 \sqrt{2}} \frac{\hbar \xi_1 \rho_c^{-1/6}}{(G m_e)^{1/2} (\mu_Z m_u)^{5/6}} = \frac{2,00 \cdot 10^9}{\mu_Z} \left(\frac{\mu_Z}{\rho_{c6}} \right)^{1/6} \text{ см}, \quad (39.6)$$

Массы M и радиусы R белых карликов, состоящих из ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{24}\text{Mg}$ и ${}^{56}\text{Fe}$. Приведены также значения без учета кулоновских взаимодействий и нейтроинизации M_{Ch} и R_{Ch} для $\mu_Z = 2,56/26$. Значения $(M_{\text{Ch}}\mu_Z^2)$, $(R_{\text{Ch}}\mu_Z)$ одинаковы для всех μ_Z при тех же (ρ_c/μ_Z) (из [384])

	$\rho_c/\text{см}^3$	3,16 (3)	7,08 (3)	8,71 (3)	1,23 (4)
$\mu_Z = 2$	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$				
	$R_{\text{He}}, \text{ см}$				
	$M_{\text{He}}, M_{\odot}$				
	$R_{\text{C}}, \text{ см}$				
	$M_{\text{C}}, M_{\odot}$				
	$R_{\text{Mg}}, \text{ см}$				
	$M_{\text{Mg}}, M_{\odot}$				
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$				
$\mu_Z = \frac{56}{26}$	$R_{\text{Fe}}, \text{ см}$	1,402 (9)	1,463 (9)	1,465 (9)	1,459 (9)
	$M_{\text{Fe}}, M_{\odot}$	7,0 (-3)	1,5 (-2)	1,8 (-2)	2,4 (-2)
	$\rho_c/\text{см}^3$	1,95 (6)	3,58 (6)	6,95 (6)	1,56 (7)
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$	9,702 (8)	8,658 (8)	7,614 (8)	6,47 (8)
$\mu_Z = 2$	$R_{\text{He}}, \text{ см}$	0,512	0,622	0,748	0,899
	$M_{\text{He}}, M_{\odot}$	9,521 (8)	8,519 (8)	7,510 (8)	6,40 (8)
	$R_{\text{C}}, \text{ см}$	0,499	0,609	0,734	0,885
	$M_{\text{C}}, M_{\odot}$	9,382 (8)	8,408 (8)	7,426 (8)	6,33 (8)
	$R_{\text{Mg}}, \text{ см}$	0,488	0,597	0,722	0,872
	$M_{\text{Mg}}, M_{\odot}$	9,222 (8)	8,289 (8)	7,336 (8)	6,26 (8)
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$	0,476	0,584	0,708	0,857
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$	9,138 (8)	8,150 (8)	7,176 (8)	6,10 (8)
$\mu_Z = \frac{56}{26}$	$R_{\text{Fe}}, \text{ см}$	0,430	0,525	0,633	0,765
	$M_{\text{Fe}}, M_{\odot}$	8,394 (8)	7,579 (8)	6,74 (8)	5,78 (8)
	$\rho_c/\text{см}^3$	0,380	0,471	0,576	0,703
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$	1,95 (9)	3,16 (9)	6,00 (9)	7,67 (9)
$\mu_Z = 2$	$R_{\text{He}}, \text{ см}$		1,82 (8)	1,52 (8)	
	$M_{\text{He}}, M_{\odot}$		1,411	1,426	
	$R_{\text{C}}, \text{ см}$				
	$M_{\text{C}}, M_{\odot}$		1,80 (8)	1,50 (8)	
	$R_{\text{Mg}}, \text{ см}$		1,381	1,396	
	$M_{\text{Mg}}, M_{\odot}$		1,79 (8)	1,69 (8)	
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$		1,363	1,282	
	$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{Ch}}, \text{ см} \\ M_{\text{Ch}}, M_{\odot} \end{array} \right.$				
$\mu_Z = \frac{56}{26}$	$R_{\text{Fe}}, \text{ см}$	1,99 (8)			1,37 (8)
	$M_{\text{Fe}}, M_{\odot}$	1,093			1,028

3,16 (4)	1,22 (5)	2,44 (5)	5,47 (5)	1,06 (6)
	1,582 (9)	1,405 (9)	1,220 (9)	1,084 (9)
	0,164	0,204	0,316	0,411
	1,518 (9)	1,359 (9)	1,189 (9)	1,061 (9)
	0,154	0,213	0,305	0,399
	1,469 (9)	...	...	...
	0,147	...	...	...
	1,414 (9)	1,283 (9)	1,136 (9)	1,022 (9)
	0,139	0,196	0,286	0,378
	1,488 (9)	1,322 (9)	1,148 (9)	1,020 (9)
	0,136	0,187	0,265	0,345
1,395 (9)	1,233 (9)	1,136 (9)	1,019 (9)	9,243 (8)
4,6 (-2)	0,103	0,149	0,222	0,298
5,26 (7)	1,61 (8)	6,68 (8)	1,15 (9)	1,92 (9)
5,00 (8)	3,87 (8)	2,74 (8)		2,08 (8)
1,097	1,235	1,347		1,396
4,91 (8)	3,81 (8)	2,70 (8)		2,06 (8)
1,070	1,206	1,318		1,366
4,86 (8)	3,79 (8)	2,69 (8)		2,05 (8)
1,053	1,190	1,300		1,348
4,51 (8)	3,52 (8)	2,50 (8)	2,19 (8)	
0,872	0,991	1,088	1,112	
1,00 (10)	2,45 (10)	2,51 (10)	3,61 (10)	
1,32 (8)		1,01 (8)		
1,434		1,444		
1,45 (8)		1,18 (8)		
1,349		1,174		
1,50 (8)				
1,205				
9,60 (7)		8,84 (7)		
1,014		0,990		

где [218] $\xi = 3,65375$ для $n = 1,5$ (см. (34.2)). Из (39.5), (39.6) получаем зависимость $R(M)$ в виде

$$R = \frac{2,82 \cdot 10^9}{\mu_Z^{5/3}} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{1/3} \text{ см.} \quad (39.7)$$

Для ультрарелятивистских электронов с $\gamma = 4/3$, $n = 3$ имеется только одно значение равновесной массы из (39.4), (34.6)

$$M_{\text{Ch}} = \frac{\sqrt{3} \pi}{2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_Z m_u)^2} M_3 = \frac{5,83}{\mu_Z^2} M_\odot, \quad (39.8)$$

(M_3 см. в (34.14))

которое называется Чандрасекаровским пределом и получено в [322]. Простой вывод формулы (39.8) был сделан позже независимо Л.Д. Ландау [141]. Радиус политропной звезды с $n = 3$ может быть произвольным, так как она равновесна при любой центральной плотности (см. (34.6)). При приближении M к M_{Ch} и $n \rightarrow 3$ радиус белого карлика быстро убывает и зависит только от ρ_c . В этом пределе

$$R = 5,31 \cdot 10^8 \rho_{c9}^{-1/3} \mu_Z^{-2/3} \text{ см} \quad \text{для } \rho_{c9} = \frac{\rho_c}{10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \geq 0,3 \mu_Z. \quad (39.9)$$

Учет кулоновского взаимодействия (см. § 4, п. ж) уменьшает давление при той же плотности и, соответственно, уменьшит M по сравнению с [218]. В ультрарелятивистском пределе (4.32) поправка связана с поправкой к давлению. Чандрасекаровская масса с учетом кулоновского взаимодействия $M_{\text{Ch},q}$, согласно (4.32), (34.6), (39.8) равна

$$M_{\text{Ch},q} = \frac{5,83}{\mu_Z^2} (1 - 4,56 \cdot 10^{-3} Z^{2/3} - 1,78 \cdot 10^{-5} Z^{4/3} + 1,16 \cdot 10^{-3})^{3/2} M_\odot. \quad (39.10)$$

При

$Z = 2, 6, 12, 26$ имеем

$$M_{\text{Ch},q}/M_{\text{Ch}} = 0,991, 0,979, 0,965, 0,940,$$

$$M_{\text{Ch},q} = 1,44, 1,43, 1,41, 1,18,$$

для ^4He , ^{12}C , ^{24}Mg и ^{56}Fe соответственно.

С уменьшением плотности кулоновская поправка становится более существенной. Нейтронизация замедляет рост давления и приводит к неустойчивости белого карлика, наступающей в максимуме кривой $M(\rho_c)$ при плотности, немного превышающей плотность нейтронизации из табл. 44 (см. рис. 103 и гл. 12). Модели белых карликов с учетом кулоновских поправок и нейтронизации рассчитаны в работе [384] с использованием уравнения состояния (4.30) – (4.32) и приведены в табл. 47. Анализ устойчивости звезды с фазовым переходом (см. § 45) показывает, что потеря устойчивости для равновесной нейтронизации происходит при конечном

ядре новой фазы *). Для цепочки $^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn} \rightarrow ^{56}\text{Cr}$ в точке потери устойчивости имеем [56]

$$\frac{M_{\pi}}{M} = 1,4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\Delta M}{M} = 2,1 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\Delta \rho_c}{\rho_{c1}} = 0,022, \quad (39.11)$$

где M_{π} — масса ядра новой фазы, ΔM — увеличение массы звезды от начала нейтронизации до потери устойчивости, $\Delta \rho_c$ — соответствующее увеличение центральной плотности. В расчетах [56] начало нейтронизации предполагалось при $\rho_{c0} = 1,15 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ (захват на основной уровень, см. § 4, пп. а и д), а кулоновскими поправками пренебрегалось. На границе ядра новой фазы плотность скачком возрастает в 26/24 раза и достигает $\rho_{c1} = 1,25 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Относительные величины (39.11) мало изменятся при небольших изменениях ρ и M . Структура и устойчивость вращающихся белых карликов будут рассмотрены в § 44. С уменьшением массы уменьшается плотность звезды и увеличивается роль кулоновских поправок, которые делают уравнение состояния более жестким (уменьшение n , рост γ). Это приводит к отклонению от закона (39.7) настолько, что радиус достигает максимального значения и уменьшается при дальнейшем уменьшении M (табл. 47). В [647] равновесные состояния холодных звезд малой массы построены с использованием более точного уравнения состояния, допускающего большие отклонения от идеальности типа (4.33). Результаты расчетов аппроксимируются зависимостью

$$0,424 \left(\frac{M}{M_0} \right)^{1/3} \frac{R}{R_0} = \left(1 - \frac{R^3}{R_0^3} \frac{M_0}{M} \Phi \right)^5, \quad (39.12)$$

где

$$M_0 = \left(\frac{P_0}{G} \right)^{3/2} \rho_0^{-2} = \left(\frac{Z}{A} \right)^2 Z \cdot 3,58 \cdot 10^{30} \text{ г},$$

$$R_0 = \left(\frac{P_0}{G} \right)^{1/2} \rho_0^{-1} = \frac{Z}{A} Z^{-1/3} \cdot 9,73 \cdot 10^9 \text{ см}.$$

Постоянные P_0 , ρ_0 и Φ определены в (4.34). При $R^3 M_0 \Phi / R_0^3 M \ll 1$ соотношение (39.12) сводится к (39.7). Из (39.12) следует существование максимума на кривой $R(M)$. Значения максимальных радиусов $R_{\text{сг}}$ и соответствующие им $M_{\text{сг}}$, полученные из численных расчетов, приведены в табл. 48 из [647] для различных химических составов. Величины $R_{\text{сг}}$ и $M_{\text{сг}}$, следующие из (39.12), дают погрешности $\sim 1\%$ для $R_{\text{сг}}$ и $\sim 25\%$ для $M_{\text{сг}}$. Погрешности формулы (39.12) растут с уменьшением M . В звездах с $M \leq M_{\text{сг}}$ вещество находится в жидком состоянии и они представляют собой настоящие планеты типа Юпитера. Соотношение $R(M)$

*) В работе [384] устойчивые модели белых карликов с конечным ядром новой фазы пропущены, поэтому кривая $M(\rho_c)$ ошибочно имеет максимум при ρ_c , совпадающим с началом нейтронизации.

Максимальные значения $R_{\text{сг}}$ и соответствующие массы $M_{\text{сг}}$ для различных составов (из [647])

Элемент	$M_{\text{сг}}/M_{\odot}$	$R_{\text{сг}}, \text{см}$	Элемент	$M_{\text{сг}}/M_{\odot}$	$R_{\text{сг}}, \text{см}$
H	3,16(-3)	8,15(9)	^{12}C	2,24(-3)	2,74(9)
$x_{\text{H}} = 0,75$	2,63(-3)	6,99(9)	^{24}Mg	3,89(-3)	2,28(9)
$x_{\text{He}} = 0,25$			^{56}Fe	5,89(-3)	1,70(9)
^4He	1,12(-3)	3,57(9)			

из табл. 47 находится в хорошем согласии с наблюдаемыми значениями для трех белых карликов в двойных системах [148].

б) Учет конечного значения T и остывание. Приближенная теория остывания белых карликов разработана независимо С.А.Капланом [122] и Л.Местелом [483] и изложена в [229]. Белый карлик разделяется на лучистую невырожденную оболочку и вырожденное изотермическое ядро. На границе между этими областями предполагается равенство давлений вырожденных P_d и невырожденных $P_{nd} = k\rho T/\mu_Z m_e$ электронов, что в нерелятивистском случае с P_α из (39.3) сводится к соотношению между

Таблица 49

Параметры углеродного белого карлика с $M = 1M_{\odot}$ в процессе остывания

№	1	2	3	4	5
τ , годы	3,02 (6)	9,46 (6)	8,97 (7)	3,13 (8)	8,18 (8)
$L/L_{\odot}$	6,81 (-1)	3,13 (-1)	4,29 (-2)	7,96 (-3)	1,92 (-3)
T_{ef}, K	5,81 (4)	4,82 (4)	2,96 (4)	1,95 (4)	1,37 (4)
R , см	5,71 (8)	5,65 (8)	5,52 (8)	5,47 (8)	5,46 (8)
T_c , K	6,98 (7)	5,31 (7)	2,48 (7)	1,32 (7)	7,64 (6)
ρ_c , г · см $^{-3}$	3,15 (7)	3,21 (7)	3,30 (7)	3,34 (7)	3,36 (7)
ψ_c	146,0	193,5	419,3	795,3	1374
Γ_c	16,2	21,4	46,2	87,6	151
θ_c/T_c	0,140	0,185	0,402	0,764	1,32
$R_{1/2}$, см	2,50 (8)	2,49 (8)	2,46 (8)	2,45 (8)	2,45 (8)
$\psi_{1/2}$	81,31	106,6	229,0	433,6	748,7
$\Gamma_{1/2}$	10,9	14,2	30,4	57,3	98,9
$\theta_{1/2}/T_{1/2}$	0,0759	0,0995	0,214	0,404	0,698
T_e , K	1,23 (7)	1,11 (7)	8,45 (6)	6,24 (6)	4,55 (6)
ρ_e , г/см 3	350	402	546	689	807
R_e , см	5,64 (8)	5,58 (8)	5,48 (8)	5,43 (8)	5,42 (8)
ψ_e	-0,504	-0,161	0,804	1,95	3,354
Γ_e	2,05	2,37	3,46	5,04	7,32
$\lg(1-q)_{\text{conv}}$	-10,7	-10,5	-8,98	-8,81	-8,85

$q = m/M$ — доля внутренней массы, индексы "с" — центр; "1/2" — точка $q = 0,5$; "e" — точка $q = 1 - 10^{-6}$, "conv" — внутренняя граница конвективной зоны (из [457]).

граничными значениями ρ_* и T_* .

$$\rho_* = \left(\frac{5 m_e}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\mu_Z m_u}{3 \pi^2} (k T_*)^{3/2} = 2,38 \cdot 10^{-8} \mu_Z T_*^{3/2} \text{ г} \cdot \text{см}^3. \quad (39.13)$$

Решая в лучистой оболочке уравнение теплопроводности (22.4а) при $L = \text{const}$

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{4 a c} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L}{4 \pi r^2} \quad (39.14)$$

и равновесия (22.1) при $m = M = \text{const}$

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GM \rho}{r^2}, \quad (39.15)$$

для краммерсовского закона непрозрачности из-за свободно-связанных переходов (7.18) при $t/\bar{g}_{bf} = 10$

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3,5}, \quad \kappa_0 = 4,34 \cdot 10^{24} x_Z (1 + x_H), \quad (39.16)$$

получаем уравнение

$$\frac{dP}{dT} = \frac{4 a c}{3} \frac{4 \pi G M}{\kappa_0 L} \frac{T^{6,5}}{\rho}, \quad \rho = \frac{\mu m_u P}{k T}, \quad (39.17)$$

6	7	8	9	10	11	12
9,16 (8)	1,29 (9)	2,09 (9)	3,69 (9)	5,52 (9)	8,09 (9)	9,10 (9)
1,63 (-3)	1,12 (-3)	6,19 (-4)	2,36 (-4)	7,53 (-5)	1,29 (-5)	3,04 (-6)
1,32 (4)	1,20 (4)	1,04 (4)	8,15 (3)	6,12 (3)	3,94 (3)	2,75 (3)
5,45 (8)	5,43 (8)	5,42 (8)	5,41 (8)	5,41 (8)	5,41 (8)	5,41 (8)
7,11 (6)	6,05 (6)	4,49 (6)	2,59 (6)	1,42 (6)	4,81 (5)	1,67 (5)
3,37 (7)	3,37 (7)	3,37 (7)	3,38 (7)	3,38 (7)	3,38 (7)	3,38 (7)
1474	1737	2346	4059	7428	21880	63130
162	191	257	446	815	2400	6940
1,42	1,67	2,25	3,42	7,13	21,0	60,7
2,45 (8)	2,45 (8)	2,44 (8)	2,44 (8)	2,44 (8)	2,44 (8)	2,44 (8)
803,5	946,6	1278	2211	4047	11920	34390
106	125	169	292	534	1570	4540
0,750	0,884	1,19	2,06	3,78	10,9	32,1
4,38 (6)	3,96 (6)	3,12 (6)	1,92 (6)	1,15 (6)	4,22 (5)	1,51 (5)
820	847	906	971	1000	1030	1040
5,41 (8)	5,41 (8)	5,41 (8)	5,40 (8)	5,40 (8)	5,40 (8)	5,40 (8)
3,556	4,074	5,528	9,557	16,46	45,87	129,3
7,65	8,54	11,1	18,4	31,1	85,7	240
-8,86	-8,50	-7,58	-7,53	-8,22	-9,11	-9,24

решение которого имеет вид

$$\rho = \left(\frac{8ac}{3 \cdot 8,5} \frac{4\pi GM}{\kappa_0 L} \frac{\mu m_u}{k} \right)^{1/2} T^{3,25}. \quad (39.18)$$

Считая (39.18) справедливым на границе между ядром и оболочкой и учитывая (39.13), получим окончательно

$$\begin{aligned} L &= \frac{8\pi^6}{8,5 \cdot 625} \frac{4\pi cGM}{\kappa_0} \frac{\hbar^3}{m_e^3 m_u c^3} \frac{\mu T_*^{3,5}}{\mu_Z^2} = \\ &= 5,75 \cdot 10^5 \frac{\mu T_*^{3,5}}{\mu_Z^2} \frac{M/M_\odot}{x_Z(1+x_H)} \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned} \quad (39.19)$$

В вырожденном ядре температура почти постоянна благодаря высокой теплопроводности вырожденных электронов (см. (7.32), (8.41)) и равна T_* , поэтому формула (38.19) определяет светимость белого карлика в зависимости от температуры ядра.

Запас тепловой энергии изотермического белого карлика Q_T с температурой T определяют в основном невырожденные ядра

$$Q_T = \frac{3}{2} \frac{kT}{Am_u} M. \quad (39.20)$$

Решая уравнение энергии

$$\dot{Q} = -L \quad (39.21)$$

при $Q = Q_T$, получаем для времени остывания τ от температуры ядра T_0 до T

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3 \cdot 8,5 \cdot 625}{16\pi^6 \cdot 2,5} \frac{k}{A} \frac{\kappa_0}{4\pi cG} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \frac{\mu_Z^2}{\mu} (T^{-2,5} - T_0^{-2,5}) = \\ &= 1,72 \cdot 10^{35} \frac{x_Z(1+x_H)}{A} \frac{\mu_Z^2}{\mu} (T^{-2,5} - T_0^{-2,5}) \text{ с} = \\ &= 1,72 \cdot 10^{10} \frac{x_Z(1+x_H)}{A} \frac{\mu_Z^2}{\mu} (T_7^{-2,5} - T_{7,0}^{-2,5}) \text{ лет}, \end{aligned} \quad (39.22)$$

$$T_7 = T \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

Зависимость $L(t)$ с учетом (39.19), (39.22) определяется формулой

$$L = \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{t_{10}^{7/5}} \frac{M}{M_\odot} \frac{x_Z^{2/5} (1+x_H)^{2/5}}{A^{7/5}} \frac{\mu_Z^{4/5}}{\mu^{2/5}} L_\odot, \quad (39.23)$$

$$t_{10} = t \cdot 10^{-10} \text{ лет.}$$

В оболочках белых карликов обычно принимается [229, 227] $x_Z = 0,1$, $x_H = 0$, что дает $\mu_Z = 2$, $\mu = 1,38$, $\mu / [\mu_Z^2 x_Z (1 + x_H)] = 3,45$. Когда по мере остывания температура белого карлика станет меньше T_g из (4.42) приближение идеального газа нарушается и (39.16) становится неприменимым. При дальнейшем остывании вещество становится кристаллическим при $T = T_m$ из (4.37), а при $T < \theta$ из (4.38) кристалл становится квантовым. Фазовый переход в кристаллическое состояние, возможно, сопровождается выделением тепла $\delta U_{\text{Сол}}^{\text{из}} (4.43)$. Тепловая энергия кристалла задается формулой Дебая (4.38), а при $T_m < T < T_g = 150 T_m$ можно использовать интерполяцию между идеальным газом (39.16) и классическим кристаллом (4.38), (4.39). Учет эффектов неидеальности сначала замедляет остывание за счет роста теплоемкости классического кристалла и возможного выделения тепла при фазовом переходе, а после образования квантового кристалла остывание ускоряется за счет уменьшения теплоемкости $\sim (T/\theta)^3$ (см. (4.38), (4.39)). Эти факторы, а также кулоновские поправки к уравнению состояния, нейтринное охлаждение, неполная ионизация, электронная теплопроводность в неизотермическом ядре, конвекция, учтены в работе [457], где численно исследовалось остывание углеродного белого карлика с массой $1 M_\odot$ на основе уравнений звездной эволюции (см. § 22). Результаты расчетов [457] представлены на рис. 104, 105 и в табл. 49. Из рис. 104 видно, небольшое замедление остывания

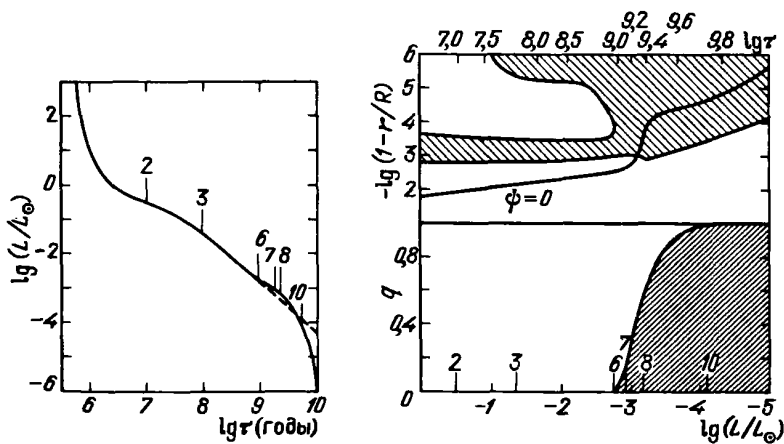


Рис. 104. Кривая охлаждения белого карлика: светимость L в зависимости от возраста τ . Номера соответствуют моделям из табл. 49: 2 – модель с $L_\nu = L$, 3 – модель, где электронная теплоемкость $c_{ve,1/2}$ равна ионной $c_{vi,1/2}$, 6 – начало кристаллизации, 7 – модель, где $\theta_{1/2} = T_{1/2}$, 8 – конвекция достигает вырожденного ядра, 10 – кристаллическое ядро достигает $q = 0,99$. Штриховой линией указана кривая остывания по степенному закону (из [457])

Рис. 105. Рост кристаллического ядра (мелкая штриховка) и поведение внешней конвективной зоны (крупная штриховка) при охлаждении белого карлика, указана также кривая вырождения $\psi = 0$. Моменты 2 – 10 соответствуют моделям из табл. 49

(см. подпись к рис. 104); $q = \frac{m}{M}$ – доля внутренней массы (из [457])

между моделями 6 и 10 из табл. 49 за счет роста теплоемкости классического кристалла и теплоты кристаллизации и дальнейшее быстрое остывание вырожденного кристаллического ядра. В расчетах предполагалось, что кристаллизация наступает при $\Gamma = \Gamma_m = 160$ (см. (8.56)). Дебаевская температура θ в [457] принималась, аналогично (4.38), (8.61), равной $\theta = 0,444 \hbar \omega_{pi}/k$, а термодинамические функции брались из численных расчетов. Как видно из рис. 105 и табл. 49, кристаллическое ядро впервые возникает при светимости $L = 1,6 \cdot 10^{-3} L_\odot$ и возрасте $\tau = 9,2 \cdot 10^8$ лет. Граница вырождения кристалла $\theta = T$ достигает середины звезды $q = m/M = 1/2$ при $L = 1,1 \cdot 10^{-3} L_\odot$ и $\tau = 1,3 \cdot 10^9$ лет. На рис. 105 показан рост кристаллического ядра, развитие конвекции во внешней оболочке звезды и перемещение границы вырожденного ядра $\psi = 0$, где $\psi = (\mu_{et} - m_e c^2)/kT = \beta - \alpha$ из (2.8). Учет возможного ядерного горения водорода или гелия в оболочке при остывании углеродно-кислородного белого карлика с массой $0,6 M_\odot$ сделан в [426]. Вклад горения водорода важен до $\tau = 2 \cdot 10^9$ лет, а в дальнейшем остывание проходит аналогично расчетам [457] для $1 M_\odot$ (см. табл. 49)).

в) Остывание белых карликов вблизи предела устойчивости с учетом нагрева неравновесными бета процессами [34]. Остывание звезды с массой, близкой к M_{Ch} , приводит к образованию ядра новой фазы и сопровождается нагревом за счет неравновесной двуступенчатой реакции бета-захвата (см. [56], § 20, п.в). При этом в тепло превращается $q = 200-500$ кэВ на одно ядро. Рассмотрим остывание железного белого карлика с $q = 476$ кэВ/ядро*). Если T_f — температура звезды к моменту начала фазового перехода при $\rho_c = \rho_{c0}$, то ее масса в равновесии превышает массу холодной звезды M_0 при этой плотности на величину δM , связанную с T_f соотношением (36.1)

$$T_f = \frac{A}{\mu_Z^{4/3}} \frac{\rho_{c0}^{1/3}}{1,7 \cdot 10^{-7}} \frac{\delta M}{M_0} = 1,24 \cdot 10^{11} \frac{\delta M}{M_0} = \beta \frac{\delta M}{M_0}. \quad (39.24)$$

Вблизи максимума массы на кривой $M_T(\rho_c)$ или минимума температуры $T_M(\rho_c)$ имеют место квадратичные зависимости:

$$\begin{aligned} M &\equiv M_T(\rho_c) = M_{\max} - \alpha(\rho_c - \rho_{cm})^2, \\ T &\equiv T_M(\rho_c) = T_{\min} + \gamma(\rho_c - \rho_{cm})^2. \end{aligned} \quad (39.25)$$

Приближенно примем параметры α , γ и $\rho_{cm} = \rho_{c1} + \Delta\rho_c$ постоянными, $\Delta\rho_c$ дано в (39.11). В точке фазового перехода с $T = T_f$, $\rho_c = \rho_{c1}$ имеем из (39.25)**)

$$T_f = T_{\min} + \gamma(\rho_{c1} - \rho_{cm})^2. \quad (39.26)$$

*) С учетом энергии возбуждения конечного ядра 109 кэВ, см. (20.14).

**) Для звезд с массой меньше предельной формально в (39.25); (39.26) $T_{\min} < 0$. Естественно, физический смысл имеют лишь те ρ_c , для которых $T > 0$ в (39.27) и ниже.

Из (39.24), (39.25), (39.26) получаем для звезды массы M

$$T = T_f + \gamma[(\rho_c - \rho_{cm})^2 - (\rho_{c1} - \rho_{cm})^2] = \beta \frac{\delta M}{M_0} +$$

$$+ [(\Delta \rho_c - \delta \rho_c)^2 - \Delta \rho_c^2] \cdot \gamma, \quad (39.27)$$

$$\delta \rho_c = \rho_c - \rho_{c1}.$$

Постоянную γ найдем из условия, что при $\delta M = \Delta M$ и $T = 0$ имеет место $\delta \rho_c = \Delta \rho_c$ из (39.11). Имеем тогда

$$T = \beta \frac{\Delta M}{M_0} \left[\frac{\delta M}{\Delta M} + \left(1 - \frac{\delta \rho_c}{\Delta \rho_c} \right)^2 - 1 \right]. \quad (39.28)$$

Центральная плотность $\rho_{c1} + \delta \rho_c$ на расгущей устойчивой ветви белых карликов слева от максимума (см. рис. 103) определяется соотношением

$$\delta \rho_c = \Delta \rho_c \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\beta} \frac{M_0}{\Delta M} - \frac{\delta M}{\Delta M} \right)^{1/2} \right]. \quad (39.29)$$

Плотность вблизи центра квадратично зависит от радиуса. Для политропы это легко видеть из разложения (34.3) вблизи центра

$$\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6}, \quad \rho = \rho_c \theta^n = \rho_c \left(1 - \frac{n}{6} \xi^2 \right). \quad (39.30)$$

При этом масса хромового ядра m_π связана с $\rho_c = \rho_{c1} + \delta \rho_c$ соотношением

$$\frac{m_\pi}{M_0} = \frac{M_\pi}{M_0} \left(\frac{\delta \rho_c}{\Delta \rho_c} \right)^{3/2} \approx 1,1 \cdot 10^{-14} (\delta \rho_c)^{3/2}. \quad (39.31)$$

При росте массы хромового ядра скорость уменьшения внутренней энергии звезды равна

$$\dot{Q}_\nu = -(476 \text{ кэВ}) \frac{\dot{m}_\pi}{A m_u}. \quad (39.32)$$

Суммарные потери из (39.20), (39.32) с учетом (39.29), (39.31) равны

$$\dot{Q} = \dot{Q}_T + \dot{Q}_\nu = \frac{3}{2} \frac{kM}{A m_u} \times$$

$$\times \left\{ 1 + 3,9 \cdot 10^6 \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{T}{\beta} \frac{M_0}{\Delta M} - \frac{\delta M}{\Delta M} \right)^{1/2} \right]^{1/2}}{\left(1 + \frac{T}{\beta} \frac{M_0}{\Delta M} - \frac{\delta M}{\Delta M} \right)^{1/2}} \frac{M_0}{\beta \Delta M} \right\} \dot{T}. \quad (39.33)$$

Уравнение (39.20) с учетом (39.19) и (39.33) для ^{56}Fe примет вид (для

$$\mu / [\mu_Z^2 x_Z (1 + x_H)] = 3,45)$$

$$0,7 \cdot 10^{16} \left\{ 1 + 0,15 \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{T_7}{2,6} - \frac{\delta M}{\Delta M} \right)^{1/2} \right]^{1/2}}{(1 + T_7/2,6 - \delta M/\Delta M)^{1/2}} \right\} \frac{dT_7}{dt} = -T_7^{3,5}. \quad (39.34)$$

Здесь учтено $\beta \Delta M/M_0 = 2,6 \cdot 10^7$ К, согласно (39.24), (39.11). Для критической массы $M = M_0 + \Delta M$ имеем из (39.34) уравнение

$$0,7 \cdot 10^{16} \left[1 + \frac{0,24}{T_7^{1/2}} (1 - \sqrt{T_7/2,6})^{1/2} \right] \frac{dT_7}{dt} = -T_7^{3,5}. \quad (39.35)$$

Решая (39.35) для $T_7 \ll 2,6$, получаем время остывания в виде*)

$$\tau = 2,8 \cdot 10^{15} [T_7^{-2,5} - T_{7,0}^{-2,5} + 0,2(T_7^{-3} - T_{7,0}^{-3})] \text{ с.} \quad (39.36)$$

При $T \leq 0,1\theta_c$ из (4.38), (8.61) вместо (39.20) следует использовать теплоемкость вырожденного кристалла

$$Q_D = \frac{4\pi^4 kMT}{5 A m_u} \left(\frac{T}{\theta_c} \right)^3. \quad (39.37)$$

Коэффициент в (39.37) взят из [227] и в 4/3 раза больше значения, которое следует из разложения дебаевской функции при $x \gg 1$ в (4.38), (4.39). С заменой (39.37) вместо (39.20) получаем вместо (39.36))

$$\tau = 2,8 \cdot 10^{15} \left\{ \left(\frac{T_0}{0,1\theta_c} \right)^3 T_{7,0}^{-2,5} - \left(\frac{T}{0,1\theta_c} \right)^3 T_7^{-2,5} + 0,2(T_7^{-3} - T_{7,0}^{-3}) \right\}. \quad (39.38)$$

Из (39.36) следует, что время остывания до $T = 0,1\theta_c = 5,5 \cdot 10^{10} \text{ К}$ для ^{56}Fe увеличивается на $\sim 27\%$ с учетом неравновесного нагрева. а. Согласно (39.38), при $T < 0,1\theta_c$ неравновесный нагрев становится очень важным. В его отсутствие практически полное остывание белого карлика произойдет за $8 \cdot 10^8$ лет ($4 \cdot 10^8$ лет от $T_0 = 5,5 \cdot 10^6$ лет), а с учетом неравновесного нагрева за космологическое время $2 \cdot 10^{10}$ лет белый карлик критической массы остынет до температуры $\sim 10^6$ К. Точный расчет остывания углеродного белого карлика в $1 M_\odot$, где нет ядра новой фазы, приводит к температуре ядра $1,7 \cdot 10^5$ К через $9 \cdot 10^9$ лет (см. табл. 49). Отметим, что ввиду грубости закона Краммерса (39.16) значения полученных возрастов и светимостей в зависимости от температуры ядра могут быть не совсем точными, но относительные вклады теплоемкости и неравновесного нагрева в (39.36) и (39.38) останутся неизменными и при $T < 3,6 \cdot 10^6$ К неравновесный нагрев преобладает.

г) Об эволюции магнитных полей белых карликов. Более $10^{10}\%$ известных белых карликов обладают сильными магнитными полями, 10^6 —

*) Аналогичные оценки остывания сделаны в [191а].

10^8 Гс, которые определены по поляризации оптического излучения в 16 одиночных и 10 двойных звездах. Последние находятся в паре с красными карликами и относятся к катаклизмическим переменным, на которых несколько раз в год наблюдаются вспышки с $\Delta m_V = 4 \div 5^m$. Они являются также рентгеновскими источниками, а степень поляризации оптического излучения составляет несколько десятков процентов, за что эти звезды называют полярами. Пока неясно, являются ли магнитные поля остаточными от ранних стадий эволюции или генерированы динамо механизмом на поздних стадиях эволюции, сопровождающихся сильной конвекцией (см. § 33, п.ж).

Проблема затухания магнитных полей белых карликов может быть решена более надежно. Наблюдения сильных магнитных полей у сравнительно холодных белых карликов с $T_{\text{ef}} \sim 6000$ К указывает на то, что характерное время затухания сравнимо или превышает космологическое (см. (39.22) и табл. 49). В работе [629] проведены расчеты затухания полоидальных магнитных полей различной формы с учетом движения вещества. Решается уравнение эволюции магнитного поля, которое в векторной записи имеет вид

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (39.39)$$

Из (39.39) при проводимости $\sigma \rightarrow \infty$ и аксиальной симметрии $\partial/\partial\varphi = 0$ следуют уравнения (38.5)–(38.7). Для полоидальных полей векторное уравнение (39.39) сводится к скалярному, если ввести вектор-потенциал $\vec{A}$

$$\vec{A} = (0, 0, A_\varphi(r, \theta, t)), \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad S = -r \sin \theta A_\varphi, \quad (39.40)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \right].$$

Решение ищется для сферически-симметричного распределения плотности и радиальной скорости $\vec{v} = (v_r(r), 0, 0)$, когда допустимо разложение

$$S(r, \theta, t) = \sum_{l \geq 1} R_l(r, t) \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \quad (39.41)$$

где $P_l^1(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого порядка [93], а для R_l получается уравнение

$$\frac{\partial^2 R_l}{\partial x^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} R_l = \frac{4\pi R_*^2 \sigma}{c^2} \left(\frac{\partial R_l}{\partial t} + \frac{v_r}{R_*} \frac{\partial R_l}{\partial x} \right) \quad (39.42)$$

$x = r/R_*$, $R_*(t)$ – радиус звезды. Для разложения (39.41) магнитное поле $\vec{B}$, согласно (39.40), имеет вид

$$\vec{B}(x, \theta, t) = \frac{1}{R_*^2} \left[- \sum_{l \geq 1} \frac{l(l+1)}{x^2} P_l(\cos \theta) R_l(x, t), \right. \\ \left. \sum_{l \geq 1} P_l^1(\cos \theta) \frac{1}{x} \frac{\partial R_l}{\partial x}, 0 \right], \quad (39.43)$$

где $P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра индекса l , $l = 1$ соответствует диполю, $l = 2$ — квадруполь и т.д. В [629] искались решения уравнения (39.42), ограниченные в центре и непрерывные на границе с вакуумом. Электронный ток j_i определялся в виде

$$j_i = -en_e \langle v_i \rangle \quad (39.44)$$

где $e > 0$, а $\langle v_i \rangle$ для нерелятивистских электронов определено в (8.48). При наличии электромагнитных полей к силе $\vec{F}$ в уравнении Больцмана (8.1) добавляется величина $\frac{e}{m} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$ и дает соответствующий вклад в d_i из (8.5). Проводимость σ определяется как коэффициент связи между j_i и E_i при $\vec{B} = 0$:

$$j_i = \sigma E_i. \quad (39.45)$$

Вычисления σ для электронов проводятся аналогично теплопроводности λ_e в § 8. В [629] для широкой области параметров σ приведено в виде

$$\sigma = \begin{cases} \gamma_E \frac{2(2kT)^{3/2}}{\pi^{3/2} m_e^{1/2} Z e^2 \Lambda} \approx 3,31 \cdot 10^7 \frac{T^{3/2}}{\Lambda} \text{ с}^{-1} & (\text{для } ^{12}\text{C}) \\ \text{при } \lg \rho < 4 \lg T - 29,825, \\ \frac{\lambda_e}{T} \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{e}{k} \right)^2 & \text{при больших } \rho \text{ с } \lambda_e \text{ из (8.41), (8.54),} \end{cases} \quad (39.46)$$

где Λ для нерелятивистских электронов определено в (8.43), коэффициент $\gamma_E = 0,582, 0,683, 0,838$ для H, ^4He и ^{12}C соответственно. Второе равенство в (39.46) определяется из соотношения Видсмана—Франца. Формулы (39.46) сшивались между собой с помощью гладкой интерполяции. Характерное время затухания поля для $\sigma = \text{const}$, $v_r = 0$, $l = 1$ из (39.42) получается в виде

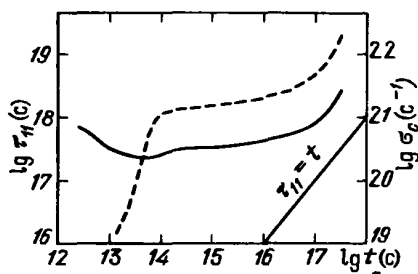
$$\tau_{ln} \approx \frac{4\pi R_*^2 \sigma}{c^2 \pi^2 n^2}, \quad \text{целое } n \geq 1; \quad B_{ln} \sim \exp(-t/\tau_{ln}). \quad (39.47)$$

Численное решение краевой задачи для уравнения (39.42) с σ из (39.46) получено в [629] для углеродного белого карлика с массой $0,6 M_\odot$ вдоль его эволюционного трека. Результаты расчетов для поля максимального масштаба ($l = 1$, $n = 1$) представлены на рис. 106, откуда видно, что время затухания τ_{11} всегда больше времени остывания τ , поэтому крупномасштабное поле белого карлика практически не затухает со временем.

д) Вспышки новых звезд. Одиночные белые карлики относятся к числу спокойных объектов, но в тесных двойных системах они проявляют большую активность. Эти бурные проявления обусловлены аккрецией вещества от соседней звезды — маломассивного водородного карлика, ведущей к развитию неустойчивостей. При аккреции богатое водородом вещество накашивается в оболочке белого карлика. После того как масса оболочки достигнет значения 10^{-6} – $10^{-4} M_\odot$ и электроны в водороде станут вырожденными, развивается тепловая неустойчивость и термоядер-

ная вспышка. Мощность вспышки зависит от массы взрывающейся оболочки, а та в свою очередь зависит от темпа аккреции $\dot{M}$ и массы белого карлика M_{WD} . Имеет место обратная зависимость: чем больше скорость аккреции, тем выше температура вещества в оболочке, легче условия загорания, меньше масса оболочки в момент вспышки и меньше мощность самой вспышки. При дальнейшем увеличении $\dot{M}$ вырождение в оболочке становится недостаточным и вспышка вообще не развивается.

Рис. 106. Кривая зависимости времени затухания крупномасштабного магнитного поля $\tau_{1,1}$ от возраста белого карлика t , очевидно, $\tau_{1,1} \sim t$. Штриховой линией дана проводимость σ_c в центре звезды (из [629])



Критические значения $\dot{M}_{cr}$ и соответствующие значения светимости L_{cr} найдены теоретически в зависимости от массы M_{WD} и химического состава белых карликов в работе [474]:

$$\left. \begin{aligned} \lg \dot{M}_{cr} &= -8,775 - 15,088(M_{WD}/M_{\odot} - 1,459)^2, \\ \lg(L_{cr}/L_{\odot}) &= -0,629 - 5,923(M_{WD}/M_{\odot} - 1,766)^2 \end{aligned} \right\} \text{при } x_Z = 0,02, \quad (39.48)$$

$$\left. \begin{aligned} \lg \dot{M}_{cr} &= -8,632 - 4,596(M_{WD}/M_{\odot} - 1,334)^2, \\ \lg(L_{cr}/L_{\odot}) &= -1,375 - 7,027(M_{WD}/M_{\odot} - 1,308)^2 \end{aligned} \right\} \text{при } x_Z = 0,51.$$

Здесь $\dot{M}$ дано в $M_{\odot}/\text{год}$. При $\dot{M} > \dot{M}_{cr}$ выбросы оболочки отсутствуют и горение водорода становится стационарным. Наблюдения новых звезд дают существенно большие значения $\dot{M}$, до $10^{-8} - 10^{-7} M_{\odot}/\text{год}$ после вспышки. Возможно, что это связано с релаксационными процессами и со временем темп аккреции станет меньше $\dot{M}_{cr}$ из (39.48), но возможно, что теоретические оценки недостаточно точны. Рост светимости в процессе вспышки новой достигает $\Delta m_V = 10 - 15^m$ и даже 19^m у новой Лебедя 1975 г. [178]. Чем больше $\dot{M}$ и слабее вспышка, тем чаще она происходит. Фактически все новые звезды являются повторными, но для самых ярких время между вспышками Δt_B слишком велико для возможности астрономических наблюдений. Зависимость амплитуды вспышки A_m от Δt_B приведена на рис. 107 из [178]. Расчеты вспышек новых проводятся на основе гидродинамических уравнений (35.1)–(35.3), аналогично сверхновым, но пространственная лагранжевая область расчетов ограничивается оболочкой. Обзор таких работ дан в [244].

Новые звезды вспыхивают в тесных двойных системах, где компаньон — водородная звезда — заполняет полость Роша, поэтому вещество, аккрецирующее на белый карлик имеет форму диска (см. § 41). Ста-

ционная дисковая аккреция в маломассивных тесных двойных возможна только в случае турбулентного аккреционного диска. В ламинарном случае вещество из-за малой вязкости остается в диске и не падает на белый карлик. Когда скорость аккреции мала ($\dot{M} < 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$), турбулизация диска, видимо, затрудняется и появляются дополнительные виды активности из-за неустойчивости дисковой аккреции, связанной со спорадической турбулизацией диска. Именно такими проявлениями объясняются вспышки в карликовых новых звездах, которые называют так-



Рис. 107. Амплитуда вспышки Δm в зависимости от времени между вспышками Δt_B для повторных новых, из [178]

же новоподобными или катаклизмическими переменными. Наблюдательные особенности кривой блеска карликовых новых для своей интерпретации требуют предположения о горячем пятне, которое образуется при ударе аккреционной струи о диск. Итак, из-за малого темпа аккреции диск часть времени остается ламинарным, вязкость в нем мала и вещество накапливается во внешних частях диска. Когда масса диска превысит некоторое критическое значение в нем развивается неустойчивость, приводящая к турбулизации, росту вязкости и резкому увеличению потока массы на белый карлик. Происходит вспышка. После уменьшения массы диска он снова становится ламинарным до следующей вспышки. Такая модель развивалась в работах [579, 580, 534]. Время между последовательными вспышками для разных звезд меняется от нескольких суток до нескольких сот суток, которым соответствуют амплитуды вспышек от 2^m до $5-6^m$ [178]. Для некоторых звезд интервалы между вспышками и формы вспышек сильно изменяются, а для других звезд вспышки происходят более или менее регулярно. В работе [580] более регулярные вспышки относят к типу А, связанному с началом развития неустойчивости во внешних частях диска, а иррегулярные — к типу В, где неустойчивость начинает развиваться во внутренних областях диска. Отмечается, что типу А при тех же массах звезд M_1 и M_2 соответствуют более высокие значения $\dot{M}$. Вспышки типа А происходят на звездах U Gem, SS Aur, а на звездах SS Cyg, AN Her наблюдаются вспышки типа В. Обзор наблюдений и теоретических моделей катаклизмических переменных сделан в работе [542].

Ввиду малой скорости аккреции в катаклизмических переменных темп накопления водорода в оболочке белого карлика очень мал, но за время 10^4-10^5 лет его должно накопиться достаточно для развития

неустойчивости термоядерного горения и вспышки новой. Из эмпирической зависимости на рис. 106 на этих звездах должны происходить наиболее мощные и наиболее редкие вспышки новых звезд. Возможно, имеет смысл сделать поиск катаклизмических явлений в остатках вспышек наиболее ярких новых Лебеда 1975, Кормы 1942, Лебеда 1920.

§ 40. Нейтронные звезды

Предположение о возможности существования нейтронных звезд было высказано Л.Д. Ландау в 1932 г., вскоре после открытия нейтрона (см. воспоминания [551]). Современное представление о нейтронной звезде, как об объекте, образование которого сопровождается взрывом сверхновой при гравитационном коллапсе с выделением гигантской энергии, основано на идее В. Бааде и Ф. Цвикки, опубликованной в 1934 г. [258]. Открытие пульсаров, рентгеновских источников, их связь с остатками сверхновых убедительно подтвердили справедливость этого предсказания.

Первая модель нейтронной звезды была построена Оппенгеймером и Волковым [517]. Ими использовалось уравнение состояния идеального вырожденного нейтронного газа, которое следует из (2.22), (2.23), если заменить m_e на m_n и вместо u использовать u_n из (4.10):

$$E_n = \frac{6,860 \cdot 10^{35}}{\rho_0} g(y_n), \quad P_n = 6,860 \cdot 10^{35} f(y_n). \quad (40.1)$$

Изучение столь компактных объектов, как нейтронные звезды, необходимо проводить в рамках ОТО. Параметром релятивизма в теории тяготения является отношение гравитационного радиуса R_g к радиусу звезды [143]:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \approx 2,95 \cdot 10^5 \frac{M}{M_\odot} \text{ см.} \quad (40.2)$$

Для белого карлика из ${}^{56}\text{Fe}$ в точке потери устойчивости из-за нейтронизации, согласно (39.9), (39.11), (40.2), отношение $R_g/R \approx 1,00 \cdot 10^{-3}$. Для нейтронных звезд $R_g/R > 0,1$ (см. [267] и рис. 103) и ОТО обычно учитывается точно. В целом ОТО значительно сложнее ньютоновской теории тяготения, но для сферически-симметричных звезд полученные в [517] уравнения равновесия немногим сложнее ньютоновских (22.1), (22.2):

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G(\rho + P/c^2)(m + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - 2Gm/rc^2)}, \quad (40.3)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2. \quad (40.4)$$

В отличие от (22.1), (22.2), где ρ , ввиду того что $E \ll \rho_0 c^2$, принималось равным плотности массы покоя ρ_0 , в (40.3), (40.4) стоит

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E}{c^2} \right). \quad (40.5)$$

Наряду с полной массой звезды $M = m(R)$ в (40.3), (40.4), определяющей гравитационное поле, в ОТО отдельно рассматривают массу покоя M_0 , которая для сферически-симметричной нейтронной звезды запишется в виде

$$m_0 = 4\pi \int_0^R \frac{\rho_0 r'^2 dr'}{(1 - 2Gm'/r'c^2)^{1/2}}, \quad M_0 = m_0(R), \quad N_b = \frac{M_0}{m_n}, \quad (40.6)$$

где N_b — полное число барионов в нейтронной звезде. В M учтены положительный вклад веса энергии и отрицательная гравитационная энергия. Для устойчивых звезд обычно $M < M_0$, но у нейтронных звезд с массой вблизи минимальной (рис. 103) имеет место обратное неравенство [110, 9].

а) Холодные нейтронные звезды. Идеальный газ является плохим приближением для уравнения состояния нейтронного газа, где при плотностях выше ядерной определяющую роль играют взаимодействия и правильнее говорить о нейтронной жидкости, а не о газе (см. § 4, п. в). Модели холодных нейтронных звезд получают, как правило, из решения уравнений (40.3) — (40.4) для равновесного вещества. Зависимость $M(\rho_c)$ для уравнения состояния из табл. 7—9 и других моделей ядерного взаимодействия даны на рис. 108 [479]. Свойства различных моделей в максимумах массы даны в табл. 50 [479]. Вещество нейтронной звезды имеет большое разнообразие свойств, связанное с переменным химическим составом, изменяющимся агрегатным состоянием, возможной сверхтекучестью нуклонов и сверхпроводимостью протонов. В оболочке возможны отклонения от равновесного состава (§ 4, пп. д, е).

Нейтронная звезда с равновесным составом состоит из следующих слоев [227, т. 2], (см. также § 4, пп. а—в):

1. Поверхность ($\rho \leq 10^6$ г · см⁻³). В этой области температура и магнитное поле могут влиять на уравнение состояния и структуру оболочки, равновесный состав есть железо ^{56}Fe .

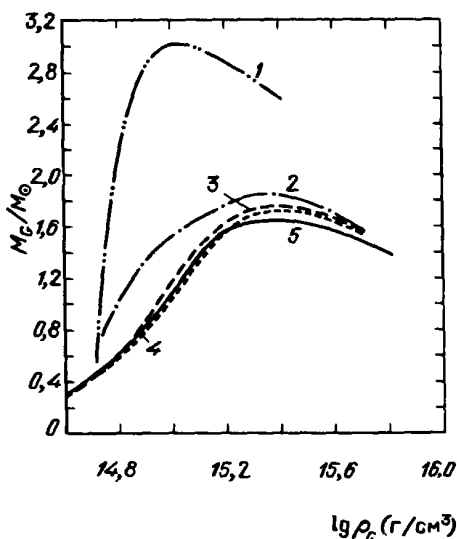


Рис. 108. Зависимость полной массы M_G нейтронной звезды от центральной плотности массы покоя ρ_c

для различных моделей ядерного взаимодействия [275]: штрих с двумя точками (1) — предельно жесткое уравнение состояния $P = P^* + (\epsilon - \epsilon^*)$, которое сшивается при $\rho_0 = 5,02 \cdot 10^{14}$ г/см³ с совпадающими при этой плотности моделями (3), (5) (из [479]); штрих с точкой (2) — модель, основанная на потенциале Рейда, одинаковом для всех барионов; длинные штрихи (3) — модель взаимодействия нуклонов с учетом экспериментальных данных по образованию ω -мезона при высоких энергиях; короткие штрихи (4) — то же, что (2), но с более реалистическим потенциалом для (np)-взаимодействия; сплошная (5) — то же, что (3), но с учетом рождения гиперонов (табл. 9)

Свойства нейтронных звезд в максимуме массы для различных ядерных моделей

№ по рис. 108	$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{M_0}{M_{\odot}}$	$\rho_{c0}, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$P_c, \text{дин} \cdot \text{см}^{-2}$	$R, \text{км}$	$\frac{M_0 - M}{M_{\odot}}$
2	1,85	2,15	2,28 (15)	1,26 (36)	9,73	0,294
4	1,73	2,02	2,69 (15)	1,58 (36)	8,88	0,292
3	1,76	2,06	2,49 (15)	1,33 (36)	9,18	0,301
5	1,65	1,91	2,47 (15)	1,00 (36)	9,38	0,256
1	3,02	3,92	1,13 (15)	1,00 (36)	12,9	0,901

2. Внешняя кора ($10^6 \leq \rho \leq 4,3 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) — область существования кулоновского кристалла из ядер, где отношение A/Z увеличивается с ростом ρ (табл. 7).

3. Внутренняя кора ($4,3 \cdot 10^{11} \leq \rho \leq (2-2,4) \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) — область существования кристаллической решетки ядер вблизи границы испарения нейтронов совместно со свободными нейтронами, которые могут быть сверхтекучими.

4. Нейтронная жидкость ($(2-2,4) \cdot 10^{14} < \rho < \rho_{\text{core}}$). Здесь существуют сверхтекучие нейтроны и протоны и нормальные электроны.

5. Область ядра ($\rho > \rho_{\text{core}}$) — гипотетическая область, где возможна пионная конденсация, твердое нейтронное вещество, рождение кварков или какая-либо другая экзотическая фаза, отличающаяся от нейтронной жидкости. Значение $\rho_{\text{core}} \geq 6 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.

Масса нейтронной звезды с наилучшей точностью измерена в двойном пульсаре PSR 1913 + 16, имеющем орбитальный период $P = 7,75$ часа и эксцентриситет орбиты $e = 0,617$ [153]. Релятивистские эффекты для эллиптической орбиты приводят к движению линии апсид, или большой оси орбиты, так что $\omega = 4,2$ град/год, и уменьшению орбитального периода за счет излучения гравитационных волн, так что $\dot{P} = -2,3 \cdot 10^{-12}$, согласно наблюдениям. По доплеровским смещениям периода пульсара $P_p = 0,059$ с определяется амплитуда скорости движения нейтронной звезды по орбите v_p и функция масс f

$$f(M_p, M_2, i) = \frac{P_p v_p^3}{2\pi G} = \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_p + M_2)^2} \approx 0,1312 GM_{\odot}. \quad (40.7)$$

Известные значения $\dot{P}$, ω и f позволяют однозначно определить $M_p \approx M_2 \approx 1,41 \pm 0,06 M_{\odot}$ и угол между нормалью к плоскости орбиты и направлением на наблюдателя $i \approx 46^\circ$ [605]. Величина M_p меньше предельной массы нейтронной звезды для любого уравнения состояния из табл. 50. Определение масс нейтронных звезд в двойных рентгеновских источниках и в рентгеновских барстерах сделано с ошибкой более чем в шесть раз большей, чем у PSR 1913 + 16 (см. [227, т. 2]).

Вращение увеличивает максимальную массу нейтронной звезды, а для той же массы уменьшает центральную плотность и увеличивает радиус. Для нейтронных звезд с уравнением состояния (2) из рис. 108, вращающихся-

ся однородно с предельной скоростью, при которой начинается истечение с экватора, максимум массы соответствует следующим параметрам [366]: $\Omega = 1,11 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $M = 2,16 M_\odot$, $M_0 = 2,47 M_\odot$, $R_e = 13,0 \text{ км}$ (экватор), $T/|W| = 0,11$, T – вращательная, W – гравитационная энергия. Для большинства рассмотренных в [366] уравнений состояния при однородном вращении величина $T/|W|$ не превышает 0,12, что указывает на устойчивость относительно превращения в трехосную фигуру. Построение точных моделей вращающихся звезд в ОТО, проведенное в [366], является задачей существенно более сложной, чем в ньютоновской теории (см. § 23). Максимальная масса нейтронной звезды при однородном вращении для всех уравнений состояния в [366] не превышает соответствующее значение для не вращающейся звезды более чем на 20%.

б) **Горячие нейтронные звезды.** При образовании нейтронной звезды в результате коллапса в ней достигаются гигантские температуры 10^{11} – 10^{12} К. Предельная масса горячей звезды выше, чем у холодной, и растет с ростом температуры. Модели горячих нейтронных звезд и исследование их устойчивости проведено в [28] с помощью решения уравнений (40.3), (40.4) и критерия устойчивости

$$I = \delta^2 \epsilon \left/ \left[4\pi a^2 \exp \left(- \int_0^R \frac{\tilde{E}n + P}{1 - 2Gm/c^2 r} \frac{4\pi Gr}{c^4} dr \right) \right] \right. = \\ = \int_0^R \exp \left(\int_0^r \frac{\tilde{E}n + P}{1 - 2Gm/c^2 r} \frac{4\pi Gr}{c^4} dr \right) \left\{ \gamma Pr^2 \left[3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Gm}{c^2 r} \frac{1 + 4\pi r^3 P/mc^2}{1 - 2Gm/c^2 r} \right]^2 - \frac{(P + \tilde{E}n)(1 + 4\pi r^3 P/mc^2)^2}{1 - 2Gm/c^2 r} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{Gm}{c^2 r} \right)^2 r^2 - 4 \frac{En + P}{1 - 2Gm/c^2 r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} \right) \frac{Gm}{c^2 r} r^2 \right\} dr > 0. \quad (40.8)$$

Здесь в $\tilde{E}n$ включена плотность энергии покоя $\rho_0 c^2$ (*). Критерий (40.8) следует из (43.10) и общего выражения для $\delta^2 \epsilon$ сферически-симметричных звезд в ОТО (43.11) при подстановке в него линейной пробной функции $\delta r = \alpha r$. В ньютоновском пределе $\tilde{E}n = \rho_0 c^2$, $P \ll \tilde{E}n$, $c \rightarrow \infty$ из (40.8) следует условие устойчивости $\gamma > 4/3$. В постньютоновском приближении с учетом членов $\sim P/\rho_0 c^2$, $(\tilde{E}n/\rho_0 c^2 - 1)$ и членов $\sim G^2$ при распределении плотности по политропе $n = 3$ из (40.8) следует условие устойчивости (34.19). Для кривой Оппенгеймера–Волкова [517] критерий (40.8) дает потерю устойчивости при плотности, отличие которой от плотности максимума массы $\Delta \rho \lesssim 10^{-5} \rho$, что указывает на его хорошую точность.

В уравнении состояния при расчетах учитывались невырожденные протоны p , нейтроны n и ядра железа ^{56}Fe , находящиеся в ядерном равновесии друг относительно друга по (3.3), (1.2). Нейтрино предполагалось свободно улетающим с $\mu_\nu = 0$ в (3.5). Учитывалось излучение (1.2) и $e^\pm$ -пары в ультрарелятивистском приближении (2.56). Энтропия предполагалась

*) $\tilde{E}$ – энергия на барион, n – концентрация барионов.

постоянной по звезде. Ядерное взаимодействие учитывалось в модели предельно жесткого уравнения состояния [103] с коэффициентом из работы [438]

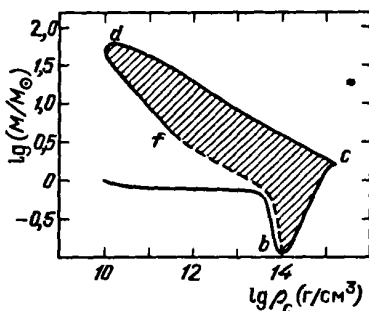
$$P_{ni} = E_{ni} \rho_0 = 6\pi \frac{\hbar^3}{m_p^4 c} \rho_0^2. \quad (40.9)$$

Интегрирование системы (40.3), (40.4) проводилось методом Рунге-Кутты. Для сохранения энтропии вдоль звезды температура на последующем шагу T_n выражалась через T_{n-1} и плотности ρ_n и ρ_{n-1} :

$$T_n = T_{n-1} \left(\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \right)^{\gamma_3} \quad (40.10)$$

с γ_3 из (1.13). Это обеспечило постоянство S с погрешностью в пределах 2%. Вычислялась также масса покоя звезды $M_0 = m_0(R)$ по формуле

Рис. 109. Равновесные устойчивые конфигурации на плоскости масса M — центральная плотность массы покоя ρ_c сверхплотных изэнтропических звезд (заштриховано). Кривая вторых максимумов cd и часть кривой максимумов df построены по данным таблицы 51, fb — приближенная интерполяция. Кривая для холодных нейтронных звезд взята из [438] (из [28])



(40.6). Результаты расчетов представлены на рис. 109 и табл. 51 из [28]. Модели холодных нейтронных звезд с уравнением состояния (40.9) рассчитывались в [438], где получено $M_{\max} = 1.60 M_\odot$, $M_{0, \max} = 1.71 M_\odot$.

С ростом энтропии звезды кривые $M_S(\rho_c)$ располагаются одна над другой, причем минимум сближается со вторым максимумом, пока не произойдет их слияние в точке (ρ_{cc}, M_{cc}) при $S = S_{cc}$. Эта точка соответствует предельной массе "нейтронной звезды" (*), так как при $S > S_{cc}$ минимум и второй максимум отсутствуют, после первого максимума кривая $M(\rho_c)$ монотонно падает и устойчивые состояния не возникают. Максимум массы горячей "нейтронной" звезды ближе всего к модели 17 из табл. 51 с параметрами

$$\begin{aligned} \rho_{cc} &= 1,5 \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad T_{cc} = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ К}, \quad M_{cc} = 68,7 M_\odot, \\ M_{0, cc} &= 68,9 M_\odot. \end{aligned} \quad (40.11)$$

В центре всех моделей из табл. 51 железо отсутствует, а $x_{n, c}$ меняется от 0,794 у модели № 1 до 0,553 у модели № 21, соответственно $x_{p, c}$ меняется от 0,206 до 0,467.

* Звезды вблизи точки слияния состоят из примерно равного числа нейтронов и протонов и нейтронами называются условно ввиду их топологической связи с холодными нейтронными звездами на рис. 109.

Параметры равновесных горячих нейтронных звезд [28]

Параметр	Модели				
	1	2	3	4	5
$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	2,93 (14)	2,93 (14)	4,40 (13)	4,40 (13)	1,47 (13)
T_c, K	9,31 (11)	9,65 (11)	6,23 (11)	6,52 (11)	4,80 (11)
S/S_0	4,82	4,99	7,12	7,47	8,54
γ_{1c}	1,60	1,59	1,49	1,48	1,46
$M/M_\odot$	2,91	3,03	5,68	6,18	8,49
$M_0/M_\odot$	2,97	3,09	5,75	6,24	8,57
$R, \text{км}$	38,6	40,2	120,7	103	215
I/ϵ_0	7,7 (-5)	-5,2 (-6)	4,6 (-5)	-9,0 (-5)	2,0 (-5)
$\tilde{n}_{e,c}$	0,226	0,239	0,331	0,358	0,399

Параметр	Модели				
	6	7	8	9	10
$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	1,47 (13)	2,93 (12)	2,93 (12)	2,93 (11)	2,93 (11)
T_c, K	4,86 (11)	3,20 (11)	3,26 (11)	7,89 (10)	1,48 (11)
S/S_0	8,66	10,8	11,0	7,62	11,9
γ_{1c}	1,45	1,43	1,43	1,52	1,43
$M/M_\odot$	8,72	15,0	15,8	4,76	19,5
$M_0/M_\odot$	8,80	15,1	15,9	4,78	19,6
$R, \text{км}$	193	408	364	1070	1090
I/ϵ_0	-2,1 (-5)	1,3 (-5)	-4,1 (-5)	1,0 (-6)	3,1 (-4)
$\tilde{n}_{e,c}$	0,407	0,508	0,525	0,184	0,512

Параметр	Модели					
	11	12	13	14	15	16
$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	2,93 (11)	2,93 (10)	2,93 (10)	2,93 (10)	1,47 (10)	1,47 (10)
T_c, K	1,75 (11)	6,61 (10)	8,60 (10)	9,13 (10)	6,02 (10)	6,82 (10)
S/S_0	14,5	12,6	16,9	18,4	14,8	17,3
γ_{1c}	1,40	1,43	1,39	1,39	1,41	1,39
$M/M_\odot$	33,2	22,2	51,6	64,8	35,7	54,8
$M_0/M_\odot$	33,4	22,3	51,7	65,0	35,8	55,0
$R, \text{км}$	1250	3070	4820	3550	3910	4190
I/ϵ_0	1,4 (-5)	6,0 (-6)	2,0 (-4)	1,4 (-5)	1,5 (-5)	1,1 (-4)
$\tilde{n}_{e,c}$	0,705	0,491	0,807	0,918	0,636	0,812

Параметр	Модели				
	17	18	19	20	21
$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	1,47 (10)	8,8 (9)	8,8 (9)	5,9 (9)	5,9 (9)
T_c, K	7,23 (10)	5,93 (10)	5,98 (10)	4,74 (10)	5,17 (10)
S/S_0	18,7	18,3	18,5	16,5	18,4
γ_{1c}	1,39	1,39	1,39	1,40	1,39
M/M_0	68,7	64,5	66,7	48,6	66,7
M_0/M_0	68,9	64,7	66,9	48,7	66,9
$R, \text{км}$	4610	5090	5100	4860	5690
I/e_0	4,3 (-5)	1,1 (-5)	2,3 (-5)	-1,0 (-4)	-7,2 (-5)
$\tilde{n}_{e,c}$	0,920	0,871	0,887	0,735	0,873

Здесь $S_0 = k/m_p = 0,831 \cdot 10^8 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $e_0 = \sqrt{\pi/4} (h^3 c^2 / G^3 (100 m_e)^4)^{1/2} \approx 556 M_0 c^2$, I из (40.8); $\tilde{n}_e = n_e m_u / \rho_0$.

Максимум массы холодной нейтронной звезды связан с эффектами ОТО. При движении к точке d все большую роль в потере устойчивости начинает играть диссоциация железа и $\gamma < 4/3$ во внешних слоях звезды. На линии минимумов bfd восстановление устойчивости связано с образованием плотного нейтронного ядра с $\gamma > 4/3$. Эффекты ОТО неважны для холодной нейтронной звезды малой массы, но роль их растет при движении к точке d (см. рис. 109).

Сравнение энергий связи $(M_0 - M)c^2$ из табл. 51 с энергией связи в критических состояниях из (34.25), табл. 45 показывает, что энергия связи в сверхплотном состоянии больше чем в критическом (кривая первых максимумов) при $M_0 \leq 15 M_0$. Это означает, что остановка звезды при коллапсе на кривой вторых максимумов возможна (но не обязательно) только при $M_0 \leq 15 M_0$.

в) Остывание нейтронных звезд. Нейтринные потери являются основным механизмом охлаждения нейтронных звезд при $T_c \gtrsim 4 \cdot 10^8 \text{ K}$. Ввиду роста с энергией сечения взаимодействия нейтрино с веществом (см. § 18, п. ж, задача 2*) горячие нейтронные звезды непрозрачны относительно выхода нейтрино. Оценки в [28] показывают, что таковыми являются все модели из табл. 51. Если использовать нейтринные потери за счет урка-процессов (19.36) с $\phi = 1$ и $\alpha = 664.31$ и запас энергии невырожденных нуклонов, то время остывания $\tau_{\nu f}$ при свободном улете нейтрино есть

$$\tau_{\nu f} = \frac{E_T}{Q_{URCA}} \approx 3 \cdot 10^5 T_9^{-5} \text{ с.} \quad (40.12)$$

*) Сечение захвата нейтрино $\sigma_{\nu e}^{\text{зах}}$ в два раза больше $\sigma_e^{\text{зах}}$ из (4) задачи 2, § 18 при замене e_0 на $e_{\nu e}$ для $u_e, u_{\nu e} = e_{\nu e} / m_e c^2 \gg 5$ (см. также (21.16)). Коэффициент 2 возникает из-за суммирования по электронным спинам при ν_e -захвате, вместо усреднения при e -захвате. Давление равновесных нейтрино $P_{\nu e}$, согласно § 3, (3.5), не превышает $7/26 \approx 27\%$ от суммарного давления пар и излучения. Учет $P_{\nu e}$ в моделях табл. 51 изменит их не более чем на 27%. Влияние μ_n и μ_p на эти модели существенно меньше ввиду малого сечения их взаимодействия.

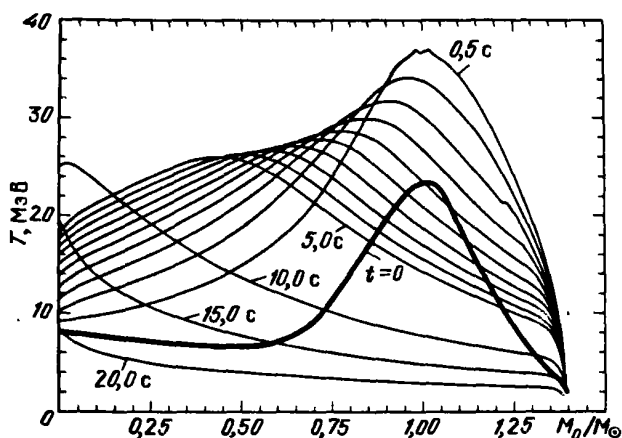


Рис. 110. Эволюция распределения температуры нейтронной звезды по массе покоя барионов. Распределения даны через каждые 0,5 с для $t < 5$ и через каждые 5 с для $t > 5$ (из [263])

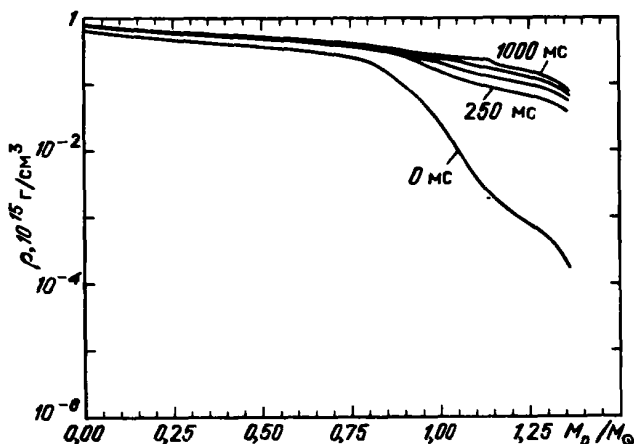


Рис. 111. Эволюция распределения плотности массы покоя нейтронной звезды со временем. Распределения даны через каждые 250 мс для $t < 1$ с (из [263])

Для оценки нейтринной толщи $\tau_{\nu e}$ используем усредненное по энергии сечение взаимодействия

$$\bar{\sigma}_{\nu e} = 2 \cdot 10^{-44} \left(\frac{\overline{\epsilon_{\nu e}}}{m_e c^2} \right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-44} \left(\frac{5 kT}{m_e c^2} \right)^2 \text{ см}^2, \quad (40.13)$$

тогда

$$\tau_{\nu e} \approx \frac{\rho}{m_u} \bar{\sigma}_{\nu e} R_{\text{ef}} \approx 4 \cdot 10^{-15} \rho R_{\text{ef}} \left(\frac{kT}{100 m_e c^2} \right)^2. \quad (40.14)$$

Для всех моделей в табл. 51 время остывания в условиях непрозрачности

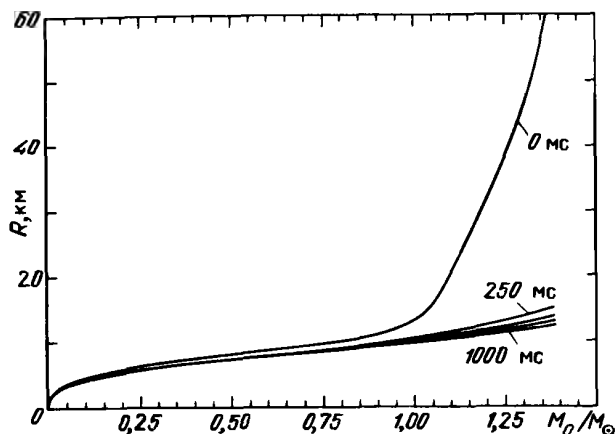


Рис. 112. Эволюция распределения радиуса нейтронной звезды по массе покоя барионов, распределения даны через каждые 250 мсек для $t < 1$ с (из [263])

(для не очень больших τ_ν)

$$t_\nu = e^{\tau_{\nu e}} t_{\nu f}$$

превышает несколько секунд для $R_{ef} = 1/10R$, а $\tau_{\nu e}$ меняется от $\tau_{\nu e} = 10^6$ для модели № 1 до $\tau_{\nu e} = 7$ для модели 21 из табл. 51. Численные расчеты начальных стадий остывания нейтронной звезды проводились при расчетах коллапса в рамках ньютоновской теории в [500] и при эволюционных расчетах в ОТО в [263], с уравнением состояния, аналогичном [28], с учетом давления нейтрино. В обоих случаях время остывания до образования нейтринной звезды с $T_c \leq 10^{10}$ К составило ~ 20 с. На рис. 110–112 из [263] приведена эволюция температуры, плотности и радиуса в первые 20 с остывания нейтронной звезды с массой покоя барионов $1,4 M_\odot$. Максимум температуры начальной модели лежит далеко от центра при $M_0 \approx 1,15 M_\odot$ и связан с нагревом и ростом энтропии при остановке сжатия. Адиабатическое сжатие приводит к росту температуры нейтронной звезды на ранних стадиях ее эволюции (рис. 110). Централь-

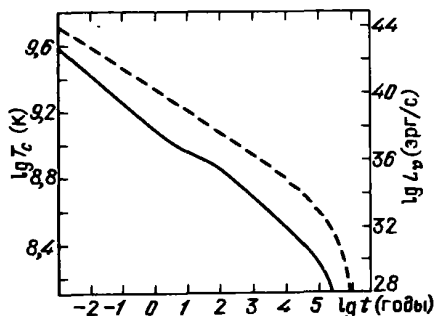


Рис. 113. Уменьшение со временем t центральной температуры нейтронной звезды с массой покоя $M_0 = 1,4 M_\odot$. T_c — сплошная кривая, и нейтринной светимости L_ν — штриховая кривая, при учете сверхтекучести ($\mathcal{S}$) и отсутствии магнитного поля (из [512])

ные области нагреваются сильнее из-за действия теплопроводности и неравновесности бета-процессов (см. § 20). Как видно из рис. 110–112, через 20 с радиус и распределение плотности нейтронной звезды достигают стационарного состояния ввиду уменьшения температуры и сильного вырождения вещества, а распределение температуры приобретает монотонный характер.

С уменьшением температуры нейтронная звезда становится прозрачной по поглощению и рассеянию нейтрино $\tau_{\nu e} < 1$. Эволюционные расчеты в этих условиях в рамках ОТО проведены в [512]. Учитывались механизмы нейтринного охлаждения, приведенные в § 19. Как и в [263], масса покоя нейтронной звезды принималась равной $1,4 M_{\odot}$, но брались другие уравнения состояния. Рассматривался перенос тепла в нейтронной звезде с учетом лучистой и электронной теплопроводности. Учитывалось влияние сверхтекучести на теплоемкость вещества. Результаты расчетов для уравнения состояния из [365] приведены на рис. 113, 114. Влияние магнитного поля на остывание нейтронной звезды той же массы исследовалось в [511]. Использовалось уравнение состояния с тензорными силами взаимодействия между нуклонами из [538], которое считается наиболее жестким из всех реалистических моделей с предельной массой нейтронной звезды $2,28 M_{\odot}$. Как видим из рис. 115, магнитное поле $\vec{B}$ в итоге ускоряет остывание нейтронной звезды. Это связано с уменьшением средней по Краммерсу непрозрачности вещества в магнитном поле ввиду падения $\sim 1/B^2$ сечения рассеяния квантов с $\omega < \omega_B = eB/m_e c$ и круговой поляризацией, соответствующей вращению вектора поля фотона в сторону, противоположную скорости вращения электрона в магнитном поле.

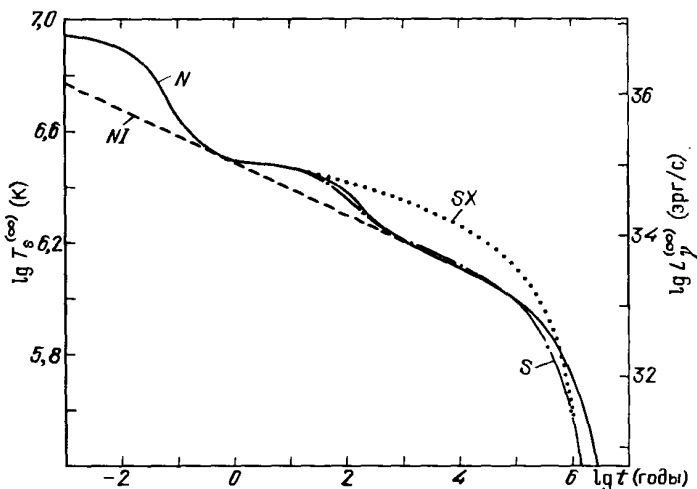


Рис. 114. Уменьшение со временем t поверхностной температуры нейтронной звезды с массой покоя $M_0 = 1,4 M_{\odot}$ для бесконечно удаленного наблюдателя $T_s^{(\infty)}$ и фотонной светимости $L_\gamma^{(\infty)}$ в отсутствие сверхтекучести (N) и двух вариантах учета сверхтекучести (S) и (SX). Штриховой линией дана кривая охлаждения в отсутствие сверхтекучести в приближении изотермического ядра (NI). Магнитное поле предполагалось отсутствующим (из [512])

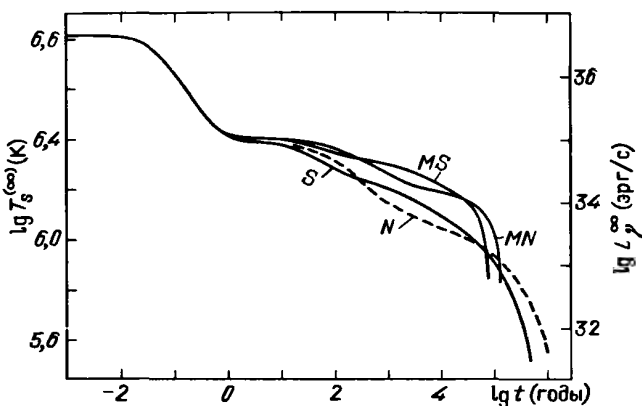


Рис. 115. Поверхностная температура нейтронной звезды с массой покоя $M_0 = 1,4M_\odot$ для бесконечно удаленного наблюдателя $T_s^{(\infty)}$ и светимость $L_\gamma^{(\infty)}$ в зависимости от времени t . Буквенные обозначения соответствуют следующим вариантам (N) – отсутствие сверхтекучести и магнитного поля, (S) учет сверхтекучести без магнитного поля (MN) и (MS) соответствуют тем же случаям (N) и (S), но в присутствии однородного магнитного поля с индукцией $B = 4,4 \cdot 10^{12}$ Гс (из [511])

г) **Затухание магнитных полей нейтронных звезд.** Исследование затухания магнитного поля нейтронных звезд теоретическими методами затруднено неопределенностями наших знаний о происхождении этих полей, механизмах генерации, физических свойствах вещества. Обычно поля генерируются омическими токами, которые затухают из-за конечной проводимости, но в условиях сверхпроводимости не затухают вовсе. В [190] показано, что ориентация магнитных моментов нейтронов может привести к магнитному моменту звезды $10^{27} - 10^{30}$ Гс·см³, причем поле в этом случае не должно затухать.

Статистический анализ наблюдательных данных по пульсарам приводит к выводу о среднем времени затухания поля $\tau_m \approx 2 \cdot 10^6$ лет [545]. Оптические наблюдения пульсаров в двойных системах PSR 0655 + 64 ($P = 0,196$ с) и PSR 0820 + 02 ($P = 0,865$ с) привели к открытию оптических партнеров этих пульсаров, которые оказались белыми карликами с нижней оценкой возврата по кривой охлаждения § 33: $\tau_e = 2 \cdot 10^9$ и 10^7 лет соответственно. Естественно, что эти же оценки возраста применимы и для самих пульсаров. Магнитные поля данных пульсаров, оцениваемые из наблюдений времени замедления $P/\dot{P}$ и формулы дипольного излучения [143] составляют $B = 10^{10}$ Гс для PSR 0655 + 64 и $B = 3 \cdot 10^{11}$ Гс для PSR 0820 + 02. Таким образом, наблюдения показывают, что даже через $2 \cdot 10^9$ лет магнитное поле совсем затухло. В [450], где изложены результаты оптических наблюдений, предполагается существование двух компонент магнитного поля нейтронной звезды с большой величиной и малым временем жизни $\sim \tau_m$ и малого поля, которое практически не затухает. Возможно, что вторая составляющая связана с токами в сверхпроводящей компоненте вещества и (или) с выстраиванием магнитных моментов барионов.

§ 41. Черные дыры и аккреция

Если масса коллапсирующего ядра превышает предельную массу нейтронной звезды, то в результате образуется черная дыра — объект с очень сильным гравитационным полем $\varphi_G \sim c^2$, существование которого связано с ОТО. Свойства черных дыр описаны в ряде монографий (см., например, [110, 221, 169]). Самым важным для наблюдений свойством черной дыры является невпускание ею света, так что в вакууме она может быть замечена только по загораживанию какого-нибудь известного источника света. Однако пространство между звездами и галактиками заполнено газом, который падает на черную дыру, нагревается и излучает, делая ее в принципе доступной для наблюдений. Наиболее мощная аккреция и лучшие наблюдательные возможности имеют место, когда черная дыра входит в состав двойной системы и вещество с соседней нормальной звезды перетекает на черную дыру. Именно к таким системам относятся кандидаты в черные дыры из числа рентгеновских источников в двойных системах: CygX-1, CirX-1, LMCX-1, LMCX-3, A0620-00, 4U1658-48 (GX339-4) и SS433 [478, 222a].

Ниже рассмотрены различные модели аккреции на черные дыры. Все модели являются гидродинамическими, т.е. длина свободного пробега частиц предполагается меньше размеров системы. В межзвездной среде при сильной ионизации это связано с магнитным полем, запутывающим траектории электронов и ионов, а в двойных системах, где плотность велика, пробеги, определяемые кулоновскими столкновениями, также малы.

а) Сферически-симметричная аккреция. При сферически-симметричной аккреции происходит переход течения через скорость звука в особой точке типа седла системы гидродинамических уравнений. Условие перехода через скорость звука однозначно определяет поток массы $\dot{M}$ и все свойства течения при заданных T_∞ и ρ_∞ . В адиабатическом течении переход через скорость звука в гравитационном поле точечной массы возможен лишь при показателе адиабаты $\gamma < 5/3$. Теория адиабатической аккреции изложена в [110, 227]. Ниже рассматриваются течения с переходом через скорость звука и сверхзвуковым потоком вблизи гравитирующего центра.

Исследование сферически-симметричной аккреции межзвездного газа на черные дыры показало, что при наличии магнитного поля, замороженного в плазму, эффективность превращения в тепло кинетической энергии падения достигает $\eta \approx 10\%$ [228], в то время как в отсутствие поля тормозное излучение приводит к $\eta \approx 10^{-8}$. При радиальном падении газа магнитные силовые линии вытягиваются по радиусу $B_r \sim r^{-2}$ и энергия магнитного поля в единице объема $E_M \sim B^2 \sim r^{-4}$ растет быстрее кинетической $E_{\text{kin}} \sim \rho v^2 \sim \dot{M}v/r^2 \sim r^{-5/2}$ ($\dot{M} = 4\pi\rho v r^2$ — стационарный поток массы, $v \sim r^{-1/2}$ при свободном падении). Так как энергия E_M не может превысить E_{kin} по физическому смыслу, в [228] предполагается, что в аккреционном потоке устанавливается равнораспределение энергии $E_M \approx E_{\text{kin}}$. В [228] рассматривался только адиабатический нагрев падающего вещества. Поддержка равнораспределения $E_M \approx E_{\text{kin}}$ происходит за счет диссипации энергии магнитного поля, избыток которой идет на нагрев плазмы. Данный нагрев учтен в [293] и привел к увеличению эффектив-

ности η до $\sim 30\%$, что может считаться реалистической оценкой в этих предположениях.

Если $E_M \sim r^{-4}$ — изменение энергии магнитного поля без диссипации, а $E'_M = E_{\text{kin}} \sim r^{-5/2}$ — энергия магнитного поля в потоке, то рост энтропии единицы объема вдоль радиуса за счет аннигиляции поля при стационарном течении определяется соотношением

$$Q_M = \left(\rho T \frac{dS}{dr} \right)_M = \left(\frac{dE_M}{dr} - \frac{dE'_M}{dr} \right)_{E_M = E'_M} =$$

$$= -4 \frac{E_M}{r} + \frac{5}{2} \frac{E_M}{r} = -\frac{3}{2r} \frac{B^2}{8\pi}. \quad (41.1)$$

Рассмотрим отдельно области с нерелятивистскими

$$kT \ll m_e c^2, \quad \gamma_1 = 5/3$$

и релятивистскими электронами*):

$$kT \gg m_e c^2,$$

$$\rho E = \frac{1}{2} \left(3P + \frac{3}{2} P \right) = \frac{9}{4} P = nP, \quad (41.2)$$

$$\gamma_1 = 1 + \frac{1}{n} = 13/9.$$

Здесь $P_e = P_p = 1/2P$, γ_1 дано в (1.11), n — индекс адиабаты, для простоты рассмотрена водородная плазма. Из уравнения баланса энергии

$$\frac{dE}{dr} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr} = \frac{Q_M}{\rho} - \frac{\epsilon_B}{v_r}, \quad (41.3)$$

где ϵ_B (эрг $\cdot$ с $^{-1} \cdot$ г $^{-1}$) — скорость магнитотормозных потерь максвелловской плазмы, при учете

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \rho v_r^2, \quad v_r = \alpha v_{ff} = \alpha \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad \overline{B_1^2} = \frac{2}{3} \overline{B^2}, \quad (41.4)$$

$$\epsilon_B = \frac{e^2}{m_p c} \left(\frac{e B_1}{m_e c} \right)^2 \frac{kT}{m_e c^2} \approx 2,3 T B_1^2 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \quad (41.5)$$

при $kT \ll m_e c^2$ (НР),

$$\epsilon_B = 8 \frac{e^2}{m_p c} \left(\frac{e B_1}{m_e c} \right)^2 \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^2 \approx 3,2 \cdot 10^{-10} T^2 B_1^2 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-1} \quad (41.6)$$

при $kT \gg m_e c^2$ (Р),

*) Протоны всегда остаются нерелятивистскими.

получаем уравнения для $T(r)$ в виде

$$\frac{3}{2} \frac{dT}{dr} + \frac{3}{2} \frac{T}{r} + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2 2GM}{\mathfrak{R}_g r^2} - 1,5 \frac{T\dot{M}}{\mathfrak{R}_g r^2} = 0 \text{ (HP)}, \quad (41.7)$$

$$\frac{9}{4} \frac{dT}{dr} + \frac{3}{2} \frac{T}{r} + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2 2GM}{\mathfrak{R}_g r^2} - 2,2 \cdot 10^{-10} \frac{T^2 \dot{M}}{\mathfrak{R}_g r^2} = 0 \text{ (P)}. \quad (41.8)$$

Здесь $\mathfrak{R}_g = 2k/m_p$ — газовая постоянная ионизованного водорода. При заданных значениях ρ_∞ , T_∞ , $\dot{M}$ поток массы определяется соотношением

$$\dot{M} = 4\pi\rho v_r r^2 = \frac{10^{32}}{c^2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right) \left(\frac{T_\infty}{10^4 \text{ К}} \right)^{-3/2} (\text{г} \cdot \text{с}^{-1}). \quad (41.9)$$

Пренебрегая излучением в (41.7) и адиабатическим нагревом в (41.8), получаем решение в виде

$$T = 2 \cdot 10^{12} x + 2,7 \cdot 10^{12} x \alpha^2 \ln \left(\frac{10^8 x}{T_\infty / 10^4 \text{ К}} \right) \text{ (HP)}, \quad (41.10)$$

$$T = \frac{m_e c^2}{k} + T_1 \frac{e^{a(x-x_0)} - 1}{e^{a(x-x_0)} + 1}, \quad T_1 \gg \frac{m_e c^2}{k} \text{ (P)}. \quad (41.11)$$

Здесь

$$x = r_g/r = \frac{2GM}{rc^2} < 1, \\ T_1 = 2,8 \cdot 10^{12} \alpha \left(\frac{T_\infty}{10^4} \right)^{3/4} (M/M_\odot)^{-1/2} \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24}} \right)^{-1/2}, \\ a = 1,3 \alpha \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{T_\infty}{10^4 \text{ К}} \right)^{-3/4} \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right). \quad (41.12)$$

Величина x_0 слабо зависит от T_∞ , ρ_∞ и для различных значений α равна

α^2	1	1/3	1/10
x_0	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$

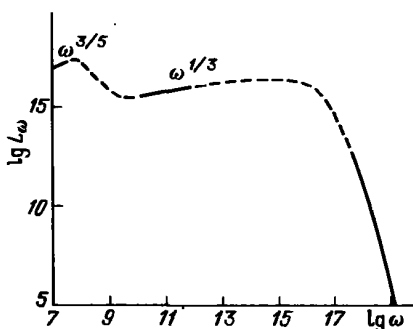
При $x = x_0$ имеет место $T = m_e c^2/k$ и происходит сшивка решений (41.10) и (41.11). Светимость и спектр в данной модели вычислены в [293]. Светимость за счет магнитотормозного излучения определяется главным образом релятивистскими электронами из (41.11) и равна

$$L_B = \begin{cases} 2,7 \cdot 10^{31} \alpha^4 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right)^2 \left(\frac{T_\infty}{10^4 \text{ К}} \right)^{-3}, & a < 1 \\ 9 \cdot 10^{31} \alpha^2 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right) \left(\frac{T_\infty}{10^4 \text{ К}} \right)^{-3/2}, & a \gg 1. \end{cases} \quad (41.13)$$

Сравнивая с (41.9) получаем, что при реалистическом значении $\alpha^2 = 1/3$ величина $\eta = L_B/Mc^2 \leq 30\%$. Примерный спектр излучения L_ω ($L_B = \int_0^\infty L_\omega d\omega$) черной дыры с массой $M = 10 M_\odot$ приведен на рис. 116 из [32]

Область $\sim \omega^{3/5}$ связана с излучением нерелятивистских электронов; при $kT \gg m_e c^2$, $\hbar\omega \ll kT$, $L_\omega \sim \omega^{1/3}$, а при $\hbar\omega \approx \hbar\omega_{B, \max} (kT_1/m_e c^2)^2 \sim \sim 0,01$ кэВ для $\rho_\infty = 10^{-24}$ г · см⁻³, $T_\infty = 10^4$ К, $B_{\max} \sim 10^5$ Гс наступает

Рис. 116. Спектр магнитотормозного излучения черной дыры с $M = 10 M_\odot$ при сферически симметричной аккреции с хаотическим магнитным полем при $\rho_\infty = 10^{-24}$ г/см³, $T_\infty = 10^4$ К, $\alpha^2 = 1/3$. Сплошные линии — асимптотические зависимости, штриховые — экстраполяция



экспоненциальный завал*). Видимая величина m_V такой черной дыры в предположении плоского спектра равна [293]

$$m_V = 4,8 - 2,5 \lg L/L_\odot + 5 \lg (R/10 \text{ пк}) \approx \\ \approx 14,1 - 7,5 \lg M/M_\odot - 2,5 \lg \left[\left(\frac{\rho_\infty}{10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} \right)^{3/2} \left(\frac{T_\infty}{10^4 \text{ К}} \right)^{-9/4} \right] + \\ + 5 \lg \left(\frac{R}{10 \text{ пк}} \right). \quad (41.14)$$

При большой плотности и большой светимости возрастает роль тормозного излучения, становится существенным взаимодействие аккреционного потока с потоком выходящего излучения, что меняет соотношения (41.7) — (41.14). Расчеты аккреции на черную дыру с учетом обратного влияния излучения отсутствуют. Учет этого влияния при аккреции на нейтронную звезду сделан в [286].

*) Спектр синхротронного излучения единицы объема релятивистской максвелловской плазмы есть [32]

$$I_\omega = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\rho^2}{m_p} \frac{e^2}{c} \omega_B z \exp \left[-\left(\frac{9}{2} \right)^{1/3} z^{1/3} \right], & z \gg 1 \\ \frac{3^{1/6}}{\pi} \Gamma(4/3) \Gamma(5/3) \frac{\rho}{m_p} \frac{e^2}{c} \omega_B z^{1/3}, & z \ll 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{\omega}{\omega_B} \left(\frac{m_e c^2}{kT} \right)^2, \quad I (\text{эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}) = \int_0^\infty I_\omega d\omega.$$

В предыдущем рассмотрении равномерное распределение предполагалось в каждой точке потока. В действительности аннигиляция поля может происходить дискретно и сопровождаться образованием ударных волн [58]. Спектр излучения даже при низких светимостях может из-за этого отличаться от рис. 116, который следует рассматривать лишь как ориентировочную оценку.

б) Аккреция при упорядоченном магнитном поле. Если характерный масштаб неоднородности магнитного поля намного превышает радиус аккреции

$$r_a = \frac{GM}{v_s^2} \quad (v_s - \text{скорость звука в газе}), \quad (41.15)$$

то течение перестает быть сферически симметричным. В случае однородного магнитного поля аккреция имеет цилиндрическую симметрию. Для покоящейся черной дыры устанавливается стационарная картина силовых

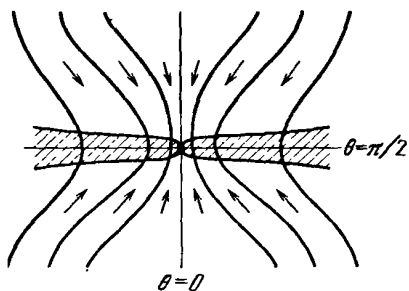


Рис. 117. Схематическая картина силовых линий магнитного поля в веществе вокруг черной дыры, однородного на бесконечности с учетом искажений, вызываемых токами диска. Стрелками указано направление скорости потока газа, заштрихована область, занимаемая плотным диском (из [293, 294])

линий магнитного поля, вдоль которых вещество течет и формирует диск в плоскости симметрии. Качественная картина течения приведена на рис. 117. При наличии большой, но конечной проводимости вещество диска медленно просачивается сквозь силовые линии магнитного поля по направлению к черной дыре. Исследование процесса формирования, расчет структуры диска, поддерживаемого магнитным полем и его излучение сделаны в [294, 279].

Рассмотрим приближенно структуру стационарного диска. Равновесие диска без вращения определяется балансом магнитных и гравитационных сил

$$\frac{GM\Sigma}{r^2} = \frac{1}{c} B_\theta I_\varphi \approx \frac{2\pi}{c^2} I_\varphi^2. \quad (41.16)$$

Здесь $\Sigma = 2h\rho$ — поверхностная плотность, ρ — средняя плотность вещества, I_φ — круговой ток, протекающий через элемент площади диска единичной длины по r и высоты $2h$. Приближенно примем [283]

$$B_\theta \approx B_r \approx \frac{2\pi}{c} I_\varphi. \quad (41.17)$$

равновесие по вертикали поддерживается градиентом давления

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\rho GM}{r^2} \frac{z}{r}, \quad h \approx \left(\frac{r^3}{GM} \frac{P}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (41.18)$$

С учетом превращения в тепло энергии вещества, натекающего на диск со скоростью, близкой к скорости свободного падения, получаем для потока энергии от единицы поверхности диска

$$F = \frac{GMM}{4\pi r^3} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^{3/2} \right]. \quad (41.19)$$

Для радиальной скорости из закона сохранения массы имеем

$$v_r = -\frac{\dot{M}}{2\pi r \Sigma} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{3/2} \right]. \quad (41.20)$$

Здесь $\dot{M}$ определяется параметрами на бесконечности в (41.9), $R \approx r_a$ из (41.15). В диске происходит омическая диссипация, за счет которой вещество просачивается сквозь магнитное поле и которая определяет основное выделение энергии

$$\frac{GMM}{4\pi r^3} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{3/2} \right] = \frac{I_\varphi^2}{4\pi \sigma}, \quad (41.21)$$

σ — проводимость.

Если диск непрозрачен для излучения, то энергия переносится к его поверхности лучистой теплопроводностью, так что приближенно имеем

$$acT^4 = \kappa \Sigma F, \quad (41.22a)$$

$T(r)$ — средняя температура диска.

Для прозрачного диска

$$2F = \Sigma(\epsilon_{ff} + \epsilon_B). \quad (41.22b)$$

Здесь учтено тормозное ϵ_{ff} и магнитотормозное ϵ_B излучение плазмы. Для известных функций P , κ , σ , ϵ_{ff} и ϵ_B уравнения (41.16)–(41.22) определяют структуру невращающегося диска с магнитным полем вокруг черной дыры.

В ламинарном приближении диск всегда является оптически толстым, электроны — невырожденными и нерелятивистскими, давление определяется, в основном, ионизованным газом (1.2). Проводимость за счет кулоновских столкновений приведена в (39.47). В таком диске выделяются две области: внешняя, где в непрозрачности преобладают тормозные процессы с κ_{ff} из (7.15), (8.67), и внутренняя, где преобладает непрозрачность, связанная с магнитотормозным поглощением нерелятивистских электронов с κ_B из (8.70). Ввиду малости кулоновской проводимости, вещество медленно просачивается сквозь магнитные силовые линии и масса диска оказывается в стационарном случае большой: для черной дыры с массой $M = 100 M_\odot$ масса стационарного диска $M_d \approx 0,2 M_\odot$.

Основная масса диска накапливается в его внешних слоях. Внутренние области диска являются основным источником излучения, температура там достигает $10^8 - 10^9$ К, а магнитное поле $10^{10} - 10^{12}$ Гс. Толщина диска нигде не превышает 0,01 доли радиуса.

В приближении турбулентного диска диссипация происходит гораздо быстрее за счет запутывания силовых линий магнитного поля, при этом [294]

$$\sigma \approx \sigma_T \approx \frac{c^2}{\tilde{\alpha} 4\pi h \sqrt{P/\rho}}, \quad \tilde{\alpha} = 0,1 \div 0,01. \quad (41.23)$$

Внешние области такого диска прозрачны относительно излучения, электроны там нерелятивистские, преобладает газовое давление, а вклад тормозных с ϵ_{ff} из (8.67) и магнитотормозных с ϵ_B из (41.5) потерь сравнимы

между собой. При $\frac{M}{M_\odot} \frac{r_g}{r} = mx \approx 100 \alpha^2$ электроны становятся реляти-

вистскими и $\epsilon_B \gg \epsilon_{ff}$ из (8.69) и (8.71). Зона релятивистских электронов является узкой по радиусу ввиду быстрого роста оптической толщи и превращения диска в непрозрачный по мере уменьшения радиуса. Во внутренних частях диска при $10 < mx < 1000$ преобладает газовое давление и электронное рассеяние в непрозрачности κ_{es} из (7.29), а при $mx > 1000$ в давлении преобладает излучение. Масса турбулентного диска всегда остается малой из-за большой диссипации и быстрого просачивания вещества сквозь магнитное поле. Отметим еще раз немонотонную зависимость $T(r)$ из-за перехода от прозрачного к непрозрачному диску при уменьшении r . В [294] приведены формулы для распределения параметров диска в различных его областях.

Так как при стационарной дисковой аккреции гравитационная энергия всегда успевает перейти в тепло, светимость черной дыры при минимальном радиусе $1,5 r_g$ составляет

$$L = \frac{1}{3} \dot{M} c^2 \quad \text{с } \dot{M} \text{ из (41.9)}. \quad (41.24)$$

Спектр излучения непрозрачного диска связан с его эффективной температурой, определяемой соотношением

$$\frac{ac}{4} T_{\text{ef}}^4 = F \quad (41.25)$$

локально в каждой точке поверхности диска при полной термализации энергии в ударной волне. Отсюда с учетом (41.19) во внутренних областях диска с $r \ll R$, где происходит основное энерговыделение, имеем

$$T_{\text{ef}} \sim r^{-3/4}. \quad (41.26)$$

Распределение (41.26) после интегрирования по поверхности диска приводит к спектру

$$L(\omega) \sim \omega^{1/3} \quad (41.27)$$

с экспоненциальным завалом при $\hbar\omega \sim kT_{\text{max}}$, $T_{\text{max}} \approx 7 \cdot 10^5$ К для $M = 10M_\odot$. Таким образом, несмотря на существенные различия в картинах течения для хаотического и упорядоченного магнитного поля, в случае

ламинарного диска спектры их излучения близки и формула (41.14) для m_V здесь также применима. В турбулентном диске имеется большая прозрачная область, магнитотормозное излучение которой приходится на инфракрасный диапазон и может быть сравнимо по мощности с ультрафиолетовым и мягким рентгеновским излучением внутренних непрозрачных областей диска.

Если аккрецирующее вещество обладает моментом вращения, то в замкнутом диске генерируются электрические поля, приводящие к образованию релятивистских частиц [35]. Такой механизм, возможно, действует в источнике Суг X – 1. ядрах галактик [300] и аналогичен униполярной машине, предлагаемой для объяснения излучения пульсаров [376].

в) Коническая аккреция на быстро движущуюся черную дыру. Быстрое движение черной дыры приводит к обтеканию ее газом и формированию конической ударной волны сзади. Проходя через ударную волну, вещество теряет скорость и падает на черную дыру внутри конуса. Качественная картина конической аккреции дана Солпитером [556]. Для первоначально холодного газа, падающего на гравитирующий центр по параболическим орбитам, в [47] получено автомодельное решение, свойства которого существенно зависят от показателя адиабаты γ и от распределения плотности в падающем газе. Система стационарных гидродинамических уравнений для движения газа в поле центральной массы M записывается в сферической

системе координат с $v_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$:

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} &= 0 \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) &= 0 \\ v_r \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta} = 0, \quad \tilde{S} - \text{функция энтропии } S, \\ P &= \tilde{S} \rho^\gamma. \end{aligned} \quad (41.28)$$

Аutomодельное решение системы (41.28) ищется в виде

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} U(\theta), \quad v_\theta = \sqrt{\frac{2GM}{r}} V(\theta), \\ \rho &= \rho_0 \sqrt{2GM} r^{-\alpha} R(\theta), \quad P = \rho_0 (2GM)^{3/2} r^{-(1+\alpha)} \Phi(\theta). \end{aligned} \quad (41.29)$$

В области перед ударной волной имеет место решение

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 r^{-\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-2\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sqrt{2GM}, \quad P = 0, \\ v_r &= -\sqrt{\frac{2GM}{r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad v_\theta = -\sqrt{\frac{2GM}{r}} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (41.30)$$

Однородная плотность на бесконечности соответствует $\alpha = 1/2$. Ударная волна расположена на прямом конусе с углом раствора $\theta = \theta_s$ причем θ_s является собственным числом данной задачи. Решение системы обыкновенных уравнений для $U(\theta)$, $V(\theta)$, $R(\theta)$, $\Phi(\theta)$ получено численно в [47] и обладает следующими свойствами.

Решение, в котором конус за черной дырой заполняется веществом полностью имеет место для $\alpha = 1/2$ только при $1,31 \leq \gamma \leq 5/3$, причем угол раствора ударной волны растет с ростом γ (рис. 118 и табл. 52 [47]). Для $\alpha > 1/2$ заполненный конус существует только при одном γ для каждого α (табл. 53 [47]). При тех же α и γ , для которых существует решение с заполненным конусом, а также для всех других α и γ существуют решения, у которых плотность обращается в бесконечность, а скорость v_θ в нуль при конечном угле раствора конуса $\theta = \theta_k$ причем область с $\theta < \theta_k$ остается пустой (рис. 119 [47]). Для данного α и γ каждому θ_k соответствует θ_s , так что $\theta_1(\gamma, \alpha) < \theta_s < \theta_2(\gamma, \alpha)$. При $\alpha = 1/2$ имеет место $\theta_1(\gamma, 1/2) = \theta_s$ из табл. 52, т.е. при существовании решения с заполненным конусом, ему соответствует минимальный угол наклона ударной волны. Сложные свойства автомодельных решений связаны с наличием особой линии у автомодельной системы обыкновенных уравнений и различного числа пересечений интегральной кривой с этой особой линией.

Если условия течения таковы, что в ударной волне существенны потери на излучение, то раствор конуса за черной дырой может быть значительно меньше, чем в табл. 52 при данном γ . Эффективно это соответствует приближению $\gamma \rightarrow 1$.

Численное решение задачи об аккреции на движущийся гравитирующий центр требует знания граничных условий при конечном радиусе r , которые влияют на решение. В [404, 577] для моделирования черной дыры использовалось условие полного поглощения вещества при конечном малом радиусе r_0 . Расчеты проводились для чисел Маха набегающего потока на бесконечности $M = 0,6, 1,4, 2,4, 5,0$ и для показателей адиабаты $\gamma = 1,1, 4/3, 5/3$. В [577] получено, что при $\gamma = 5/3$ и $4/3$ перед центром встает оттод-

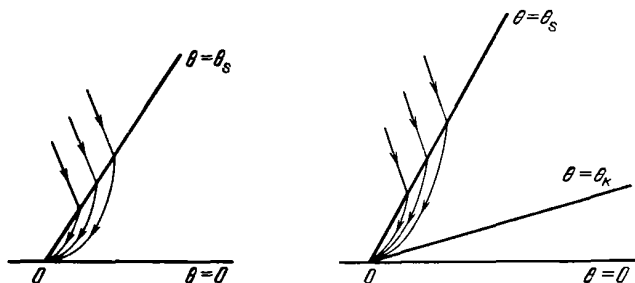


Рис. 118. Картина течения газа, занимающего все пространство, θ_s — угол наклона ударной волны, из [47]

Рис. 119. Картина течения при наличии полого конуса с углом наклона $\theta = \theta_k$ сзади движущегося центра, θ_s — угол наклона ударной волны, из [47]

Зависимость угла наклона ударной волны θ_s от показателя адиабаты γ для течений, занимающих все пространство при $\alpha = 1/2$

γ	θ_s	γ	θ_s	γ	θ_s	γ	θ_s
1,31	1,298	1,4	1,679	1,5	2,131	1,6	2,651
1,34	1,426	1,45	1,905	1,55	2,375		

Таблица 53

Зависимость показателя адиабаты γ , соответствующего течению с заполненным конусом, и соответствующего угла наклона ударной волны θ_s от показателя α

α	γ	θ_s	α	γ	θ_s
0,6	1,008	0,04	1,3	1,26	0,7
0,8	1,02	0,09	1,34	1,24	0,61
1	1,08	0,22	1,4	1,15	0,33
1,2	1,18	0,51	1,45	1,05	0,11

шая ударная волна, причем плотность за ударной волной много больше, чем на оси конуса за черной дырой. При $\gamma = 1,1$ ударная волна примыкает к поверхности поглощающей сферы и контраст плотности в конусе за ударной волной невелик. Численное решение данной проблемы далеко от завершения. Светимость здесь зависит от магнитного поля и оценивается аналогично случаю сферической аккреции в п.а.

г) Дискковая аккреция в двойных системах. В тесных двойных системах из-за большого вращательного момента аккрецирующее вещество имеет форму диска, хотя и здесь при большой скорости звездного ветра от нормальной звезды возможны ситуации, когда диск не образуется и происходит изложена аккреция [429]. В предположении стационарного тонкого диска при наличии турбулентной вязкости теория дисковой аккреции предложена в [226] и разрабатывалась в [575, 515]. В [515] рассматривались уравнения ОТО, в остальных работах использовалась ньютоновская теория. Полуколичественно ОТО можно учесть, если принять [535]

$$\varphi_G = \frac{GM}{r - r_g}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (41.31)$$

Для моделирования граничных условий на внутренней границе диска нужно учесть производные от давления и энтропии вдоль радиуса диска. При малой радиальной скорости v_r уравнения стационарной дисковой аккреции запишутся в виде ([533], см. также [33])

$$-B_5 2\pi r \Sigma v_r = \dot{M} - \text{сохранение массы}, \quad (41.32)$$

$$\dot{M}(l - l_{in}) = 4\pi r^2 \alpha P h - \text{сохранение вращательного момента}, \quad (41.33)$$

$$\dot{M} \left[-(l - l_{in}) \frac{d\Omega}{dr} + B_1 T \frac{dS}{dr} \right] = B_3 4\pi r \frac{acT^4}{3\kappa\rho h} - \text{сохранение энергии}, \quad (41.34)$$

$$h^2 \Omega_K^2 = B_4 \frac{P}{\rho} - \text{равновесие по толщине диска,} \quad (41.35)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = r(\Omega^2 - \Omega_K^2) - \text{равновесие по радиусу.} \quad (41.36)$$

Здесь ρ , T , P , h , Σ , $\dot{M}$ определены выше, Ω , $l = \Omega r^2$ – текущие угловая скорость и вращательный момент, $\alpha < 1$ – параметр турбулентной вязкости.

$$\Omega_K = \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi_G}{dr} \right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{1/2} \frac{r}{r - r_g} - \text{кеплеровская угловая скорость,} \quad (41.37)$$

$$l_{in} = \frac{1}{3} r^4 \frac{d^2 \varphi_G}{dr^2} = \left(\frac{2}{3} GM r_{in} \right)^{1/2} \left(\frac{r_{in}}{r_{in} - r_g} \right)^{3/2} - \text{вращательный момент} \quad (41.38)$$

на последней устойчивой орбите в потенциале (41.31).

Для полностью ионизованного газа P , S , μ даны в (1.2), (1.18), (1.7), непознранность определяется свободно-свободными, (7.15), свободно-связанными (7.18) переходами и электронным рассеянием (7.29). Безразмерные постоянные B_i определяются распределением плотности по толщине диска. Согласно [533, 495] имеем

$$B_1 = 0,67, \quad B_3 = B_4 = 6, \quad B_5 = 0,5. \quad (41.39)$$

Вдали от внутренней границы тонкого диска члены с dS/dr и dP/dr в (41.34), (41.36) малы и из (41.32) – (41.39) следует стандартная теория

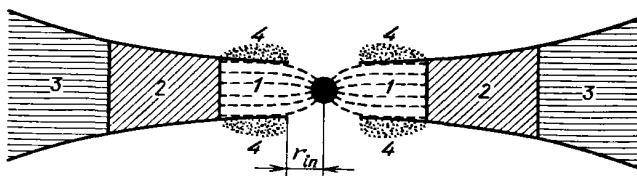


Рис. 120. Дискковая аккреция на черную дыру. 1 – радиативная зона с $P = P_r$, $\kappa = \kappa_{es}$, 2 – газовая зона с рассеянием $P = P_g$, $\kappa = \kappa_{es}$, 3 – газовая зона с тормозными процессами $P = P_g$, $\kappa = \kappa_{ff} + \kappa_{fb}$, 4 – корона с $T = 10^8 - 10^9$ К (из [33])

дискковой аккреции [226, 575, 515] с потенциалом, отражающим свойства ОТО, причем из (41.36) – (41.38) следует $r_{in} = 3r_g$, как в метрике Шварцшильда [110]. При учете dP/dr граница диска сдвигается к центру

$$r_{in} = 3r_g - 3 \frac{(r_{in} - r_g)^3}{GM} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \right)_{in}. \quad (41.40)$$

Выбор давления на внутренней границе диска в данной постановке задачи содержит элемент произвола, так как при уменьшении радиуса скорость v_r стремится к скорости звука v_s и система уравнений усложняется [495,

400, 401, 494]. В [533] на внутренней границе $r = r_{\text{in}}$ принято условие $u_r = v_s$, тогда r_{in} находится, как собственное число системы дифференциальных уравнений относительно S , P и Ω . Для параметров $M = 10 M_{\odot}$ $\dot{M} = \dot{M}_{\text{cr}} = \frac{64\pi GM}{c\kappa_{\text{es}}}$, $x_{\text{H}} = 0,7$, $\alpha = 0,001$ в [533] получено $r_{\text{in}}/r_g = 2,885$.

Как показано в [226, 575], в тонком аккреционном диске имеются три характерных области (рис. 120). При $\dot{M} > (1/20 \div 1/50) \dot{M}_{\text{cr}}$ ($1/20$ при конвективном, $1/50$ — при лучистом переносе энергии по z [285]) во внутренней части диска имеется радиативная зона № 1 с $P = P_r \gg P_g$ и $\kappa = \kappa_{\text{es}}$. При больших радиусах расположены, соответственно, зоны 2 с $P = P_g \gg P_r$ и $\kappa = \kappa_{\text{es}}$ и далее 3 с $P = P_g \gg P_r$ и $\kappa = \kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{fb}}$. С уменьшением $\dot{M}$ радиативная зона пропадает, а граница между зонами 2 и 3 сдвигается к центру. Если пренебречь членом с dS/dr , то вся гравитационная энергия, выделяемая в диске, излучается с поверхности. Принимая спектр локально планковским с эффективной температурой T_{ef} , получим

$$\pi r c T_{\text{ef}}^4 = -\dot{M}(l - l_{\text{in}}) \frac{d\Omega}{dr}, \quad (41.41)$$

С учетом (41.37)–(41.38) получаем [33]

$$T_{\text{ef}}(r) = 2,05 \cdot 10^7 \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\text{cr}}} \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/4} \left(\frac{3r_g}{r} \right)^{3/4} \varphi_{r, r_{\text{in}}}^{1/4}, \quad (41.42)$$

где

$$\varphi_{r, r_{\text{in}}} = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{3r_g}{r}} & \text{для ньютоновского потенциала,} \\ \left(\left(1 - \sqrt{\frac{3r_g}{r}} \right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{3r} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3r_g}{r}} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right)^{-3} & \text{для потенциа-} \\ & \text{ла (41.31).} \end{cases} \quad (41.43)$$

Суммарный спектр диска имеет степенной вид $F_{\omega} \sim \omega^{1/3}$, аналогично (41.27) с экспоненциальным завалом при

$$\omega = \frac{k T_{\text{ef}}(\beta r_{\text{in}})}{\hbar} = 2,7 \cdot 10^{18} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\text{cr}}} \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/4} \beta^{-3/4} \varphi_{\beta r_{\text{in}}, r_{\text{in}}}^{1/4}. \quad (41.44)$$

Здесь $r = \beta r_{\text{in}}$ соответствует максимуму T_{ef} , $\beta = 49/36$, $\varphi_{\beta r_{\text{in}}, r_{\text{in}}} = 1/7$, $\beta^{-3/4} \varphi^{1/4} = 0,49$ для ньютоновского потенциала; $\beta = 1,59$, $\varphi_{\beta r_{\text{in}}, r_{\text{in}}} = 0,113$, $\beta^{-3/4} \varphi^{1/4} = 0,41$ для потенциала (41.31).

Как показано в [35, 285], внутренняя область диска (зона I на рис. 120) неустойчива относительно конвекции. Механический перенос энергии, порождаемой конвекцией, приводит к образованию горячей ($T = 10^8 - 10^9$ К) короны с $n \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ над радиативной зоной. Обратное комптоновское взаимодействие теплового излучения диска с горячими электронами короны приводит к появлению степенной зависимости в жесткой области спектра [343, 600], что может объяснить наблюдаемую жесткую (до ~ 150 кэВ) часть спектра источника Cyg X-1.

Вдали от поверхности звезды или альфвеновской поверхности радиуса r_A , где $B^2/8\pi = \frac{1}{2}\rho v^2$, аккреция на нейтронную звезду или белый карлик не отличается от аккреции на черную дыру. Начиная с радиуса магнитосферы r_A или у поверхности звезды при малом поле, картина аккреции резко усложняется из-за взаимодействия аккреционного потока с магнитосферой и (или) поверхностью. Обзоры работ по аккреции на нейтронные звезды даны в [227, 33], а на белые карлики — в [249].

При сильном магнитном поле нейтронной звезды, когда $r_A > R_{ns}$, вещество останавливается у альфвеновской поверхности и течет вдоль силовых линий на магнитные полюса. Такая звезда излучает анизотропно и при вращении дает наблюдаемую картину рентгеновского пульсара. При слабом поле $r_A < R_{ns}$ горячих пятен на полюсах не образуется и рентгеновский пульсар не возникает. Аккреционный диск подходит к поверхности нейтронной звезды и сильно ее раскручивает, приводя к появлению миллисекундного радиопулсара после прекращения аккреции.

ГЛАВА 12

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 42. Иерархия характерных времен

Процессы, определяющие эволюцию звезд, характеризуются большим разнообразием характерных времен, из которых можно выделить гидродинамическое (τ_h), тепловое (τ_{th}), ядерное (τ_n) и время, характеризующее скорость слабых взаимодействий (τ_β). На протяжении почти всей эволюции, начиная от стадии молодой сжимающейся звезды до поздних стадий эволюции, τ_h остается минимальным из всех характерных времен. В моделях массивных предсверхновых имеет место ядерное равновесие, где время τ_n является наименьшим (см. § 34). В обычной звезде имеет место примерное равновесие относительно быстрых процессов (например, статическое равновесие), а время эволюции определяется одним из медленных.

1. На стадии гравитационного сжатия

$$\tau_h \ll \tau_{th} \ll \tau_\beta, \tau_n. \quad (42.1)$$

Эволюция определяется здесь тепловым временем τ_{th} , звезда находится в почти статическом равновесии, а времена τ_β и τ_n столь велики, что ядерный состав остается замороженным (кроме самых легких ядер).

2. На главной последовательности условия (42.1) сохраняются, но эволюция определяется ядерным и слабым временами τ_n , τ_β и звезда находится в состоянии, близком к статическому и тепловому равновесию.

3. После образования гелиевого ядра наступает период гравитационного сжатия центральных областей и расширения оболочки, аналогичный периоду 1. От загорания гелия в ядре и вплоть до последних стадий характерные ядерные времена остаются сравнимыми с тепловыми

$$\tau_h \ll \tau_{th} \sim \tau_n \lesssim \tau_\beta \quad (42.2)$$

и определяют темп эволюции звезды.

Тепловое время в ядре существенно меньше, чем в оболочке τ_{th}^{env} , как и ядерное время, которое в центральных областях τ_n^{core} минимально, так как в оболочке ядерные реакции не идут вообще. На спокойных стадиях эволюции массивных звезд за главной последовательностью имеет место $\tau_{th}^{env} \sim \tau_n^{core}$, т.е. минимальное ядерное время звезды сравнимо с тепловым максимальным. Во время бурных событий типа гелиевой вспышки в выроджденном ядре или всплеск в гелиевом слоевом источнике (см. § 33) ядерное время в центральных областях или в гелиевом слое уменьшается до величины, сравнимой к локальным тепловым временам. Гидродина-

мическое время при этом остается минимальным и статическое равновесие звезды не нарушается.

4. В звездах малой и средней массы с $M \leq (6 \div 8) M_{\odot}$, ядра которых превращаются в белые карлики, условие минимальности τ_h никогда не нарушается. Слабые взаимодействия приводят к нейтринному охлаждению звезд, которое на стадии образования белого карлика преобладает над фотонным и определяет тепловое время $\tau_h \leq \tau_{th} \sim \tau_{\beta} \leq \tau_n$. В конце образования белого карлика после сброса оболочки ядерные реакции в карлике в центральных областях прекращаются и возможно лишь остаточное горение водорода и гелия в оболочке.

5. В более массивных звездах, у которых ядро после сброса оболочки превышает чандрасекаровский предел, развивается неустойчивость сложного типа, включающая в себя тепловые, ядерные и слабые процессы. У наименее массивных звезд этого интервала происходит быстрое падение τ_n из-за роста температуры в вырожденном C—O ядре, так что достигается условие

$$\tau_n \sim \tau_{th} \leq \tau_h, \tau_{\beta}, \quad (42.3)$$

означающее начало теплового взрыва (см. § 35).

6. Для больших масс наступление условия (42.3) не происходит, но захват электронов при их большой ферми-энергии ускоряется до тех пор, пока не наступает условие

$$\tau_{\beta} \sim \tau_h \leq \tau_{th}, \tau_n, \quad (42.4)$$

означающее наступление коллапса, вызываемого нейтронизацией (см. § 36).

7. В самых массивных звездах, где вырождение не наступает, происходит уменьшение τ_n из-за роста температуры, оно становится меньше τ_h , что означает установление ядерного равновесия. В процессе дальнейшего излучения энергии звезда попадает в область динамической неустойчивости, принципиально отличной от всех, рассмотренных выше.

При неустойчивостях, связанных с тепловыми, ядерными и слабыми процессами их развитие связано с быстрым уменьшением данных характерных времен. Если они становятся порядка или меньше гидродинамического, то эта неустойчивость заканчивается тепловым взрывом или коллапсом. Динамическая неустойчивость связана не с изменением характерного динамического времени τ_h , которое меняется слабо, а с изменением структуры равновесного состояния. В отличие от остальных типов, динамическая неустойчивость может быть исследована на основе теории консервативных механических систем. Основными здесь являются два эквивалентных метода: вариационный и малых возмущений.

§ 43. Вариационный принцип и малые возмущения

а) Вариационный принцип в ОТО. Рассмотрим равновесие сферически-симметричных звезд и их устойчивость на основе вариационного принципа. Рассмотрение проведем в рамках ОТО для возможности применения результатов к нейтронным и сверхмассивным звездам. В метрике шварцшильдовского типа [143]

$$ds^2 = -g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (43.1)$$

для произвольного сферически-симметричного распределения вещества

можно записать полную энергию звезды ϵ в виде [143]

$$e \equiv e(r) = 4\pi \int_0^r \tilde{E} n r^2 dr, \quad \epsilon = e(R), \quad (43.2)$$

где R — шварцшильдовский радиус звезды, $\tilde{E}$ — внутренняя энергия на один барион $\tilde{E} = \frac{\rho_0}{n} (E + c^2)$. Элемент физического объема сферического слоя dv равен

$$dv = 4\pi r^2 dr \sqrt{g_{11}} = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} dr. \quad (43.3)$$

Введем также N — полное число барионов в звезде и ν — число барионов внутри данного радиуса r

$$\nu(r) = 4\pi \int_0^r n r^2 \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} dr, \quad N = \nu(R). \quad (43.4)$$

Согласно вариационному принципу [201, 105], полная энергия звезды ϵ имеет экстремум в точке равновесия при заданном полном числе барионов N и фиксированном распределении энтропии по барионам. Полная энергия ϵ является в данном случае аналогом потенциальной энергии консервативной системы, причем консервативность обеспечивается неизменностью распределения энтропии. Введем лагранжеву координату ν из (43.4), так что

$$\frac{de}{d\nu} = \tilde{E} \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2}, \quad (43.5)$$

$$n = \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2} \left(4\pi r^2 \frac{dr}{d\nu}\right)^{-1}. \quad (43.6)$$

Найдем вариацию полной энергии ϵ как функционала от вариации радиуса $\delta r(\nu)$. Варьируя (43.6), получим

$$\delta n = \frac{Gen}{c^4 r} \frac{\delta r/r - \delta e/e}{1 - 2Ge/c^4 r} - 2n \frac{\delta r}{r} - \frac{4\pi r^2 n^2 d(\delta r)/d\nu}{(1 - 2Ge/c^4 r)^{1/2}}. \quad (43.7)$$

Варьируя (43.5) с учетом (43.7) и используя термодинамическое соотношение [145] $\partial \tilde{E} / \partial n = P/n^2$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta e)}{d\nu} = & - \frac{P/n + \tilde{E}}{(1 - 2Ge/c^4 r)^{1/2}} \frac{Ge}{c^4 r} \left(\frac{\delta e}{e} - \frac{\delta r}{r} \right) - \\ & - \frac{2P}{nr} \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2} \delta r - 4\pi r^2 P \frac{d(\delta r)}{d\nu}. \end{aligned} \quad (43.8)$$

Решая (43.8) как линейное неоднородное уравнение относительно δe

(см. [195]), получим

$$\begin{aligned} \delta e(\nu) = & \exp \left\{ - \int_0^\nu \left(\frac{P}{n} + \tilde{E} \right) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{-1/2} \frac{G d\nu}{c^4 r} \right\} \times \\ & \times \left\{ \int_0^\nu \exp \left[\int_0^\nu \left(\frac{P}{n} + \tilde{E} \right) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{-1/2} \frac{G}{c^4 r} d\nu \right] \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{P}{n} + \tilde{E} \right) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{-1/2} \frac{G}{c^4 r^2} (e + 4\pi r^3 P) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{n} \frac{dP}{dr} \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{1/2} \right] \delta r d\nu \right\} - 4\pi r^2 P \delta r. \end{aligned} \quad (43.9)$$

Приравнявая к нулю вариацию полной энергии $\delta \epsilon = \delta e(N) = 0$ с учетом $P(N) = 0$, получаем из (43.9) уравнение равновесия Оппенгеймера–Волкова (40.3), где $\rho c^2 = \tilde{E}n$, $mc^2 = e$. Поиск экстремума ϵ из (43.2) при фиксированном N из (43.4) представляет собой изопериметрическую задачу вариационного исчисления [196]. Для этой задачи справедлив принцип взаимности, который в применении к данному случаю гласит, что функция $r(\nu)$, задающая экстремум ϵ при фиксированном N одновременно задает экстремум N при фиксированном ϵ .

Устойчивость звезды определяется положительностью второй вариации энергии

$$\delta^2 \epsilon > 0, \quad (43.10)$$

что соответствует минимуму энергии звезды в устойчивом равновесии. Если в процессе эволюции $\delta^2 \epsilon$ обращается в нуль, меняя знак с плюса на минус, то это состояние является критическим и в нем происходит потеря устойчивости. При выводе условия устойчивости находится $\delta^2 n$ из (43.7) и $d(\delta^2 e)/d\nu$ из (43.8). Последнее сводится к дифференциальному уравнению относительно $\delta^2 e$, решая которое аналогично (43.8), получаем следующее выражение для второй вариации энергии:

$$\begin{aligned} \delta^2 \epsilon = & \exp \left\{ - \int_0^R \frac{\tilde{E}n + P}{1 - 2Ge/c^4 r} \frac{4\pi Gr}{c^4} dr \right\} \times \\ & \times 4\pi \int_0^R \exp \left\{ \int_0^r \frac{\tilde{E}n + P}{1 - 2Ge/c^4 r} \frac{4\pi Gr}{c^4} dr \right\} \times \\ & \times \left\{ \gamma P \left[2\delta r + r \frac{d(\delta r)}{dr} - \frac{Ge}{c^4 r} \frac{1 + 4\pi r^3 P/e}{1 - 2Ge/c^4 r} \delta r \right]^2 - \right. \\ & - \frac{1}{4} \frac{(P + \tilde{E}n)(1 + 4\pi r^3 P/e)^2}{(1 - 2Ge/c^4 r)^2} \left(\frac{2Ge}{c^4 r} \right)^2 (\delta r)^2 - \\ & \left. - 2 \frac{P + \tilde{E}n}{1 - 2Ge/c^4 r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4\pi r^3 P}{e} \right) \frac{2Ge}{c^4 r} (\delta r)^2 \right\} dr, \end{aligned} \quad (43.11)$$

где $\gamma \equiv \gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$ из (1.11). Если $t_{n\beta} \gg t_h$, то показатель адиабаты вычисляется при замороженном химическом составе, а если $t_n \ll t_h$, то при равновесном ядерном. Наиболее сложен случай $t_n \sim t_h$ или $t_\beta \sim t_h$. Если соотношение $t_n \sim t_h$ может быть справедливо только в узком интервале параметров из-за экспоненциальной зависимости скоростей реакций (см. гл. 3), то соотношение $t_\beta \sim t_h$ может сохраняться достаточно долго в начале коллапса малой массы (см. § 36). В этих случаях необходимо кинематическое описание ядерных или слабых реакций, появляется диссипация типа второй вязкости, рост энтропии и нарушаются условия применимости вариационного принципа. Феноменологический вывод уравнения движения имеет более широкую область применимости, чем вариационный. Например, уравнения Эйлера в гидродинамике можно вывести обоими способами, а уравнения Навье—Стокса с вязкостью — только феноменологически в гидродинамике или из более общей кинетической теории [222]. В статике при $v = 0$ уравнения Эйлера и Навье—Стокса совпадают. Это связано с тем, что при $v = 0$ вязкая диссипация отсутствует. При использовании вариационного принципа требуется отсутствие диссипации не только при $v = 0$, но и при малых $v \neq 0$, поэтому при $t_\beta \sim t_h$, когда действует вторая вязкость ($\sim \operatorname{div} v$), вариационный принцип неприменим для вывода условия устойчивости. Здесь нужно пользоваться методом возмущений, который позволяет учесть влияние кинетики процессов на устойчивость. Для консервативных систем оба метода дают одинаковый результат. В частности, условие (43.11) было выведено как методом малых возмущений в [323], так и вариационным методом в [201].

б) Ньютоновский и постньютоновский пределы. Перепишем вариацию энергии $\delta\epsilon$ в виде, не содержащем производных от термодинамических функций. Имеем с учетом (43.9)

$$\begin{aligned} \delta\epsilon = & \exp \left\{ - \int_0^N \left(\frac{P}{n} + \tilde{E} \right) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{-1/2} \frac{Gdv}{c^4 r} \right\} \times \\ & \times \left\{ \int_0^N \exp \left[\int_0^v \left(\frac{P}{n} + \tilde{E} \right) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{-1/2} \frac{G}{c^4 r} dv \right] \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{P}{n} + \tilde{E} \right) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{-1/2} \frac{Ge}{c^4 r^2} \delta r - \frac{2P}{nr} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{1/2} \delta r - 4\pi r^2 P \frac{d(\delta r)}{dv} \right] dv \right\}. \end{aligned} \quad (43.12)$$

В ньютоновском пределе, учтя

$$\begin{aligned} \rho_0 &= nm_u, \quad m_0 = \nu m_u, \quad M_0 = Nm_u, \\ \tilde{E}n &= (E + c^2)\rho_0, \\ dv/n &= dm_0/\rho_0, \end{aligned} \quad (43.13)$$

из (43.2), (43.5), (43.12), (43.11) имеем

$$\epsilon = M_0 c^2 + \int_0^{M_0} \left(E - \frac{Gm_0}{r} \right) dm_0, \quad (43.14)$$

$$\delta \epsilon = \int_0^{M_0} \left(\frac{Gm_0}{r^2} \delta r - 2 \frac{P}{\rho} \frac{\delta r}{r} - \frac{P}{\rho} \frac{d\delta r}{dr} \right) dm_0, \quad (43.15)$$

$$\delta^2 \epsilon = \int_0^{M_0} \left\{ \gamma \frac{P}{\rho} \left[2 \frac{\delta r}{r} + \frac{d(\delta r)}{dr} \right]^2 - 4 \frac{Gm}{r} \left(\frac{\delta r}{r} \right)^2 \right\} dm_0. \quad (43.16)$$

При этом было положено $e = m_0 c^2$, а шварцшильдовский радиус r отождествлен с ньютоновским r_H . Ньютоновское уравнение равновесия (22.1) следует из условия $\delta \epsilon = 0$ в (43.15) после интегрирования по частям в последнем члене. Постньютоновское приближение получается аналогично, если оставить члены $\sim \left(\frac{Gm}{rc^2} \right)^2, P/\rho c^2$. Имеем из (43.2), (43.5) с учетом (43.13)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \int_0^N \rho_0 (E + c^2) \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r} \right)^{1/2} \frac{dv}{n} = \\ &= \int_0^{M_0} \rho_0 (E + c^2) \left[1 - \frac{Ge}{c^4 r} - \frac{1}{2} \left(\frac{Ge}{c^4 r} \right)^2 \right] \frac{dm_0}{\rho_0} = \\ &= M_0 c^2 + \int_0^{M_0} \left(E - \frac{Ge}{c^4 r} \right) dm_0 - \int_0^{M_0} \frac{GEm_0}{c^2 r} dm_0 - \frac{1}{2} \int_0^{M_0} \left(\frac{Gm_0}{rc} \right)^2 dm_0. \end{aligned} \quad (43.17)$$

В двух последних членах положено $e = m_0 c^2$. Во втором члене следует учесть релятивистские поправки к e и r . При переходе к ньютоновскому описанию не меняется физический объем v , определенный в (43.3), и ньютоновский радиус $r_H = \left(\frac{3v}{4\pi} \right)^{1/3}$. Из (43.5) имеем

$$\begin{aligned} e &= \int_0^{m_0} (E + c^2) \left(1 - \frac{Gm_0}{c^2 r} \right) dm_0 = m_0 c^2 + \int_0^{m_0} E dm_0 - \\ &- \int_0^{m_0} \frac{Gm_0 dm_0}{r}. \end{aligned} \quad (43.18)$$

Из (43.3) следует

$$\frac{4\pi}{3} r^3 = v - \int_0^{m_0} \frac{Gm_0}{c^2 r} dv, \quad r = r_H \left(1 - \frac{1}{r^3} \int_0^r \frac{Gm_0}{c^2} r dr \right). \quad (43.19)$$

В последних малых членах (43.17) можно отождествить r и r_H . Подставляя

(43.18), (43.19) в (43.17), имеем [109]

$$\begin{aligned} \epsilon = & M_0 c^2 + \int_0^{M_0} \left(E - \frac{G m_0}{r} \right) dm_0 - \frac{G}{c^2} \int_0^{M_0} \frac{E m_0}{r} dm_0 - \\ & - \frac{G^2}{2c^2} \int_0^{M_0} \frac{m_0^2}{r^2} dm_0 - \frac{G}{c^2} \int_0^{M_0} \frac{dm_0}{r} \left(\int_0^{m_0} E dm_0 \right) + \\ & + \frac{G^2}{c^2} \int_0^{M_0} \left(\int_0^{m_0} \frac{m_0 dm_0}{r} \right) \frac{dm_0}{r} - \frac{G^2}{c^2} \int_0^{M_0} \frac{m_0}{r^4} \left(\int_0^r m_0 r dr \right) dm_0. \end{aligned} \quad (43.20)$$

Рассмотрим постньютоновское приближение для случая распределения массы по адиабате $n = 3$, которое остается равновесным при однородном расширении или сжатии. В вариациях $\delta\epsilon$ и $\delta^2\epsilon$ это соответствует линейной собственной функции $\delta r = \alpha r$. При вычислении последних пяти интегралов в (43.20) — малых поправок на ОТО, учтем равенство $E\rho_0 = 3P$ и ньютоновское уравнение равновесия (22.1)*). Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{M_0} \frac{E m_0}{r} dm_0 &= 3 \int_0^{M_0} \frac{P}{\rho_0 r} m_0 dm_0 = -3 \int_0^R \left(\int_0^{m_0} \frac{m_0 dm_0}{\rho_0 r} \right) \frac{dP}{dr} dr = \\ &= 3 G \int_0^{M_0} \frac{m_0 dm_0}{r^4} \left(\int_0^r m_0 r dr \right), \\ \int_0^{m_0} E dm_0 &= 3 \int_0^{m_0} \frac{P}{\rho_0} dm_0 = 4\pi P r^3 - 4\pi \int_0^{m_0} r^3 \frac{dP}{dr} dr = 4\pi P r^3 + G \int_0^{m_0} \frac{m_0 dm_0}{r}, \\ \int_0^{M_0} P r^3 \frac{dm_0}{r} &= \int_0^{M_0} P d \left(\int_0^{m_0} r^2 dm_0 \right) = \int_0^{M_0} \frac{\rho G m_0}{r^2} \left(\int_0^{m_0} r^2 dm_0 \right) dr = \\ &= \int_0^{M_0} \frac{\rho G m_0}{r^2} (m_0 r^2 - 2 \int_0^r m_0 r dr) dr = \\ &= \frac{G}{4\pi} \left[\int_0^{M_0} \frac{m_0^2}{r^2} dm_0 - 2 \int_0^{M_0} \frac{m_0 dm_0}{r^4} \left(\int_0^r m_0 r dr \right) \right]. \end{aligned} \quad (43.21)$$

Подставляя (43.21) в (43.20), получаем

$$\begin{aligned} \epsilon = & M_0 c^2 + \int_0^{M_0} \left(E - \frac{G m_0}{r} \right) dm_0 - \frac{G^2}{c^2} \left[2 \int_0^{M_0} \frac{m_0 dm_0}{r^4} \left(\int_0^r m_0 r dr \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \int_0^{M_0} \frac{m_0^2}{r^2} dm_0 \right]. \end{aligned} \quad (43.22)$$

*) В (22.1) обозначено $m = m_0$, так как в ньютоновской теории рассматривается обычно только масса покоя.

Нижe будем опускать индекс "0" у m_0 и M_0 . Последний член в (43.22) есть ϵ_{OTO} из (34.7), (34.16). Используя (34.2), (34.8), получим для $n=3$

$$\epsilon_{OTO} = -\frac{G^2}{c^2} M^{7/3} \rho_c^{2/3} \left[\frac{(4\pi)^{2/3}}{M_3^{7/3}} \left(\frac{3}{4} \int_0^{\xi_1} \theta^5 \xi^2 d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{8} \int_0^{\xi_1} \theta^7 \xi^4 d\xi \right) \right] = -0,9183 \frac{G^2}{c^2} M^{7/3} \rho_c^{2/3}. \quad (43.23)$$

Здесь использованы значения интегралов J_{52} и J_{74} из таблицы к задаче § 34. Использование (43.23) в энергетическом методе для исследования устойчивости относительно коллапса сделано в § 34. Следующая поствьютоновская поправка к ϵ найдена в [76] для невращающихся звезд и в [292] для звезд с вращением.

в) Метод малых возмущений в ньютоновской теории. Покажем эквивалентность вариационного и пертурбативного подходов на примере ньютоновской теории. Используем уравнения гидродинамики (35.1)–(35.2) для адиабатического случая при малых отклонениях от статического равновесного состояния

$$r = r_0 + r', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad v_r \text{ мало}, \quad P = P_0 + P' = P_0 + \gamma_1 \frac{P_0}{\rho_0} \rho'. \quad (43.24)$$

Из уравнений (35.1), (35.2) с учетом (43.24) имеем

$$\frac{\partial r'}{\partial t} = v_r, \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = -4\pi r_0^2 \frac{\partial P'}{\partial m} - 8\pi r_0 r' \frac{\partial P_0}{\partial m} + \frac{2Gm}{r_0^3} r', \\ \rho' = -4\pi \rho_0^2 r_0^2 \frac{\partial r'}{\partial m} - 2\rho_0 \frac{r'}{r}, \quad (43.25)$$

$$dm = 4\pi \rho_0 r_0^2 dr_0.$$

Приводя систему (43.25) к уравнению относительно r' , получаем

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial t^2} = 4\pi r_0^2 \frac{\partial}{\partial m} \left[\gamma_1 \frac{P_0}{\rho_0} \left(4\pi \rho_0^2 r_0^2 \frac{\partial r'}{\partial m} + 2\rho_0 \frac{r'}{r_0} \right) \right] - \\ - 8\pi r_0^2 \frac{\partial P_0}{\partial m} r' + \frac{2Gm}{r_0^3} r'. \quad (43.26)$$

Решение линейных уравнений ищется в виде

$$(r', \rho', P') = (\bar{r}, \bar{\rho}, \bar{P}) e^{-i\omega t} \quad (43.27)$$

ввиду того, что коэффициенты их не зависят от времени. Подставляя (42.27) в (42.26) и учитывая уравнение равновесия (22.1), получаем

$$\omega^2 \bar{r} = -4\pi r_0^2 \frac{d}{dm} \left[\gamma_1 \frac{P_0}{\rho_0} \left(\frac{d\bar{r}}{dr_0} + 2 \frac{\bar{r}}{r_0} \right) \rho_0 \right] - \frac{4Gm}{r_0^3} \bar{r} \equiv \Omega(\bar{r}). \quad (43.28)$$

Из условия регулярности функции $\bar{r}/r_0$ при $r_0 = 0$ следует граничное условие [130]

$$\frac{d}{dr_0} \left(\frac{\bar{r}}{r_0} \right) = 0 \quad \text{при } r_0 = 0, \quad (43.29)$$

а из регулярности функции $\bar{P}/P_0$ на границе $r = R$ для уравнений состояния с $P_0/\rho_0 \rightarrow 0$ при $\rho_0 \rightarrow 0$ следует условие [130]

$$\frac{d}{dr_0} \left(\frac{\bar{P}}{P_0} \right) = 0 \quad \text{при } r_0 = R, \quad (43.30)$$

которое при учете (43.24), (43.25) примет вид

$$\left(4 - 2\gamma_1 + \frac{\omega^2 r_0^3}{GM} \right) \frac{\bar{r}}{r_0} - \gamma_1 \frac{d\bar{r}}{dr_0} = 0 \quad \text{при } r_0 = R. \quad (43.31)$$

Краевая задача Штурма—Лиувилля [196] для уравнения (43.28) при граничных условиях (43.29), (43.31) имеет конечное, физически допустимое решение с точностью до произвольного множителя в виде собственных функций $\bar{r}_i(r_0)$ только для собственных частот $\omega = \omega_i$. Действительные собственные частоты при $\omega_i^2 > 0$ соответствуют устойчивости. Все собственные числа уравнения (43.28) действительны ввиду самосопряженности оператора $\mathfrak{L}(\bar{r})$ [130]. Рассмотрим нормированные действительные собственные функции

$$\int_0^M \bar{r}^2 dm = 1. \quad (43.32)$$

Умножая (43.28) на $\bar{r}$ и интегрируя по звезде, получим после интегрирования по частям

$$\omega^2 = \int_0^M \bar{r} \mathfrak{L}(\bar{r}) dm = \int_0^M \left[\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \left(2 \frac{\bar{r}}{r_0} + \frac{d\bar{r}}{dr_0} \right)^2 - 4 \frac{Gm}{r_0} \left(\frac{\bar{r}}{r_0} \right)^2 \right] dm. \quad (43.33)$$

Очевидно, что условия устойчивости $\omega^2 > 0$ в (43.33) и $\delta^2 \epsilon > 0$ в (43.16) эквивалентны, если считать, что $\bar{r}$ может быть не только собственной, но и произвольной пробной функцией δr .

Из самосопряженности оператора $\mathfrak{L}(\bar{r})$ следует [196, 130], что минимальное значение величины ω^2 из (43.33) ($\delta^2 \epsilon$ из (43.16)) достигается для собственной функции $\delta r = \bar{r}$. Это означает, что если какая-либо пробная функция $\delta r(r_0)$ приводит к отрицательному $\delta^2 \epsilon$ из (43.16), то соответствующее равновесное состояние заведомо неустойчиво. Напротив, положительность $\delta^2 \epsilon$ не дает гарантии устойчивости состояния. Сравнение с точным статическим критерием в § 44 показывает, что линейная пробная функция $\delta r = \alpha r$ в (43.11) практически точно определяет точку потери устойчивости холодной нейтронной звезды в ОТО (см. § 40).

§ 44. Статические критерии устойчивости

а) Невращающиеся звезды. В случае неврашающихся холодных ($T = 0, S = 0$) звезд критерий устойчивости может быть сформулирован следующим образом [105]. При исследовании колебаний стационарной звезды можно принять, что зависимость от времени t смещения ξ точки с лагранжевым радиусом $\vec{r}_0$

$$\vec{\xi}_n(\vec{r}_0, t) = \vec{r}(\vec{r}_0, t) - \vec{r}_0 \quad (44.1)$$

n -й нормальной моды радиальных колебаний имеет вид

$$\vec{\xi}_n \sim e^{-i\sigma_n t}, \quad (44.2)$$

причем при отсутствии диссипативных процессов все σ_n^2 — действительные числа, так что устойчивости n -й моды соответствует $\sigma_n^2 > 0$, а неустойчивости — $\sigma_n^2 < 0$. Построим серию моделей с данным уравнением состояния

$$P = P(\rho) \quad (44.3)$$

с различными значениями центральной плотности ρ_c , получив зависимость $M(\rho_c)$. Допустим, что при $\rho_c = \rho_{c,cr} \equiv \rho_{cc}$ эта зависимость имеет экстремум $M(\rho_{cc}) = M_0$. В этом случае для массы M , мало отличающейся от M_0 , существуют два решения. Одно из этих решений получается из другого малым смещением, которое не зависит от времени. Это значит, что квадрат собственной частоты σ_n^2 некоторой моды при $\rho_c = \rho_{cc}$ переходит через нуль:

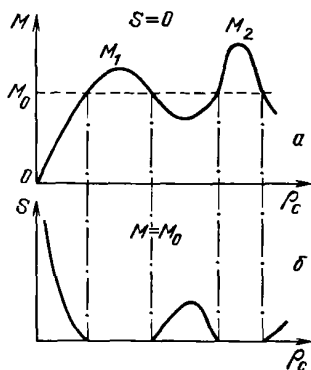
$$\sigma_n^2(\rho_{cc}) = 0. \quad (44.4)$$

Таким образом, экстремум кривой $M(\rho_c)$ всегда соответствует критической точке, где изменяется устойчивость некоторой моды звезды, причем основная мода теряет устойчивость всегда в максимуме кривой $M(\rho_c)$ [105]. Устойчивым звездам соответствуют только растущие участки кривых $M(\rho_c)$. Изложенный критерий остается справедливым для изэнтропических звезд с одинаковой удельной энтропией S . В этом случае точка потери устойчивости на основной моде лежит в максимуме кривой $M_S(\rho_c)$ [110]. Более подробную информацию об устойчивости и числе неустойчивых мод можно извлечь, рассматривая зависимость $M(R)$, где R — радиус звезды [201].

Аналогичными рассуждениями можно показать справедливость другого статического критерия для горячих изэнтропических звезд. Зафиксируем массу звезды и будем строить модели с различными значениями удельной энтропии. Тогда получим зависимость $S_M(\rho_c)$. Очевидно, что экстремум этой зависимости тоже отвечает критической точке, так как существование экстремума доказывает существование двух близких моделей с одинаковой энтропией S , т.е. $\sigma^2(\rho_{cc}) = 0$ в экстремуме. Потеря устойчивости на основной моде происходит здесь в минимуме кривой $S_M(\rho_c)$.

Заметим, что при построении серии моделей с переменным ρ_c может случиться так, что энтропия упадет до нуля и в определенном диапазоне значений ρ_c нет статических решений для данной массы. Это значит, что на графиках $S(\rho_c)$ будут провалы (рис. 121). Тем не менее этот случай не вносит трудностей, так как устойчивость при $S = 0$ известна из другого статического критерия. Наличие "провала", так же как и экстремума, означает смену знака квадрата собственной частоты одной из мод колебаний.

Рис 121. *а* — Схематическая зависимость массы M от центральной плотности ρ_c при нулевой энтропии $S = 0$. *б* — Зависимость $S(\rho_c)$ для массы M_0 , меньше экстремальных M_1 и M_2 , из [284]



Таким образом, можно отметить некоторую дополнителность в критериях. С одной стороны, точке изменения устойчивости соответствует экстремум кривой $M_S(\rho_c)$, а с другой — экстремум $S_M(\rho_c)$. Это соответствует тому, что при адиабатических пульсациях сохраняются M и S . Данное обстоятельство представляется тривиальным для сферически-симметричных звезд, но ситуация меняется, если перейти к более интересному случаю вращающихся звезд.

Очевидно, что все величины, сохраняющиеся при адиабатических пульсациях, должны быть постоянны вблизи критической модели. То есть если некоторая величина A , сохраняющаяся при пульсациях, изменяется вдоль серии моделей, то зависимость $A(\rho_c)$ имеет экстремум в критической точке. Полная энергия равновесной звезды ϵ всегда возрастает при увеличении ее массы или энтропии [104]. Вследствие этого экстремумы кривых $\epsilon_S(\rho_c)$ и $\epsilon_M(\rho_c)$ совпадают с экстремумами кривых $M_S(\rho_c)$ и $S_M(\rho_c)$ и могут использоваться в применении к статическому критерию устойчивости, а зависимости $\epsilon_S(M)$ и $\epsilon_M(S)$ неаналитичны и имеют точки возврата.

Отметим, что статический критерий применим не только для изэнтропических звезд [262]. Например, построим серию моделей переменной массы с распределением удельной энтропии $S(q)$, фиксированным по безразмерной лагранжевой координате $q = M_r/M$, где M_r — масса внутри r . Нетрудно убедиться, что и в этом случае экстремум $M_S(q)(\rho_c)$ соответствует критической точке.

б) Критерии для вращающихся звезд. Из рассмотрения п.а ясно, что для формулировки статических критериев устойчивости необходимо выделить величины $A, B, C, \dots$, сохраняющиеся при пульсациях, выбрать одну из этих величин (например, A) в качестве изменяющегося параметра и, зафиксировав интегральные или удельные значения остальных параметров, независимых от A , строить серию моделей. Тогда критической точке будет соответствовать экстремум кривой $A_{B,C} \dots (\rho)$. В случае вращения при адиабатических пульсациях и нулевой вязкости сохраняется удельная энтропия S , удельный момент j каждой частицы вещества и масса звезды M . Проще всего статический критерий можно было бы вывести для случая изэнтропической изомоментной звезды, однако условие $j = \text{const}$ в реальной звезде вряд ли осуществимо. Критерий можно вывести для реаль-

ных звезд с вращением, если строить серию неизомоментных моделей, аналогичных неизэнтропическим моделям, как описано выше.

Рассмотрим изэнтропические модели. Поскольку имеется три сохраняющихся величины, возможны три статических критерия. Критическими точками будут экстремумы кривых

$$1^\circ S_{M,j}(\rho); \quad 2^\circ J_{M,S}(\rho); \quad 3^\circ M_{S,j}(\rho). \quad (44.5)$$

Согласно теореме Пуанкаре (см. § 23, п.б), удельный момент j и угловая скорость Ω в равновесии постоянны на цилиндрах, поэтому фиксированы

$$j = j(m), \quad m = \frac{M_b}{M} (M_b - \text{масса внутри цилиндра радиуса } b) \quad (44.6)$$

для критериев 1° и 3° и

$$j' = \frac{M}{J} j(m) \quad (44.7)$$

для критерия 2° .

Легко видеть, что во всех трех случаях экстремум кривой совпадает с критической точкой и имеется полная аналогия с построением серии неизэнтропических моделей.

Часто необходимо исследовать устойчивость твердоотно-вращающихся звезд. Вдоль серии моделей таких звезд удельный момент каждой лагранжевой массы изменяется, поэтому статический критерий надо применять следующим образом. Пусть имеется серия моделей твердоотно-вращающихся звезд. Каждая модель имеет свое распределение момента $j(m)$. Фиксировав $j(m)$, от любой модели можно построить новую "присоединенную" серию моделей в соответствии с (44.5). Критической будет та твердоотно-вращающаяся модель, которая имеет экстремальные параметры в присоединенной серии.

Изэнтропическими можно считать полностью конвективные звезды, например сверхмассивные [109], или холодные с $S = 0$. Вырожденные конфигурации, белые карлики и нейтронные звезды, можно рассматривать как изотермические из-за большой теплопроводности. О распределении угловой скорости вращения звезды при эволюции см. § 29. При $dj/db > 0$ звезда устойчива относительно развития турбулентности, но только в линейном приближении. Например, при вращении коаксиальных цилиндров для больших чисел Рейнольдса $Re = \rho v R / \mu > 10^5$ турбулентность может развиваться при более быстром вращении внешнего цилиндра, когда $dj/db > 0$ [142]. В звездах числа Рейнольдса всегда очень велики, поэтому возможность существования дифференциально вращающихся с большой скоростью звезд остается проблематичной. При малой вязкости, необходимой для нарушения теоремы Томсона о сохранении циркуляции, всегда имеются возмущения достаточно большие, чтобы вызвать турбулентность.

в) Снятие вырождения нейтральных мод колебаний во вращающейся изэнтропической звезде. Детальный анализ статических критериев устойчивости для вращающихся звезд выявляет глубокую связь между собственными функциями, соответствующими нейтральным конвективным движе-

ниям невращающейся звезды и нейтральной собственной функцией при наличии вращения, а также позволяет установить простую связь между конвективной устойчивостью звезды и теоремой Пуанкаре.

В невращающейся звезде собственная функция нейтральной моды возмущений в критическом состоянии зависит от сферического радиуса $\xi = \xi(r)$. Она представляет собой разность радиусов двух близких равновесных состояний той же массы по обе стороны максимума

$$\xi = \xi(q) = r_1(q) - r_2(q), \quad r = r(q), \quad q = \frac{M_r}{M} \quad (44.8)$$

согласно статическому критерию п.а. С другой стороны, в случае изэнтропических звезд для любого, даже самого слабого вращения

$$\xi = \xi(b), \quad b = b(m). \quad (44.9)$$

Действительно, ввиду сохранения удельного момента $j(b) = \Omega b^2$, имеем

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = -2 \frac{\Delta b}{b}. \quad (44.10)$$

Так как Ω , $\Delta \Omega$ и b есть функции b , то и $\Delta b = \xi_b = \xi_b(b)$. Скачок в функциональной зависимости собственной функции критического состояния при наложении слабого вращения станет понятным, если вспомнить, что в невращающейся изэнтропической звезде собственному значению $\omega = 0$ соответствует не только радиальная нейтральная мода, но и бесконечный набор собственных функций, связанных с конвективными движениями (см. § 10). Если состоянию с данными собственным числом ω соответствует несколько собственных функций, то такое состояние называется вырожденным. В изэнтропической звезде без вращения таковой является мода колебаний с $\omega = 0$. Вращение приводит к тому, что все нейтральные конвективные моды становятся либо устойчивыми, либо неустойчивыми (при $dj/db < 0$), поэтому вырождение нейтральной моды снимается.

Если возмущение (малое вращение) приводит к снятию вырождения, то невырожденная собственная функция возмущенного состояния с той же собственной частотой будет близка к одной "правильной" суперпозиции вырожденных невозмущенных собственных функций. Собственная функция нейтральной моды слабо вращающейся звезды представляет собой такую суперпозицию радиальной и конвективных мод, которая приводит к ее зависимости только от цилиндрического радиуса b . Угловые части собственных функций конвективных мод представляют собой полиномы Лежандра $P_l(\cos \theta)$ для ξ_r и производные от них $dP_l/d\theta = P_l^1(\cos \theta)$ для ξ_θ с четными l [130]. Если для невращающейся звезды с помощью статического критерия удастся определить собственную функцию нейтральной радиальной моды, то, применяя его к слабо вращающейся звезде, можно восстановить радиальные части всех конвективных мод [284]. Для этого находим собственную функцию

$$\vec{\xi} = (\xi_b(b), \quad \xi_z(b, z)), \quad b = r \sin \theta \quad (44.11)$$

в виде разности двух близких равновесных моделей той же массы. Вычис-

ляем смещения в сферической системе координат:

$$\xi_r(b, z) = \sqrt{\xi_b^2 + \xi_z^2}, \quad \xi_\theta(b, z) = \arctg \frac{\xi_z}{\xi_b}, \quad (44.12)$$

и делаем соответствующие разложения:

$$\begin{aligned} \xi_r(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{rl}(r) P_l(\cos \theta), \\ \xi_{rl}(r) &= (l+1/2) \int_{-1}^1 \xi_r(r, \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta), \\ \xi_\theta(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{\theta l}(r) P_l^1(\cos \theta), \\ \xi_{\theta l}(r) &= \frac{l+1/2}{l(l+1)} \int_{-1}^1 \xi_\theta(r, \theta) P_l^1(\cos \theta) d(\cos \theta). \end{aligned} \quad (44.13)$$

Функции ξ_{rl} и $\xi_{\theta l}$ являются радиальными частями конвективных мод колебаний в нейтральном случае. Данный метод расчета собственных функций гораздо менее трудоемок, чем обычный метод малых возмущений [130], хотя применим только для нейтральной вырожденной моды.

В звезде, устойчивой относительно конвекции, нейтральная мода невырождена и в медленно вращающейся звезде ее радиальная зависимость сохраняется. Это связано с нарушением теоремы Пуанкаре и условий (44.6), (44.9) для небароподобных звезд с переменной по массе энтропией. Для изэнтропы с $\gamma_1 = 4/3$ нейтральная мода гомологична и максимум кривой $M_{S,J}(\rho_c)$ твердотельно-вращающихся звезд при медленном вращении совпадает с точкой потери устойчивости.

г) Численные примеры [284]. Рассмотрим твердотельно-вращающиеся холодные белые карлики, определяемые уравнением состояния, которое задается с учетом нейтронизации в виде [188]

$$\begin{aligned} \rho &= Ax^3(2 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \\ P &= B[x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3\ln(x + \sqrt{1 + x^2})] \\ A &= 9,82 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^3, \quad B = 6,01 \cdot 10^{22} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3, \\ a_1 &= 1,255 \cdot 10^{-2}, \quad a_2 = 1,755 \cdot 10^{-5}, \quad a_3 = 1,376 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (44.14)$$

Устойчивость определяется по критерию $M_{J,S}(\rho_c)$. Для построения равновесных вращающихся моделей используется метод самосогласованного поля (см. § 23, п.в). Сначала строится серия твердотельно-вращающихся моделей с фиксированным моментом вращения J_0 и выбирается модель вблизи экстремума данной зависимости $M_1(\rho_c)$. Эта модель задает некоторое распределение момента $j(m)$, для которого строится присоединенная серия моделей $M_2(\rho_c)$ с тем же полным моментом J_0 . Результаты расчетов даны в табл. 54 [284], из которой видно, что с точностью расчета критическая модель (экстремум кривой $M_2(\rho_c)$) совпадает с экстремумом $M_1(\rho_c)$ для твердотельно-вращающихся моделей. Это объясняется

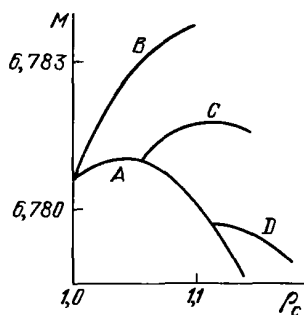
Зависимости от центральной плотности ρ_c массы M_1 твердоотно-вращающихся белых карликов при $J = 1,88 \cdot 10^{49} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ и массы M_2 , полярного R_p и экваториального R_e радиусов дифференциально-вращающихся белых карликов с распределением момента, соответствующим твердоотельной модели при $x_c = 10,5$. Уравнение состояния определено в (44.14) (из [284])

x_i	$\rho_c, \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\frac{M_1}{M_\odot}$	$\frac{M_2}{M_\odot}$	$R_p, \text{см}$	$R_e, \text{см}$
10,0	2,090 (9)	1,28621	1,28618	2,0126 (8)	2,1622 (8)
10,5	2,427 (9)	1,28654	1,28654	1,9339 (8)	2,0864 (8)
10,6	2,499 (9)	1,28654	1,28655	1,9189 (8)	2,0720 (8)
10,7	2,572 (9)	1,28653	1,28654	1,9042 (8)	2,0578 (8)
10,8	2,646 (9)	1,28650	1,28651	1,8896 (8)	2,0439 (8)
10,9	2,722 (9)	1,28644	1,28646	1,8753 (8)	2,0302 (8)
11,0	2,800 (9)	1,28637	1,28640	1,8613 (8)	2,0034 (8)

тем, что уравнение состояния белого карлика в критическом состоянии имеет $\gamma_1 = 4/3$ и нейтральная мода колебаний почти гомологична. Кроме того, при твердоотельном вращении политропы $n = 3$ отношение энергии вращения T к гравитационной W не может быть большим, так как быстро достигается равенство центробежной и гравитационной сил на экваторе. В рассматриваемом случае для критической модели параметр вращения $\beta = \Omega^2/2\pi G \rho_c = 6,82 \cdot 10^{-4}$ (см. (23.33)), что составляет $\approx 70\%$ от предельного значения $\beta_{\text{lim}} = 9,83 \cdot 10^{-4}$ для политропы $n = 3$ из [437]. При этом $T/|W| = 5,78 \cdot 10^{-3}$, а $(T/|W|)_{\text{lim}} = 9,00 \cdot 10^{-3}$. Столь малое значение кинетической энергии вращения говорит о том, что гомологическая мода возмущена мало, что и обеспечивает совпадение максимумов у серии твердоотно- и дифференциально вращающихся моделей. Максимальная масса в критическом состоянии для предельного вращения на 3,5% больше, чем для невращающегося случая. Для моделей из табл. 54 рост предельной массы составил $\approx 1,5\%$.

Если в политропном уравнении состояния γ_1 сильно отличается от $4/3$, то различие между критическим состоянием и максимумом массы твердо-

Рис. 122. Зависимость массы M от центральной плотности ρ_c твердоотно- (кривая A) и дифференциально (кривые B, C и D) вращающихся моделей с уравнением состояния (44.15). Распределение вращательных моментов на кривых B, C и D соответствует твердоотно- вращающимся моделям на кривой A в точках пересечения ее с кривыми B, C и D . Кривая C выходит из максимума кривой A , максимум кривой D совпадает с точкой пересечения, которая и является критической точкой для твердоотно- вращающихся моделей. Масса M дана в единицах $(4\pi\rho_1)^{-1/2}(H_1/G)^{3/2}$, ρ_c — в единицах ρ_1 .



тельной кривой может быть существенным. В [284] рассматривалось уравнение состояния в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \rho(H) &= \frac{1}{2} \rho_1 \left[\left(\frac{H}{H_1} \right)^{0,3} + \left(\frac{H}{H_1} \right)^{1,0} \right], \\ P(H) &= \frac{1}{2} \rho_1 H_1 \left[\frac{(H/H_1)^{1,3}}{1,3} + \frac{(H/H_1)^{1,1}}{1,1} \right]. \end{aligned} \quad (44.15)$$

При $\rho = \rho_1$ величина $\gamma_1 = 4^{1/3}$ и резко падает при $\rho > \rho_1$. Результаты расчета твердотельно-вращающейся и трех присоединенных серий моделей дано на рис. 122. Потеря устойчивости происходит в точке пересечения присоединенной кривой D с твердотельной, совпадающей с максимумом кривой D . Из рис. 122 видно, что точка потери устойчивости почти на 5 % по ρ_c отстоит от максимума твердотельной кривой. В [284] сделано обобщение статических критериев на случай ОТО и наличие тороидального магнитного поля.

§ 45. Устойчивость звезды при наличии фазового перехода

В веществе звезд при сильном вырождении могут происходить фазовые переходы первого рода, т.е. в определенном интервале плотностей $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ давление остается постоянным $P = P_*$, рис. 123. Поскольку в равновесии давление монотонно убывает с радиусом при r_* , так что $P(r_*) = P_*$, происходит скачок плотности от ρ_2 до ρ_1 . Впервые с такой ситуацией столкнулись при исследовании планет гигантов [2, 547]. Фазовые переходы из-за нейтронизации могут происходить в центре белых карликов с массой, близкой к чандрасекаровскому пределу (см. § 39) и в оболочках нейтронных звезд [30]. Возможны также фазовые переходы в белых карликах небольшой массы [126], связанные с ионизацией давлением.

Фазовый переход уменьшает запас устойчивости звезды. При $\rho_2/\rho_1 > 3/2$ звезда теряет устойчивость сразу после достижения в центре давления $P = P_*$ для любого уравнения состояния [191, 470]. В [192, 64] на основе

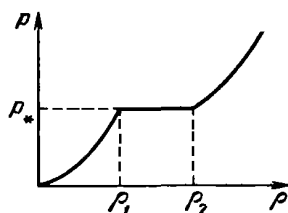


Рис. 123. Зависимость давления от плотности при наличии фазового перехода первого рода

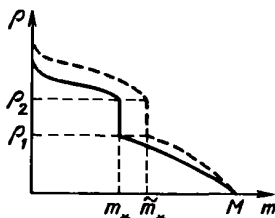
статического критерия изучалась устойчивость изэнтропических политропов при наличии фазовых переходов на периферии*).

В [42] для исследования устойчивости развит вариационный метод, излагаемый ниже. Обоснование справедливости статического критерия из § 44 для звезд с фазовым переходом дано в [236].

*) При $S \neq 0$ фазовые переходы считаются проходящими при $S = \text{const.}$ Справедливость этого допущения неочевидна, и оно является лишь приближенным способом описания фазового перехода.

а) Вычисление вариаций $\delta\epsilon$ и $\delta^2\epsilon$. Будем исходить из ньютоновской энергии звезды ((34.8) без последнего члена). Пусть в невозмущенном равновесном состоянии плотность $\rho(m)$ терпит скачок от ρ_2 до ρ_1 при $m = m_*$. Предположим, что при возмущении скачок сохраняет свою величину и сдвигается в точку $\tilde{m}_* > m_*$ (рис. 124). Случай $\tilde{m}_* < m_*$ рассматривается аналогично. Для вычисления приращения ϵ разобьем интеграл в (34.8) на три части: ϵ_2 ($0 \leq m \leq m_*$), ϵ_1 ($\tilde{m}_* \leq m \leq M$) и ϵ_* ($m_* \leq m \leq$

Рис. 124. Профиль плотности: сплошная кривая — в равновесной звезде, штриховая — в возмущенной (из [42])



$\leq \tilde{m}_*$). Вариации $\delta\epsilon_1$ и $\delta\epsilon_2$ рассчитываются аналогично § 44. Переходя к переменной объема v вместо радиуса r , имеем

$$\epsilon_2 = \int_0^{m_*} E dm - \beta \int_0^{m_*} \frac{m dm}{v^{1/3}}, \quad \beta = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G, \quad (45.1)$$

$$v = \frac{4\pi}{3} r^3, \quad dv/dm = 1/\rho;$$

$$\delta\epsilon_2 = - \int_0^{m_*} P \frac{d(\delta v)}{dm} dm + \frac{1}{3} \beta \int_0^{m_*} \frac{m \delta v}{v^{4/3}} dm = \quad (45.2)$$

$$= -P\delta v|_{m_*} + \int_0^{m_*} \left(\frac{dP}{dm} + \frac{\beta}{3} \frac{m}{v^{4/3}} \right) \delta v dm.$$

Здесь учтено

$$P = -\partial E / \partial (1/\rho), \quad \delta(1/\rho) = d(\delta v)/dm. \quad (45.3)$$

Скобка в интеграле (45.2) равна нулю в силу уравнения равновесия, поэтому

$$\delta\epsilon_2 = -P(m_*)\delta v(m_*). \quad (45.4)$$

Аналогично

$$\delta\epsilon_1 = P(\tilde{m}_*)\delta v(\tilde{m}_*). \quad (45.5)$$

Вычисляя вторые вариации энергии, получаем (ср. (43.16))

$$\delta^2\epsilon_2 = - \frac{4}{9} \beta \int_0^{m_*} \frac{m(\delta v)^2 dm}{v^{7/3}} + \int_0^{m_*} \gamma P \rho \left[\frac{d(\delta v)}{dm} \right]^2 dm, \quad (45.6)$$

$$\delta^2\epsilon_1 = - \frac{4}{9} \beta \int_{\tilde{m}_*}^M \frac{m(\delta v)^2 dm}{v^{7/3}} + \int_{\tilde{m}_*}^M \gamma P \rho \left[\frac{d(\delta v)}{dm} \right]^2 dm, \quad (45.7)$$

$$\gamma \equiv \gamma_1 \text{ из (1.11).}$$

Вычислим изменение ϵ_* с точностью $(\Delta m_*)^2$, $\Delta m_* = \tilde{m}_* - m_*$:

$$\Delta \epsilon_* = \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{E} - E) dm - \beta \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3}) m dm. \quad (45.8)$$

В невозмущенном состоянии плотность в интервале $m_* < m < \tilde{m}_*$ близка к ρ_1 , а в возмущенном — к ρ_2 , причем $\rho(m_* + 0) = \rho_1$, $\tilde{\rho}(\tilde{m}_* - 0) = \rho_2$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\right) = E\left(\frac{1}{\rho_2}\right) - P_*\left(\frac{1}{\tilde{\rho}} - \frac{1}{\rho_2}\right) + \dots \approx \\ &\approx H_* - \frac{P_*}{\tilde{\rho}} + O[(\Delta m)^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= E\left(\frac{1}{\rho}\right) = E\left(\frac{1}{\rho_1}\right) - P_*\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) + \dots \approx \\ &\approx H_* - \frac{P_*}{\rho} + O[(\Delta m)^2]. \end{aligned}$$

Здесь энтальпия $H_* = E\left(\frac{1}{\rho_1}\right) + \frac{P_*}{\rho_1} = E\left(\frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{P_*}{\rho_2}$ постоянна в интервале $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$. Отсюда первое слагаемое в правой части (45.8) равно

$$P_* \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tilde{\rho}}\right) dm + \dots \approx P_* [v(\tilde{m}_*) - v(m_*) - \tilde{v}(\tilde{m}_*) + \tilde{v}(m_*)].$$

Итак,

$$\int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{E} - E) dm \approx P_* [\delta v(m_*) - \delta v(\tilde{m}_*)]. \quad (45.9)$$

Во втором члене в (45.8) учтем, что

$$v(m) \approx v(\tilde{m}_*) + \frac{1}{\rho_1} (m - \tilde{m}_*), \quad \tilde{v}(m) \approx \tilde{v}(\tilde{m}_*) + \frac{1}{\rho_2} (m - \tilde{m}_*). \quad (45.10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3} &\approx -\frac{1}{3} v^{-4/3}(\tilde{m}_*) (\tilde{v} - v) \approx \\ &\approx -\frac{1}{3} v^{-4/3}(\tilde{m}_*) \left[\tilde{v}(\tilde{m}_*) - v(\tilde{m}_*) + (m - \tilde{m}_*) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (45.11)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \beta \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3}) m dm &\approx \beta m_* \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3}) dm \approx \\ &\approx -\frac{\beta m_* \delta v(\tilde{m}_*)}{3v^{4/3}(m_*)} \Delta m_* + \frac{\beta m_*}{6v^{4/3}(m_*)} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (\Delta m_*)^2. \end{aligned} \quad (45.12)$$

Предположим, что приращение $\delta v(m)$ на участках 1 и 2 имеет тот же порядок малости, что и величина сдвига скачка $\Delta m_* = \tilde{m}_* - m_*$. Учтем также в (45.4), (45.5) соотношение, следующее из уравнения равновесия:

$$P(\tilde{m}_*) \approx P(m_*) - \frac{\beta m_*}{3v^{4/3}(m_*)} \Delta m_*. \quad (45.13)$$

Для полного возмущения $\Delta \epsilon = \delta \epsilon + \delta^2 \epsilon$ с учетом (45.4)–(45.7), (45.9)–(45.13) получим

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon = & \frac{1}{2} \left(\int_0^{m_*} + \int_{\tilde{m}_*}^M \right) \left[\gamma P \rho \left(\frac{d\delta v}{dm} \right)^2 - \frac{4}{9} \beta \frac{m(\delta v)^2}{v^{7/3}} \right] dm + \\ & + \frac{\beta m_*}{6v^{4/3}(m_*)} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) (\tilde{m}_* - m_*)^2. \end{aligned} \quad (45.14)$$

Выразим теперь $(\tilde{m}_* - m_*)$ через δv . В силу (45.10) имеем

$$\delta v(\tilde{m}_*) - \delta v(m_*) \approx (\tilde{m}_* - m_*) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right), \quad (45.15)$$

поэтому неинтегральный член в (45.14) равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} B [\delta v(\tilde{m}_*) - \delta v(m_*)]^2, \\ B = & \frac{\beta m_*}{3v_*^{4/3}} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1}, \quad v_* = v(m_*). \end{aligned} \quad (45.16)$$

Возьмем пробную функцию δv в виде

$$\delta v(m) = \begin{cases} \eta \varphi_2(m), & 0 \leq m \leq m_*, \quad (\varphi_2(0) = 0) \\ \eta \varphi_1(m), & \tilde{m}_* \leq m \leq M. \end{cases} \quad (45.17)$$

Тогда требование положительности $\Delta \epsilon$ при малых η запишется в виде

$$\Delta \epsilon = \int_0^M \left\{ \gamma P \rho [\varphi'(m)]^2 - \frac{4}{9} \beta \frac{m \varphi^2}{v^{7/3}} \right\} dm + B [\varphi_1(m_*) - \varphi_2(m_*)]^2 > 0;^*) \quad (45.18)$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_2, & 0 \leq m \leq m_*, \\ \varphi_1, & m_* \leq m \leq M. \end{cases}$$

Пробная функция $\varphi(m)$ может быть разрывной при $m = m_*$, что и приводит к дополнительному неинтегральному слагаемому в условии устойчивости. При нескольких фазовых переходах в одной звезде каждому из них соответствует неинтегральное слагаемое типа (45.16).

б) Другие формы записи критерия устойчивости. В (45.18) пробная функция $\varphi(m)$ произвольна, имеет произвольный скачок при $m = m_*$ и должна лишь равняться нулю при $m = 0$. Зафиксируем значения на скачке $\varphi_2(m_*) = \varphi(m_* - 0)$, $\varphi_1(m) = \varphi(m_* + 0)$ и подберем $\varphi(m)$ так, чтобы

*) Означает производную по m .

минимизировать интегральный член в (45.18). Уравнение Эйлера для такой вариационной задачи при квадратичном функционале линейно и совпадает с линеаризованным уравнением равновесия

$$\frac{d}{dm} [\gamma P \rho \varphi'(m)] + \frac{4}{9} \beta \frac{m}{v^{7/3}} \varphi = 0. \quad (45.19)$$

Интеграл в (45.18) с помощью (45.19) можно выразить через значения на скачке φ_1 и φ_2 . Тогда вместо (45.18) получаем условие

$$-P_* \gamma_2 \rho_2 \varphi'_2(m_*) \varphi_2(m_*) + B[\varphi_1(m_*) - \varphi_2(m_*)]^2 + P_* \gamma_1 \rho_1 \varphi'_1(m_*) \varphi_1(m_*) \geq 0, \quad \gamma_2 \equiv \gamma(m_* - 0), \quad \gamma_1 \equiv \gamma(m_* + 0). \quad (45.20)$$

Так как условие $\varphi(0) \equiv \varphi_2(0) = 0$ определяет решение уравнения (45.19) с точностью до множителя, отношения $\varphi'_2(m_*)/\varphi_2(m_*)$ и $\varphi'_1(m_*)/\varphi_1(m_*)$ не зависят от $\varphi_1(m_*)$, $\varphi_2(m_*)$ и определяются только невозмущенными функциями. Обозначим

$$A_2 = -P_* \gamma_2 \rho_2 \frac{\varphi'_2(m_*)}{\varphi_2(m_*)}, \quad A_1 = P_* \gamma_1 \rho_1 \frac{\varphi'_1(m_*)}{\varphi_1(m_*)}. \quad (45.21)$$

Тогда условие (45.20) примет вид

$$A_2 \varphi_2^2 + B(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + A_1 \varphi_1^2 \geq 0 \quad (45.22)$$

для любых $\varphi_{1*} = \varphi_1(m_*)$ и $\varphi_{2*} = \varphi_2(m_*)$. Для выполнения (45.22) требуется

$$A_1 + B \geq 0, \quad A_2 + B \geq 0, \quad A_1 A_2 + B(A_1 + A_2) \geq 0. \quad (45.23)$$

Иногда полезна форма записи необходимого условия устойчивости, в которой минимизирован лишь один интеграл. Исключая интеграл от 0 до m_* и минимизируя по φ_{2*} , получаем

$$D[\varphi_1(m_*)]^2 + \int_{m_*}^M \left\{ \gamma P \rho [\varphi'_1(m)]^2 - \frac{4}{9} \beta \frac{[\varphi_1(m)]^2}{v^{7/3}} \right\} dm \geq 0, \quad (45.24)$$

$$D = A_2 B / (A_2 + B), \quad A_2 + B \geq 0.$$

Условие (45.23) на вид локально, но для вычисления A_1 и A_2 нужно решить две задачи Коши для уравнения (45.19): на участке $0 \leq m \leq m_*$ из точки $m = 0$ и на участке $m_* \leq m \leq M$ из точки $m = M$. После получения этих решений и нахождения A_1 и A_2 из (45.21) проверяется устойчивость по (45.23).

Если в условиях (45.18) и (45.22) рассматривать только непрерывные функции $\varphi(m)$ т.е. $\varphi_1(m_*) = \varphi_2(m_*)$, то из (45.22) получаем требование $A_1 + A_2 \geq 0$. Непрерывность $\varphi(m)$ соответствует возмущениям, не сдвигающим скачок плотности по массе. Это же условие устойчивости имеет место и при отсутствии фазового перехода и следует из (45.23) при $\rho_2 \rightarrow \rho_1$, $B \rightarrow \infty$. В (45.24) при отсутствии фазового перехода можно прямо положить $\rho_1 = \rho_2$, что приводит к $D = A_2$.

в) **Приближенная проверка устойчивости.** Вариационный принцип (45.18) позволяет провести приближенную проверку устойчивости, выбрав подходящий класс пробных функций $\varphi(m)$. Это существенно проще ре-

шения задачи Коши для уравнения (45.19), имеющего особенности при $m = 0$ и $m = M$. При отсутствии фазового перехода хороший результат получается при линейной пробной функции $\varphi(m) = v(m)$ (см. § 40 и (40.8) для случая ОТО). При наличии фазового перехода удовлетворительная точность получается при использовании двухпараметрического семейства пробных функций. Введем вместо $\varphi(m)$ пробную функцию $\psi(r)$, сводящуюся к $(\delta r/r)$ в гладком случае (см. § 43)

$$\varphi(m) = 3v(m)\psi(r(m)).$$

Тогда условие (45.18) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{r_*} + \int_{r_*}^R \right) Pr^2 \left[\gamma \left(3\psi + r \frac{d\psi}{dr} \right)^2 - 12\psi^2 - 4r \frac{d\psi^2}{dr} \right] dr + \\ & + K_1(\psi_{1*} - \psi_{2*})^2 + K_2(\psi_{2*}^2 - \psi_{1*}^2) \geq 0, \\ & K_1 = Gm_* r_*^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1}, \quad K_2 = 4P_* r_*^3. \end{aligned} \quad (45.25)$$

Условие (45.25) сводится к (43.16) при $\psi_{1*} = \psi_{2*}$ и интегрировании по частям с учетом уравнения равновесия (21.1). Обобщение линейной пробной функции $\psi = 1$, $\varphi \sim v$ на случай фазового перехода есть функция

$$\psi = \begin{cases} \alpha_2, & r < r_*, \\ \alpha_1, & r > r_*, \end{cases}$$

которая, однако, не дает достаточной точности для границы устойчивости. Точность вариационного критерия контролировалась с помощью статического критерия. Удачным оказался выбор двухпараметрического семейства

$$\psi(r) = \begin{cases} \alpha_1, & r < r_*, \\ \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{r^2}, & r > r_*. \end{cases} \quad (45.26)$$

Подставив (45.26) в (45.25), получим квадратичную форму $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, положительная определенность которой необходима для устойчивости

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i,k=1}^3 A_{ik} \alpha_i \alpha_k.$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= K_1 + K_2 + 3I_1, & A_{12} &= A_{21} = -K_1, & A_{13} &= A_{31} = -K_1/r_*^2, \\ A_{22} &= K_1 - K_2 + 3I_2, & A_{23} &= A_{32} = (K_1 - K_2)/r_*^2 + I_3, \\ A_{33} &= (K_1 - K_2)/r_*^4 + I_4. \end{aligned} \quad (45.27)$$

Здесь K_1 и K_2 даны в (45.25), а интегралы I_i равны

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{r_*} (3\gamma - 4) Pr^2 dr, & I_3 &= \int_{r_*}^R (3\gamma - 4) P dr, \\ I_2 &= \int_{r_*}^R (3\gamma - 4) Pr^2 dr, & I_4 &= \int_{r_*}^R (\gamma + 4) \frac{P}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (45.28)$$

Результаты применения критерия (45.18) в виде (45.25)–(45.28) для звезд с фазовым скачком плотности $q = \rho_2/\rho_1$ и политропой с одинаковым

Приближенные значения критических параметров политроп с фазовыми переходами по критерию (45.25) – (45.28) в сравнении с точными значениями по статическому критерию § 44. ρ_a – центральная плотность в точке потери устойчивости, ρ_b – то же в точке возврата устойчивости (из [42])

q	ρ_a/ρ_2		ρ_b/ρ_2		γ
	Точное значение	Приближенное значение	Точное значение	Приближенное значение	
1,32			устойчиво		
1,33	1,15	–	1,25	–	5/3
1,34	1,10	1,28	1,35	1,35	
1,38	1,03	1,14	1,60	1,6	
1,60	1,00	*	2,63	2,6	
2,00	1,00	*	4,3	4,2	
1,08			устойчиво		
1,09	1,42	–	1,51	–	7/5
1,10	1,19	1,20	2,19	2,18	

) При $\rho_a = \rho_2$ имеем $r_ = 0$ и возникает расходимость в интеграле I_4 из (45.28).

γ при $\rho < \rho_1$ и $\rho > \rho_2$ даны в табл. 55 из [42]. Для сравнения приведены точные значения критических плотностей, полученные из статического критерия в [64].

Качественные зависимости $M(P_c)$ в окрестности точки фазового перехода в центре звезды приведены на рис. 125 для различных γ и q (см. [191, 64]). При $q > 3/2$ потеря устойчивости происходит при $P_c = P_*$, но по мере дальнейшего роста P_c и ρ_c для $\gamma > 4/3$ устойчивость восстанавливается при $P_c = P_b$ ($\rho_c = \rho_b$), рис. 125, а. При $q < 3/2$ также возможна потеря устойчивости при конечном ядре новой фазы с $P_c = P_a$, $\rho_c = \rho_a$. Для каждого $\gamma > 4/3$ существует q_k , такое, что при $q < q_k$ звезда всегда устойчива. Для $\gamma = 2, 5/3, 3/2, 7/5, 4/3$ приближенные значения $q_k = 1,46, 1,33, 1,20, 1,09, 1,00$. Очевидно, что случай $\gamma = 4/3$ вырожден (безразличное равновесие) в ньютоновской теории (см. (45.24)), поэтому сколь угодно слабый фазовый переход приводит к неустойчивости.

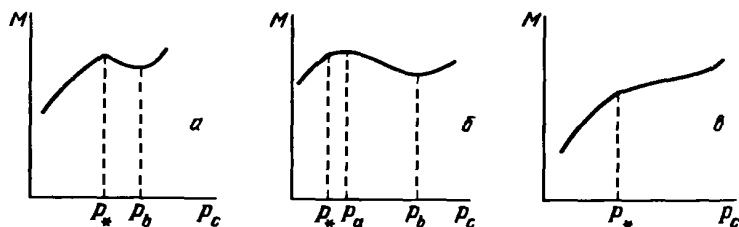


Рис. 125. Качественные зависимости $M(P_c)$ политроп с фазовыми переходами при $\gamma > 4/3$ и для различных q : $q > 3/2$ (а), $q_k < q < 3/2$ (б), $q < q_k < 3/2$ (в)

г) Вывод условия устойчивости при фазовом переходе в центре звезды. Используя эйлерову координату v в качестве независимой переменной, запишем энергию ϵ из (45.1) в виде

$$\epsilon = \int_0^{\infty} E \rho dv - \frac{\beta}{6} \int_0^{\infty} \frac{m^2 dv}{v^{4/3}}. \quad (45.29)$$

Пусть в невозмущенной звезде $P_c = P_*$, а в точке фазового перехода в возмущенной звезде $v = v_*$. Для подсчета вариации энергии разобьем интегралы в (45.29) на интервалы $0 < v < v_*$, $v_* < v < \infty$. Имеем

$$\delta \left(\int_{v_*}^{\infty} E \rho dv \right) = \int_{v_*}^{\infty} H \delta \rho dv = \int_{v_*}^{\infty} H \frac{d\delta m}{dv} dv = H \delta m \Big|_{v_*}^{\infty} - \int_{v_*}^{\infty} \frac{dH}{dv} \delta m dv, \quad (45.30)$$

$$H = E + P/\rho, \quad \delta \left(\frac{\beta}{6} \int_{v_*}^{\infty} \frac{m^2 dv}{v^{4/3}} \right) = \frac{\beta}{3} \int_{v_*}^{\infty} \frac{m \delta m dv}{v^{4/3}},$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{\beta}{6} \int_{v_*}^{\infty} \frac{m^2 dv}{v^{4/3}} \right) = \frac{\beta}{6} \int_{v_*}^{\infty} \frac{(\delta m)^2 dv}{v^{4/3}} = \frac{\beta}{2} \frac{[\delta m(v_*)]^2}{v_*^{1/3}} + O(v_*^2) = \quad (45.31)$$

$$= \frac{\beta v_*^2 (\rho_2 - \rho_1)^2}{2 v_*^{1/3}} + O(v_*^2).$$

Вторая вариация первого интеграла в (45.29) есть величина $\sim v_*^2$ и нам не понадобится. На внутреннем участке имеем

$$\int_0^{v_*} (\tilde{E} \tilde{\rho} - E \rho) dv = \int_0^{v_*} H_* (\tilde{\rho} - \rho) dv + O(v_*^2) = H_* \delta m(v_*) + O(v_*^2), \quad (45.32)$$

$$\frac{\beta}{6} \int_0^{v_*} \frac{dv}{v^{4/3}} (\tilde{m}^2 - m^2) = \frac{\beta}{10} (\rho_2^2 - \rho_1^2) v_*^{5/3}.$$

С учетом уравнения равновесия в точке v_* невозмущенной звезды имеем

$$H(v_*) = H_* - \frac{\beta}{2} \rho_1 v_*^{2/3} + O(v_*^{4/3}). \quad (45.33)$$

Суммируя изменения энергии (45.30)–(45.32) с учетом уравнения равновесия (45.33) в первом члене первого соотношения (45.30), получим

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &= - \frac{\beta v_*^{5/3}}{10} [5(\rho_2 - \rho_1)^2 - \rho_2^2 + \rho_1^2] + [H_* - H(v_*)] \delta m(v_*) = \\ &= \frac{\beta v_*^{5/3}}{10} [-5(\rho_2 - \rho_1)^2 + \rho_2^2 - \rho_1^2 + 5\rho_1(\rho_2 - \rho_1)] = \\ &= \frac{3\beta v_*^{5/3}}{5} (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{3}{2} \rho_1 - \rho_2 \right). \end{aligned} \quad (45.34)$$

Так как $\rho_2 > \rho_1$ условие устойчивости $\Delta \epsilon > 0$ сводится к $\rho_1 < \frac{3}{2} \rho_1$.

Этот вывод получен в [470, 191] более сложным способом. Отметим, что вывод условия (45.34) прямым подсчетом энергии в лагранжевых координатах сделать не удалось, так как неинтегральные члены в (45.18) становятся более низкого порядка малости и определяют результат.

ТЕПЛОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 46. Эволюционные стадии проявления тепловых неустойчивостей

Развитие динамической неустойчивости в звезде ведет к переходу ее в компактное состояние (нейтронную звезду или черную дыру) с возможным наблюдаемым взрывом сверхновой, и означает конец ядерной эволюции. Результаты развития тепловой неустойчивости не всегда столь катастрофичны. В гл. 9, § 35 некоторые проявления тепловой неустойчивости уже рассматривались.

а) Неустойчивость в вырожденных областях. Развитие неустойчивости в условиях вырождения вещества, предсказанное в [484], объясняется очень просто. Рост температуры в этом случае почти не влияет на давление. Гидродинамический механизм стабилизации не срабатывает, экспоненциально подающее с температурой время ядерного горения быстро уменьшается и происходит термоядерный взрыв. Проявления подобных взрывов довольно разнообразны.

1. Гелиевая вспышка. Имеет место в вырожденных гелиевых ядрах образующихся у звезд с начальной массой $M_i < 2,25M_\odot$ (см. § 33) после выгорания водорода в центре. Результатом гелиевой вспышки является снятие вырождения в ядре и переход в состояние спокойного горения гелия (см. рис. 89). Во время гелиевой вспышки всегда $\tau_n > \tau_h$ и статическое равновесие почти не нарушается.

2. Углеродная вспышка. В звездах с массой вначале $M_i = 2,25 \div 8M_\odot$ вырожденное ядро образуется после выгорания в нем гелия и образования смеси $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ (§ 33, 35). Судьба такой звезды зависит от конкуренции между процессами роста вырожденного C—O ядра при горении гелиевого слоевого источника и истечения вещества. Как показано в § 33, согласно наблюдательным свидетельствам лишь наиболее массивным звездам из этого интервала удастся увеличить массу ядра до $1,39M_\odot$, когда в нем развивается тепловая неустойчивость, ведущая к взрыву с $\tau_n < \tau_h$ (§ 33, п.з). В результате такого взрыва происходит либо полный разлет звезды, либо переход к коллапсу с образованием нейтронной звезды (§ 35).

3. Неон-кислородные вспышки. У звезд с $M = 8 \div 13M_\odot$ углерод в ядре горит в невырожденном состоянии, но образующееся при этом $\text{O} + \text{Ne} + \text{Mg}$ — ядро оказывается вырожденным (§ 34, п. б). Для звезд с $M = 8 \div 10M_\odot$ развитие динамической неустойчивости является следствием нейтронизации ^{24}Mg , ведущей к коллапсу, и начинается прежде, чем в вырожденном ядре разовьется тепловая неустойчивость. Кислородная тепловая вспышка на стадии сжатия почти не влияет на коллапс. Для звезд с $M = 10 \div 13M_\odot$ тепловая вспышка развивается на периферии вырожденного ядра, приводит к снятию в нем вырождения и дальнейшей спокойной эволюции. Здесь, как и в гелиевой вспышке, всегда $\tau_n > \tau_h$.

4. Оболочки белых карликов. Вырожденные водородно-гелиевые слои формируются в оболочках белых карликов в результате аккреции в двойных системах. Предполагается, что развитие в них тепловой неустойчивости

термоядерного горения водорода является причиной вспышек новых звезд (§ 39, п.д)). При этом τ_n становится меньше τ_h .

5. Оболочки нейтронных звезд. Образование вырожденных слоев из водорода и гелия с последующей термоядерной вспышкой здесь также происходит в результате аккреции. Расчеты показывают [243], что после загорания водорода в оболочках нейтронных звезд развиваются столь высокие температуры, что происходит взрывное горение гелия. Тепловые взрывы возможны также в чисто гелиевой вырожденной оболочке. В процессе взрыва условие статичности $\tau_n > \tau_h$ не нарушается. Подобные взрывы связываются с рентгеновскими барстерами — вспыхивающими рентгеновскими источниками, наблюдаемыми в сферической составляющей Галактики и в шаровых скоплениях в диапазоне энергий от десятых долей кэВ до нескольких десятков кэВ. Анализ наблюдательных данных свидетельствует в пользу того, что барстерами являются очень старые нейтронные звезды с малыми магнитными полями, входящие в состав тесных двойных систем в паре с маломассивным красным или белым карликом. Из-за малого магнитного поля возможно раскручивание нейтронной звезды до больших угловых скоростей в результате аккреции и превращения ее в быстрый миллисекундный пульсар*).

В расчетах с регулярной аккрецией [458], рис. 126, тепловые вспышки происходят также регулярно с интервалом между вспышками, зависящим от скорости аккреции $\dot{M}$. Наблюдения показывают сильную нерегулярность появления и свойств вспышек [601], рис. 127, что указывает на возможность хаотических проявлений. Возникновение стохастичности в некоторых моделях рентгеновских барстеров исследовано в работе [550].

6. Взрыв в оболочке нейтронной звезды из-за реакции деления сверхтяжелых ядер. В более жестком диапазоне энергий от 20 кэВ до 20 МэВ наблюдаются гамма всплески. По длительности: от десятых долей до десятков секунд, они близки к рентгеновским, но показывают большее разнообразие типов всплесков (рис. 128 [377]). В отличие от рентгеновских барстеров, которые видны на одних и тех же нерегулярно вспыхивающих источниках, гамма всплески за малым исключением не являются рекуррентными. О природе гамма всплесков нельзя говорить столь определенно, как о природе рентгеновских барстеров, но их происхождение на нейтронных звездах сомнения не вызывает. Эта уверенность основана на наблюдении жесткого пульсара в течение более ста секунд после гамма вспышки на месте одного из самых мощных из наблюдаемых всплесков, происшедшего 15-го марта 1979 г. [152].

Скорее всего, гамма-всплески происходят на старых остывших одиночных нейтронных звездах, так как они не связаны ни с одним стационарным оптическим объектом (или радио), которыми могли бы быть нормальный компаньон нейтронной звезды или сама молодая нейтронная звезда — радиопулсар.

Модель гамма всплеска, предложенная в [278, 289] и развитая в [62, 288], основана на неустойчивости, ведущей к ядерному взрыву при ре-

*) Открытие миллисекундного пульсара в шаровом скоплении М 28 [473а] подтвердили эту эволюционную схему, рассмотренную в [250а]. К 1989 г. открыто 5 радиопулсаров в шаровых скоплениях с быстрым вращением (см., например, [34а]).

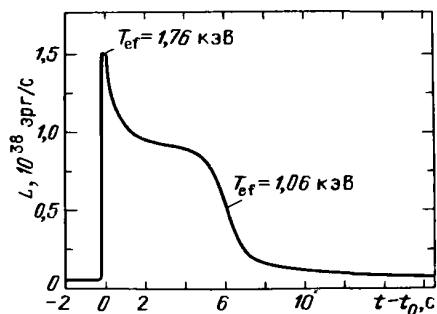


Рис. 126. Зависимость светимости от времени при вспышке, связанной с водородно-гелиевым горением в оболочке нейтронной звезды. Указаны эффективные температуры в максимуме светимости и на спаде вспышки (из [458])

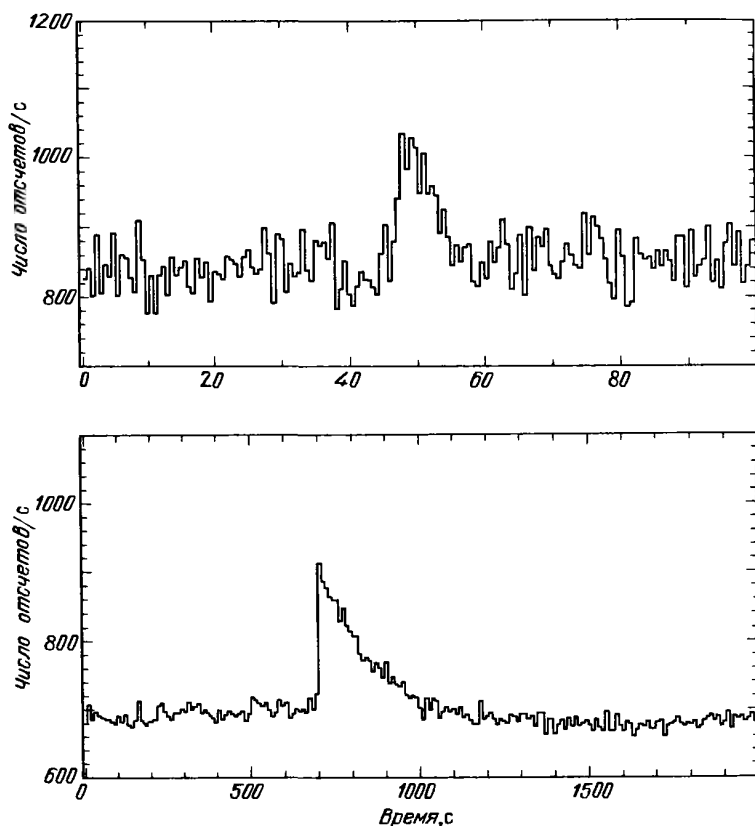


Рис. 127. Профили двух всплесков, наблюдавшихся от источника GX 17 + 2 на спутнике EXOSAT 6 сентября 1984 г. (вверху) и 20 августа 1085 г. (внизу). Временное разрешение равно 0,63 с для верхнего и нижнего рис. соответственно (из [601])

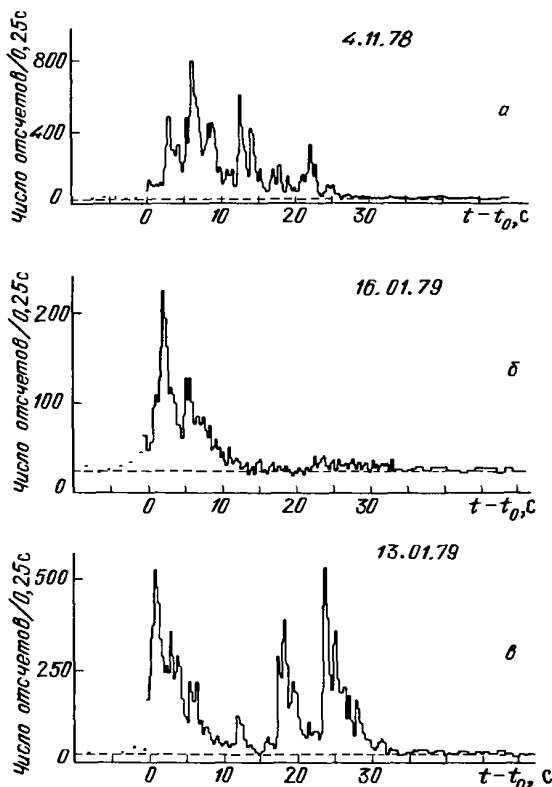


Рис. 128. Временные профили нескольких гамма-всплесков, наблюдаемых в эксперименте "Конус". Даты всплесков указаны на рисунках (из [377])

акции деления сверхтяжелых ядер во внешней оболочке нейтронной звезды при $\rho \leq 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Сверхтяжелые ядра образуются при формировании нейтронной звезды и запасаются в неравновесном слое (см. § 4, пп. д и е) [60, 61, 287]. Будучи устойчивыми в неравновесном слое при $\rho = 10^{10} - 10^{12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, сверхтяжелые ядра становятся неустойчивыми относительно бета-распада после перехода в менее плотные слои с $\rho \leq 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Такой переход может быть вызван звездотрясением на нейтронной звезде аналогичным тому, которое вызывает, возможно, наблюдаемые скачки периода в радиопульсарах [153]. Увеличение числа протонов в ядре делает его неустойчивым относительно деления после бета распада. Появление быстрых нейтронов при спонтанном делении инициирует вынужденное деление, которое в итоге приводит к цепной реакции [288] и взрывному выделению энергии за время $\tau_n \sim 10^{-8} \text{ с}$, много меньшее гидродинамического времени оболочки $\tau_{h,env} = R/v \approx 10^4/10^{10} \approx 10^{-6} \text{ с}$. Выделение энергии $Q \approx 10^{40} \text{ эрг}$ в оболочке нейтронной звезды приводит к формированию ударной волны, выход которой на поверхность связывается с наблюдаемым гамма всплеском [39].

Неустойчивость, ведущая к цепной реакции деления, по своей природе отличается от рассмотренных выше проявлений тепловой неустойчивости, обусловленных уменьшением времени горения τ_n из-за роста температуры. Ядерное время деления зависит не от температуры, а от концентрации быстрых нейтронов при сверхкритической массе делящихся ядер. Тепловой характер этой неустойчивости проявляется в том, что в вырожденном веществе на начальных этапах развития цепной реакции относительный рост давления незначителен и гидродинамические движения и образование ударной волны происходит только после высвобождения всей энергии деления сверхтяжелых ядер. Такую неустойчивость можно назвать ядерно-тепловой.

б) Неустойчивости в отсутствие вырождения. 7. Петли на эволюционных треках массивных звезд на ГР диаграмме. Эволюционные треки звезд с массами $M \gtrsim 3M_\odot$ на ГР диаграмме оказываются очень чувствительными к исходным параметрам и даже к методу численного счета (§ 32, пп. б и в). Столь нерегулярное поведение указывает на наличие тепловой неустойчивости, природа которой отличается от рассмотренных выше. Здесь имеют дело не с уменьшением τ_n из-за изменения температуры, более того, темп ядерного горения здесь меняется слабо. Проявление данной тепловой неустойчивости состоит в неустойчивости эволюции звезды на стадии горения гелия в ядре и водорода в слоевом источнике. Математически это сводится к тому, что зависящие от времени решения уравнений эволюции оказываются неустойчивыми, т.е. сколь угодно малые различия в начальных условиях ведут со временем к большим различиям в решениях. В процессе развития данной неустойчивости соотношения между характерными временами $\tau_h, \tau_{th}, \tau_n$ по порядку величины не меняются. Неустойчивость является необходимым условием развития стохастичности [138], проявляющейся в численных расчетах.

Несмотря на существование многочисленных эволюционных расчетов с образованием петель, физическая природа данной неустойчивости и ее движущие силы остаются неясными. В [651] эта неустойчивость у массивных звезд с $M \geq 15M_\odot$ связывается с выходом водородного слоевого источника за скачок химического состава на границе максимального проникновения вглубь внешней конвективной зоны на предыдущих стадиях эволюции. Однако не исключено, что само это проникновение является следствием данной неустойчивости. Для менее массивных звезд предположения о физической природе петель отсутствуют.

8. Вспышки в невырожденных гелиевых слоях. Данный тип неустойчивости имеет место в звездах с массами $2,25 \div 8M_\odot$ на стадии роста вырожденного C—O ядра из-за горения гелия в слоевом источнике (§ 33, п.г). По своим проявлениям эта неустойчивость полностью аналогична неустойчивости ядерного горения в условиях вырождения. Так же как и там, с ростом температуры характерное время горения гелия τ_{He} сильно уменьшается, хотя никогда не достигает τ_h , поэтому статическое равновесие сохраняется, как в случаях 1, 3, 5. Слой горения гелия оказывается динамически слабо реагирующим на рост температуры внутри него, однако причина этого не в слабой зависимости давления от температуры, как в вырожденном веществе, а связана с откликом всей звезды на повышение температуры в тонком слое.

§ 47. Развитие тепловой неустойчивости в невырожденных слоевых источниках

Предсказание о возможности развития тепловой неустойчивости в невырожденных тонких слоях горения в результате особенностей отклика звезды на возмущения скорости горения сделано в [95]. В [570] дано математическое описание неустойчивостей подобного типа. Рассмотрим динамически устойчивые звезды.

а) Устойчивость слоя горения постоянной толщины. Приближенно рассмотрим тепловое возмущение без учета его влияния на равновесие слоя. Перепишем уравнения теплового равновесия для радиативного случая (22.3), (22.4) с уравнением состояния идеального газа из (1.2) в виде

$$L_r = -(4\pi r^2)^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa} \frac{dT}{dm}, \quad (47.1)$$

$$\epsilon - \frac{dL_r}{dm} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \frac{ds}{dt}, \quad (47.2)$$

$$s = \frac{2}{3} \frac{S}{\mathfrak{R}} = \ln \frac{P}{\rho^{5/3}} + \text{const}, \quad \mathfrak{R} = \frac{k}{\mu m_u}, \quad (47.3)$$

где S — энтропия (1.3) идеального полностью ионизованного газа с μ из (1.7). Предположим, что все источники энергии расположены в слое массы Δm , а вне этого слоя выделение энергии пренебрежимо мало. Идеализированное распределение температуры в слое Δm показано на рис. 129 из [570]. Тогда из уравнения (47.1) следует

$$L_r = 0 \quad \text{при} \quad m = m_0, \quad (47.4)$$

$$L_r = L = (4\pi r^2)^2 \frac{4acT^3}{3\kappa} \frac{\Delta T}{1/2\Delta m} \quad \text{при} \quad m > m_0 + \frac{\Delta m}{2}. \quad (47.5)$$

Пренебрегая изменением энтропии со временем, получаем для средней скорости выделения энергии в слое

$$\epsilon = \frac{L}{\Delta m} \quad (47.6)$$

Наложим возмущение температуры слоя в виде [570], указанном на рис. 130. Пренебрегая возмущениями плотности и температуры и оставляя только возмущения градиента температуры, имеем из (47.1)

$$\delta L_r = \mp (4\pi r^2)^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa} \frac{\delta T}{1/4\Delta m}, \quad (47.7)$$

где "—" относится к внутренней, а "+" к внешней поверхности слоя. Тогда возмущение дивергенции потока равно

$$\delta \left(\frac{dL_r}{dm} \right) = 4 \frac{L}{\Delta m} \frac{T}{\Delta T} \frac{\delta T}{T} \quad (47.8)$$

Если скорость выделения энергии записать в виде

$$\epsilon \sim T^\nu, \quad (47.9)$$

пренебрегая ее зависимостью от плотности, и учесть только временные производные энтропии ($d/dt = \partial/\partial t$), то из (47.2) с учетом (47.6), (47.8), (47.9) получим

$$\left(\nu - 4 \frac{T}{\Delta T}\right) \frac{\delta T}{T} = \frac{3}{2} \left(\frac{p}{\rho} \frac{\Delta m}{L}\right) \frac{d(\delta s)}{dt} \quad (47.10)$$

Первый член в левой части (47.10) связан с ростом тепловыделения, а второй — с увеличением теплоотода из слоя. Положительность левой части

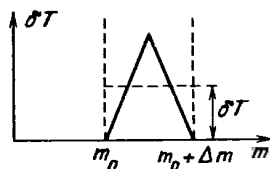
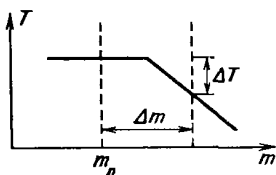


Рис. 129. Упрощенный профиль температуры в слое горения (из [570])

Рис. 130. Упрощенный профиль возмущения температуры в слое горения (из [570])

означает, что небольшое увеличение температуры слоя приводит к дальнейшему росту его энтропии и температуры, т.е. к неустойчивости. Таким образом, тепловыделение преобладает над теплоотводом при

$$\frac{\Delta T}{T} > \frac{4}{\nu}, \quad (47.11)$$

т.е. при достаточно большом перепаде температуры ΔT в слое. В [570] отмечается, что для протон-протонного цикла горения водорода из (14.6) с $\nu \approx 4$ [229] условие (47.11) не выполняется, но при $\nu \gg 4$ в случае горения гелия (14.39), см. [229], сравнительно небольшие перепады температуры могут привести к неустойчивости. Для окончательного ответа на вопрос о тепловой неустойчивости слоевого источника необходимо учесть совместно возмущения температуры и плотности, связанные с гидростатической подстройкой всей звезды к возмущению температуры в слое.

б) **Учет возмущений плотности [570].** Линеаризованные уравнения равновесия (22.1), (22.2) запишем в виде

$$\frac{d(\delta r/r)}{dm} = \frac{1}{4\pi r^3 \rho} \left(-3 \frac{\delta r}{r} - \frac{3}{5} \frac{\delta P}{P} + \frac{3}{5} \delta s \right), \quad (47.12)$$

$$\frac{d(\delta P/P)}{dm} = \frac{Gm}{4\pi r^4 P} \left(4 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta P}{P} \right). \quad (47.13)$$

При этом учтено

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{3}{5} \delta s + \frac{3}{5} \frac{\delta P}{P} \quad (47.14)$$

Решение неоднородной системы линейных уравнений (47.12), (47.13) — конечное по всей звезде, ищем методом вариации постоянных. Соответствующая однородная система (при $\delta s = 0$) имеет два линейно независи-

мых решения. Одно из этих решений с индексом "1" конечно в центре, где имеют место разложения (с нормировкой $(\delta P/P)_1 = 1$ при $m = 0, r = 0$)

$$(\delta r/r)_1 = -\frac{1}{5} - \frac{3}{250} \frac{\rho G m}{r P} - \dots, \quad (47.15)$$

$$(\delta P/P)_1 = 1 + \frac{1}{10} \frac{\rho G m}{r P} + \dots,$$

а другое, с индексом "2", конечно на краю звезды, где имеется разложение (с нормировкой $(\delta P/P)_2 = 1$ при $m = M, r = R$)

$$\left(\frac{\delta r}{r}\right)_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{20} \frac{R-r}{R} - \frac{6}{35} \left(\frac{R-r}{R}\right)^2 - \dots, \quad (47.16)$$

$$\left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 = 1 + \frac{3}{7} \left(\frac{R-r}{R}\right) + \frac{10}{21} \left(\frac{R-r}{R}\right)^2 + \dots$$

Решение неоднородной системы, конечное по звезде, ищем в виде

$$\delta r/r = C_1(m) (\delta r/r)_1 + C_2(m) (\delta r/r)_2, \quad (47.17)$$

$$\delta P/P = C_1(m) (\delta P/P)_1 + C_2(m) (\delta P/P)_2.$$

Решения "1" расходятся на границе, а решения "2" — в центре звезды, так как отсутствуют везде конечные ненулевые решения однородной системы. Это соответствует равновесному динамически устойчивому состоянию звезды в отсутствие возмущений (см. § 44). Тогда функции $C_1(m)$ и $C_2(m)$ должны удовлетворять условиям

$$C_1(M) = 0, \quad C_2(0) = 0. \quad (47.18)$$

Подставляя (47.17) в (47.12), (47.13) и решая полученную относительно $C_1(m)$ и $C_2(m)$ систему с учетом (47.18), получаем решение неоднородной системы в виде

$$\frac{\delta r}{r} = \left(\frac{\delta r}{r}\right)_1 \int_0^R \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 \frac{3}{5} \delta s \frac{dr}{r} + \left(\frac{\delta r}{r}\right)_2 \int_0^r \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 \frac{1}{\Delta} \frac{3}{5} \delta s \frac{dr}{r},$$

$$\frac{\delta P}{P} = \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 \int_0^R \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 \frac{3}{5} \delta s \frac{dr}{r} + \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 \int_0^r \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 \frac{3}{5} \frac{\delta s}{\Delta} \frac{dr}{r}, \quad (47.19)$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\delta r}{r}\right)_2 \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 - \left(\frac{\delta r}{r}\right)_1 \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2. \quad (47.20)$$

Решение (47.19) записывается аналогично решению неоднородного уравнения второго порядка $\frac{d}{dx} [p(x)y'] - q(x)y + f(x) = 0$ на промежутке $[a, b]$ с однородными краевыми условиями $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$,

$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$ с помощью функции Грина [196]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi) & (x \leq \xi), \\ y_2(x) y_1(\xi) & (x \geq \xi), \end{cases}$$

где y_1 удовлетворяет первому, а y_2 — второму из краевых условий. Функция $G(x, \xi)$ является решением уравнения второго порядка при $f(x) = \delta(x - \xi)$, а решение при произвольном $f(x)$ имеет вид

$$y = \int_0^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Для локализованного в тонком слое возмущения δs из (47.19) получаем возмущение давления в слое в виде

$$\frac{\delta P}{P} \approx \frac{3}{5} Q \frac{\Delta r}{r} \delta s, \quad Q = \frac{(\delta P/P)_1 (\delta P/P)_2}{\Delta}. \quad (47.21)$$

Величина Q слабо меняется от -4 до -8 по звезде для модели красного гиганта с вырожденным углеродным ядром и гелиевым слоевым источником из [570]. Отрицательность Q приводит к тому, что рост энтропии в слое уменьшает давление в нем. При этом возмущение давления падает с уменьшением толщины слоя. Из уравнения состояния идеального газа, (47.14) и (47.21) получаем возмущение температуры в слое в виде

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{2}{5} \frac{\delta P}{P} + \frac{3}{5} \delta s = \frac{3}{5} \left(1 + \frac{2}{5} Q \frac{\Delta r}{r} \right) \delta s. \quad (47.22)$$

Отсюда для широких областей горения $\Delta r/r \sim 1$ и $Q \approx -6$ следует отрицательная теплоемкость звезды ($\delta T/T < 0$ при $\delta s > 0$), означающая ее тепловую устойчивость. Для достаточно тонких слоев горения возможен рост температуры при увеличении энтропии, если

$$\frac{\Delta r}{r} < \frac{5}{2} \frac{1}{|Q|}. \quad (47.23)$$

Совместное выполнение условий (47.11) и (47.23) необходимо для развития неустойчивости в слоевом источнике. В реальных слоях горения

$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta r}{r}$, поэтому

$$\frac{4}{\nu} < \frac{\Delta r}{r} < \frac{5}{2} \frac{1}{|Q|}, \quad \nu > \frac{8}{5} |Q| \approx 10. \quad (47.24)$$

Таким образом, гелиевые слоевые источники, а также водородные, где горение идет по углеродному циклу (§ 14) могут быть термически неустойчивыми. Возможно, что этот фактор влияет на образование петель на треках массивных звезд.

в) Строгий критерий тепловой устойчивости. Для строгого исследования тепловой устойчивости звезды следует одновременно решить

линеаризованную систему уравнений эволюции звезды с зависимостью от времени

$$\delta L, \delta r, \delta P, \delta T \sim e^{t/\tau}. \quad (47.25)$$

Эта система состоит из уравнения (47.12), (47.13), линеаризованного уравнения (47.1)

$$\delta L_r = -(4\pi r^2)^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa} \left[\frac{d\delta T}{dm} + \frac{dT}{dm} \left(\frac{4\delta r}{r} + \frac{3\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} \right) \right] \quad (47.26)$$

и линеаризованного уравнения (47.2), которое является единственным содержащим временную производную

$$\delta \epsilon - \delta \left(\frac{dL_r}{dm} \right) = \frac{3}{2} \delta \left(\frac{P}{\rho} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \frac{\delta s}{\tau}. \quad (47.27)$$

Линейная однородная система дифференциальных уравнений (47.12), (47.13), (47.26), (47.27) решается с помощью перехода к конечно-разностным уравнениям, как в методе Хенли (§ 22). В силу однородности у этой системы при выполнении линеаризованных граничных условий (22.10), (22.11) решение существует только при нулевом определителе, что выделяет единственное значение собственное значение τ . Проведенный в [570] анализ тепловой устойчивости эволюционных моделей звезды в $1 M_\odot$ с малым содержанием металлов (население II) показал наличие положительных собственных значений: 1) на стадии начала гелиевой вспышки в ядре с $L_H \approx 2600 L_\odot$, $L_{He} \approx 1 L_\odot$, где $\tau \approx 300\,000$ лет, и 2) на стадии двух невырожденных слоевых источников (водородного и гелиевого) с вырожденным углеродным ядром при $L_H \approx 122 L_\odot$, $L_{He} \approx 118 L_\odot$, где $\tau \approx 10^6$ лет. В последнем случае возмущения температуры и энтропии имеют один и тот же знак внутри гелиевого и противоположные знаки внутри водородного слоевого источника, что указывает на неустойчивость именно гелиевого горения. Как следует из эволюционных расчетов (§ 33), в процессе развития гелиевой вспышки в слоевом источнике в нелинейном режиме τ быстро падает. На границе тепловой устойчивости $\tau = \infty$, а определитель рассмотренной линеаризованной системы совпадает с определителем Хенли (§ 22), поэтому обращение его в нуль в процессе эволюции означает наступление тепловой неустойчивости.

Обращение в нуль детерминантов в методе Хенли или Шварцшильда происходит и при появлении тепловой неустойчивости, ведущей к образованию петель на эволюционных треках (см. [522, 553, 527], § 32, п. а). С этим связана также неоднозначность при построении равновесных звездных моделей с заданным распределением химического состава по веществу.

КОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД И УСТОЙЧИВОСТЬ

Звезда, как динамическая система, имеет различные собственные моды колебаний. При учете тепловых процессов некоторые из этих мод оказываются неустойчивыми. Инкремент такой неустойчивости γ равный обратному характерному времени роста амплитуды в e раз, обычно много меньше частоты колебаний ω . Другие моды могут быть неустойчивыми и в адиабатическом приближении, например, конвективная неустойчивость при $dS/dr < 0$ (см. гл. 3).

Звездным пульсациям и анализу их устойчивости посвящены книги и обзоры [183, 130, 616, 468]. В этой главе рассмотрены радиальные колебания звезд с фазовыми переходами и важная проблема колебательной устойчивости массивных звезд, что не вошло в указанные монографии. Рассмотрим сначала кратко основы теории звездных пульсаций, следуя [130, 468].

§ 48. Собственные моды

а) Уравнения малых колебаний. Выведем линеаризованную систему уравнений гидродинамики, описывающих малые колебания звезды. Звезда предполагается невращающейся с $\vec{\omega} = 0$. Лагранжевы возмущения данного элемента вещества для смещения, скорости, плотности, давления и потенциала обозначаются в виде

$$\delta \vec{r}, \delta \vec{u}, \delta \rho, \delta P, \delta \Phi, \quad (48.1)$$

а эйлеровы в данной точке пространства в виде

$$\vec{u}', \rho', P', \Phi'. \quad (48.2)$$

Связь между ними имеет вид

$$\delta f = f' + \vec{\delta r} \cdot (\nabla f). \quad (48.3)$$

Задавая зависимость от времени $\sim e^{-i\omega t}$, получим из (27.1)

$$\vec{u}' = \delta \vec{u} = -i\omega \delta \vec{r}. \quad (48.4)$$

Из уравнения неразрывности (27.2) получаем

$$\delta \rho = \rho' + \nabla \rho \cdot \delta \vec{r} = -\rho (\nabla \cdot \delta \vec{r}). \quad (48.5)$$

Уравнение движения (27.3), деленное на ρ , после линеаризации примет вид

$$\omega^2 \delta \vec{r} + \frac{\nabla P'}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} \frac{\rho'}{\rho} + \nabla \Phi' = 0. \quad (48.6)$$

Лагранжевы возмущения энтропии δS , а также δP и $\delta \rho$ связаны соотношением

$$\delta P = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S \frac{P}{\rho} \delta \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \delta S = \gamma_1 \frac{P}{\rho} \delta \rho + \rho T \gamma_3 \delta S, \quad (48.7)$$

где из термодинамических соотношений имеем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho = \rho T \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S = \rho T \gamma_3, \quad (48.8)$$

γ_1 и γ_3 даны в (1.11), (1.13).

Запишем (48.6) в виде

$$-\omega^2 \delta \vec{r} + \nabla \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) + \frac{P'}{\rho^2} \nabla \rho - \frac{\nabla P}{\rho} \frac{\rho'}{\rho} = 0. \quad (48.9)$$

Выразив P' через δP в третьем члене (48.9) с помощью (48.3), получим

$$-\omega^2 \delta \vec{r} + \nabla \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) + \frac{\delta P}{\rho} \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{(\delta \vec{r} \cdot \nabla P)}{\rho} \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} \frac{\rho'}{\rho} = 0. \quad (48.10)$$

Так как в сферической звезде $\nabla P \parallel \nabla \rho$, два последних члена с помощью (48.5) объединяются в один:

$$\frac{(\delta \vec{r} \cdot \nabla P)}{\rho} \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\nabla P}{\rho} \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\delta \vec{r} \cdot \nabla \rho}{\rho} \cdot \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\delta \rho}{\rho} \cdot \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (48.11)$$

Учитывая (48.7) в третьем члене (48.10) и условие (48.11), получим

$$-\omega^2 \delta \vec{r} + \nabla \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) + \gamma_1 \frac{P}{\rho} \frac{\nabla \rho}{\rho} \frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho} \frac{\delta \rho}{\rho} + T \gamma_3 \frac{\nabla \rho}{\rho} \delta S = 0. \quad (48.12)$$

Введем величину

$$A = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\gamma_1 P} \frac{dP}{dr} \quad (48.13)$$

и выразим $\delta \rho$ через $\delta \vec{r}$ из (48.5). Тогда из (48.12) получаем

$$\omega^2 \delta \vec{r} - \nabla \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right) + \gamma_1 \frac{P}{\rho} A (\nabla \cdot \delta \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} = T \gamma_3 \frac{\nabla \rho}{\rho} \delta S. \quad (48.14)$$

В термически неравновесной звезде может быть важен учет изменения δS за период колебаний. Из уравнения энергии (22.3) имеем

$$-i\omega T \delta S = \epsilon - \frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{dL}{dr}. \quad (48.15)$$

Знак величины A из (48.13) связан с конвективной устойчивостью в устойчивом случае $A < 0$, в неустойчивом $A > 0$. В изэнтропической

звезде, нейтральной относительно конвекции, имеет место $A = 0$ (см. (10.3)). Возмущение потенциала удовлетворяет уравнению Пуассона (48.7)

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'. \quad (48.16)$$

Рассмотрим адиабатические колебания с $\delta S = 0$. В сферических координатах (r, φ, θ) имеем

$$\delta \vec{r} = (\delta r, r \sin \theta \delta \varphi, r \delta \theta), \quad (48.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi' = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \varphi^2} + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (48.18)$$

$$\nabla \cdot \delta \vec{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \delta r) + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \delta \theta) \quad (48.19)$$

Запишем уравнение (48.14) в компонентах сферической системы:

$$\omega^2 \delta r - \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right) + \gamma_1 \frac{P}{\rho} A (\nabla \cdot \delta \vec{r}) = 0, \quad (48.20)$$

$$\omega^2 r \delta \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right) = 0, \quad (48.21)$$

$$\omega^2 r \sin \theta \delta \varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right) = 0. \quad (48.22)$$

Подставляя (48.21), (48.22) в (48.19), получаем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \delta \vec{r} = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \delta r) + \frac{1}{r^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right)}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (48.23)$$

Собственные функции возмущений ищем в виде разложения по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} f = f_{lm}(r) Y_{lm} = f_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad l = 0, 1, \dots; \\ -l \leq m \leq l, \quad f = \delta \vec{r}, \rho', P', \Phi'. \end{aligned} \quad (48.24)$$

Здесь $P_l^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра, а сферические гармоники Y_{lm} удовлетворяют уравнению [93]

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0. \quad (48.25)$$

Подставляя (48.24) в (48.5), (48.16), (48.20), а также (48.18) и (48.23) с учетом (48.25), получим для адиабатических колебаний систему урав-

нений для радиальных зависимостей собственных функций

$$\frac{\rho'_{lm}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \delta r_{lm} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \delta r_{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \left(\Phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) = 0 \quad (48.26)$$

$$\omega^2 \delta r_{lm} - \frac{d}{dr} \left(\Phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) + \gamma_1 \frac{P}{\rho} A \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \delta r_{lm}) - \right. \\ \left. - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} \left(\Phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) \right] = 0, \quad (48.27)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'_{lm}}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi'_{lm} = 4\pi G \rho'_{lm}. \quad (48.28)$$

При этом из (48.3), (48.7) для $\delta S = 0$ имеем

$$P'_{lm} + \delta r_{lm} \frac{dP}{dr} = \gamma_1 \frac{P}{\rho} \left(\rho'_{lm} + \delta r_{lm} \frac{d\rho}{dr} \right)$$

откуда с учетом (48.13) получаем

$$\frac{P'_{lm}}{P} = \gamma_1 \frac{\rho'_{lm}}{\rho} + \gamma_1 \delta r_{lm} A. \quad (48.29)$$

Компоненты смещений $\delta \theta_{lm}$ и $\delta \varphi_{lm}$ получаются подстановкой (48.24) в (48.21) и (48.22). Имеем

$$\omega^2 r^2 \delta \theta_{lm} = \left(\Phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) \frac{dP_l^m}{d\theta} e^{im\varphi}, \quad (48.30)$$

$$\omega^2 r^2 \sin^2 \theta \delta \varphi_{lm} = \left(\Phi'_{lm} + \frac{P'_{lm}}{\rho} \right) im P_l^m e^{im\varphi}. \quad (48.31)$$

В безразмерных переменных [342]

$$y_1 \equiv \frac{\delta r}{r}, \quad y_2 \equiv \frac{1}{gr} \left(\Phi' + \frac{P'}{\rho} \right), \quad y_3 \equiv \frac{1}{gr} \Phi', \quad y_4 \equiv \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (48.32)$$

где $g = Gm/r^2$ — локальное ускорение силы тяжести, уравнения (48.26) — (48.29) примут вид (опуская индексы lm)

$$r \frac{dy_1}{dr} = \left(\frac{g\rho r}{\gamma_1 P} - 3 \right) y_1 + \left[g \frac{l(l+1)}{r\omega^2} - \frac{g\rho r}{\gamma_1 P} \right] y_2 + \frac{g\rho r}{\gamma_1 P} y_3, \quad (48.33)$$

$$r \frac{dy_2}{dr} = \left(\frac{r\omega^2}{g} + rA \right) y_1 + \left(1 - \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} - rA \right) y_2 + rA y_3, \quad (48.34)$$

$$r \frac{dy_3}{dr} = \left(1 - \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} \right) y_3 + y_4, \quad (48.35)$$

$$r \frac{dy_4}{dr} = -\frac{r}{m} \frac{dm}{dr} y_1 + \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} \frac{g\rho r}{\gamma_1 P} y_2 + \\ + \left[l(l+1) - \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} \frac{g\rho r}{\gamma_1 P} \right] y_3 - \frac{r}{m} \frac{dm}{dr} y_4. \quad (48.36)$$

В безразмерном виде уравнения (48.33)–(48.36) удобны для численного интегрирования.

б) **Граничные условия.** Граничные условия для уравнений малых неаддиальных колебаний следуют из условий ограниченности собственных функций в центре и на поверхности звезды. Условие конечности решений в центре приводит к следующим разложениям:

$$\delta r = r^{l-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu} r^{\nu}, \quad (48.37)$$

$$P'/\rho = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} Y_{\nu} r^{\nu}, \quad (48.38)$$

$$\Phi' = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu} r^{\nu}, \quad (48.39)$$

при этом

$$\omega^2 U_0 = l(Y_0 + \varphi_0) \quad (48.40)$$

и два нулевых коэффициента разложения остаются свободными. Рекуррентные соотношения для остальных коэффициентов получаются после подстановки разложений в уравнения и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях r [616]. При этом ненулевыми оказываются только коэффициенты при четных степенях r . Адиабатические радиальные колебания рассмотрены в § 43, п. в. Если в равновесном решении $P/\rho \rightarrow 0$ на поверхности, то внешние граничные условия имеют вид [130]

$$\frac{\delta P}{P} = \left[l(l+1) \frac{Gm}{\omega^2 r^3} - \frac{\omega^2 r^3}{Gm} - 4 \right] \frac{\delta r}{r} + \left[l(l+1) \frac{GM}{\omega^2 r^3} - l - 1 \right] \frac{\Phi'}{gr}, \quad (48.41)$$

$$\frac{d\Phi'}{dr} + (l+1) \frac{\Phi'}{r} = -4\pi G \rho \delta r. \quad (48.42)$$

Из двух свободных коэффициентов (48.40) один произволен в силу произвольности нормировки, поэтому для выполнения граничных условий (48.41), (48.42) значение ω^2 должно равняться собственному значению. В случае изотермической атмосферы короткие волны распространяются до больших радиусов и внешнее граничное условие следует из условия конечности потока акустической энергии при $r \rightarrow \infty$ [342]. Собственные значения системы (48.26) – (48.29) с граничными условиями (48.41), (48.42) действительны в силу самосопряженности соответствующего оператора [616].

в) p -, g - и f -моды. Решение уравнений для возмущений и нахождение собственных значений и собственных функций в простых моделях позволило изучить основные свойства звездных колебаний аналитически и сделать их классификацию. В однородной модели из сжимаемого газа при $n \gg 1$, n – число радиальных узлов собственной функции, две совокупности

собственных частот записываются в виде [130]

$$\omega_{nl}^2 = \frac{GM}{R^3} \left[2\gamma_1 n^2 + \frac{l(l+1)}{2\gamma_1 n^2} \right] \quad (p\text{-моды}), \quad (48.43)$$

$$\omega_{nl}^2 = -\frac{GM}{R^3} \frac{l(l+1)}{2\gamma_1 n^2} \quad (g\text{-моды}).$$

Здесь R — радиус однородной звезды*), связанный с центральным давлением P_c

$$P_c = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 R^2, \quad P = P_c (1 - r^2/R^2). \quad (48.44)$$

Колесательные p -моды связаны с конкуренцией сил давления против сил инерции и гравитации. В пределе большого n они сводятся к стоячим акустическим волнам, а при малых n , $l = 0$ представляют собой радиальные крупномасштабные колебания звезды. Их частота

$$(\omega_{nl}^2)_{p\text{-моды}} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (48.45)$$

как и в акустических модах $\left(\omega = \frac{2\pi c_s}{\lambda} \rightarrow \infty \text{ при } \lambda \rightarrow 0, c_s - \text{скорость звука} \right)$. Собственные функции смещений δr у p -мод медленно растут от нулевых значений в центре, осциллируя при $n \gg 1$, и резко возрастают у поверхности звезды, достигая там максимума.

Квадраты собственных значений g -мод отрицательны в однородной модели, что говорит об их неустойчивости. Эта неустойчивость связана с конвективной неустойчивостью однородной звезды, а сами g -моды отражают конвективные движения в звезде. Их существование связано с конкуренцией сил гравитации против выталкивающих архимедовых сил в веществе при наличии неоднородностей плотности. Частоты g -мод стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, а собственные функции смещений δr быстро нарастают от нулевого значения в центре, а затем медленно спадают (осциллируя при $n \gg 1$) до малого, но конечного значения на поверхности [468]. С ростом l и n максимум амплитуды g -моды становится все ближе к центру, а у p -моды — ближе к поверхности. В адиабатической звезде, нейтральной относительно конвекции, все собственные частоты g мод обращаются в нуль (см. также § 44).

Особый класс колебаний представляют собой f -мода. Это единственный тип колебаний, сохраняющийся в однородной фигуре из несжимаемой жидкости. f — мода связана со стремлением сил гравитации в отсутствие вращения при всех возмущениях вернуть телу сферическую форму. Эта мода отсутствует при $l = 0$ и начинается только с $l = 2$ для несжимаемого тела и с $l = 1$ для сжимаемого. Собственная функция f -моды плавно нарастает от центра до поверхности, не имея нигде резких максимумов.

Радиальные g -моды также отсутствуют ввиду невозможности чисто радиальных конвективных движений. Все радиальные колебания звезды связаны с p -модами. Значение n для f -моды в однородной модели равно

*) Равновесное значение ∇P достигается за счет быстрого падения температуры.

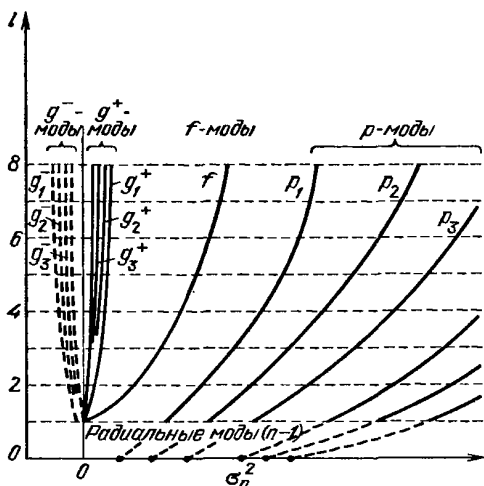


Рис. 131. Собственные значения $\sigma_n^2 = (2\pi/\text{период})^2$ линейных адиабатических нерадиальных колебаний для различных n — число узлов по радиусу, в зависимости от l — номер сферической гармоники (схематично). Показаны четыре типа сфероидальных мод нерадиальных колебаний (p , f , g^+ , g^-) по классификации Т. Каулинга. Точками на оси абсцисс обозначены радиальные колебания, номера p_n мод равны $n - 1$. В конвективно устойчивой звезде с $A < 0$ существуют только g^+ -моды, а у конвективно неустойчивых — только g^- -моды (см. (48.13)), одновременное существование g^+ - и g^- -мод в звезде возможно только, когда в одних частях звезды $A < 0$, а в других $A > 0$ (из [130]).

нулю, а в моделях общего вида — единице. Собственные значения f -моды являются промежуточными между g - и p -модами. Схематически зависимости собственных значений различных мод колебаний от n и l представлены на рис. 131 из [130].

г) Колебательная неустойчивость. Наличие выделения и отвода тепла приводит к тому, что амплитуда колебаний, постоянная в адиабатическом случае, может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от суммарного действия тепловых процессов. Рассмотрим условия затухания или возбуждения колебаний в общем виде, не делая предположения о линейности [215]. Разделим полную энергию звезды $\mathcal{E}$ на энергию колебаний W и статическую энергию звезды U . Для каждого элемента массы dm колебательная энергия определяется, как значение кинетической энергии в момент прохождения состояния колебательного равновесия, а статическая энергия U есть сумма тепловой и гравитационной энергий звезды в этом состоянии. Изменение ΔW величины W за цикл определяет затухание колебаний при $\Delta W < 0$ или их возбуждение при $\Delta W > 0$. По определению имеем

$$\Delta W = \Delta \mathcal{E} - \Delta U. \quad (48.46)$$

Изменение полной энергии звезды есть разность между выделением и отводом тепла за цикл, т.е.

$$\Delta \mathcal{E} = \oint dm \phi \left(\epsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{F} \right) dt. \quad (48.47)$$

Здесь внутренний интеграл берется за один колебательный цикл, а внешний — по всей звезде, $\vec{F}$ — вектор потока тепла (эрг · см⁻²с⁻¹). В сферически-симметричной звезде

$$\vec{F} = \left(\frac{L}{4\pi r^2}, 0, 0 \right), \quad \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F_r) = \frac{1}{4\pi \rho r^2} \frac{dL}{dr} \quad (48.48)$$

За цикл колебаний происходит изменение полной энергии $\mathcal{E}$ по (48.47) и смещение состояния колебательного равновесия, изменяющего U . Пусть состояние колебательного равновесия достигается одновременно по всей звезде, так что нет сдвига фаз. Тогда переход от колебательного состояния I в то же состояние II через один период колебаний можно сделать двумя путями: через цикл колебания и квазистатически через последовательные состояния колебательного равновесия.

При квазистатическом процессе система обладает только статической энергией U , изменение которой равно (при нулевой внешней работе)

$$\Delta U = \int dm \int dt T \frac{dS}{dt}. \quad (48.49)$$

Так как за один цикл изменение положения равновесия считается малым ($\gamma \ll \omega$), соотношение (48.49) запишем в виде

$$\Delta U = \int dm T_e \Delta S, \quad (48.50)$$

где T_e — равновесная температура статической звезды, изменением которой пренебрегаем. При колебательном цикле между теми же состояниями

$$\Delta S = \oint \frac{\epsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F}}{T} dt, \quad (48.51)$$

поэтому из (48.50) получаем

$$\Delta U = \int dm T_e \oint \frac{\epsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F}}{T} dt. \quad (48.52)$$

Подставляя (48.47) и (48.52) в (48.46), получаем

$$\Delta W = \int dm \oint \left(1 - \frac{T_e}{T}\right) \left(\epsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{F}\right) dt \quad (48.53)$$

определяющее поведение колебаний в звезде. Условие (48.53) получено впервые Эддингтоном в 1926 г. [130].

Регулярные колебания блеска наблюдались у многих звезд. Наиболее известны из них классические цефеиды с периодами 1–50 суток и звезды типа RR Лиры с периодами 1,5–24 часа. Цефеиды имеют массы 4–14 $M_\odot$, светимости 300–26000 $L_\odot$ и радиусы 14–200 $R_\odot$. Звезды типа RR Лиры имеют меньшие значения массы, радиуса и светимости. Оба этих типа переменных звезд находятся на стадиях эволюции после главной последовательности и выгорания водорода в ядре звезды. Механизм возбуждения радиальных колебаний у этих звезд связан с зонами неполной ионизации гелия и в меньшей степени водорода, в которых непрозрачность увеличивается с ростом температуры [648]. Нерадиальные p -моды колебаний с периодом, близким к пяти минутам, наблюдались на Солнце [321a].

§ 49. Колебания звезд с фазовым переходом

Вещество нейтронных звезд при плотностях, близких к ядерным, может быть неустойчивым относительно рождения π -мезонов [158]. Это явление, называемое π -конденсацией, приводит к зависимости $P(\rho)$ ван-дер-ваальсовского типа, что соответствует фазовому переходу. Другим примером фазового перехода является нейтронизация. Рассмотрим колебания звезд при наличии фазового перехода в приближении несжимаемой жидкости [57]. Будем рассматривать устойчивые звезды на растущем участке кривой $M(P_c)$ (см. § 40). Здесь P_c удобно использовать в качестве переменной вместо ρ_c ввиду его непрерывности при скачкообразном изменении ρ_c .

а) Уравнения движения при наличии фазового перехода. Пусть вещество является несжимаемым везде, за исключением фазового перехода, т.е.

$$\rho = \rho_1 \quad \text{при } P < P_0, \quad \rho = \rho_2 \quad \text{при } P > P_0. \quad (49.1)$$

Из уравнения неразрывности (27.2) имеем

$$u = u_1(t) \left(\frac{r_2(t)}{r} \right)^2 \quad \text{при } r > r_2, \quad u = 0 \quad \text{при } r < r_2. \quad (49.2)$$

Здесь $r_2(t)$ — радиус ядра новой фазы, более плотной, вещество которой покоится. Подставляя (49.2) в уравнение движения (27.3) и интегрируя по радиусу r от r_2 до R (радиус звезды), получаем [158, 57]

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 r_2^2 + 2u_1 r_2 \dot{r}_2 - \frac{1}{2} u_1^2 r_2^4 \frac{R^3 + R^2 r_2 + R r_2^2 + r_2^3}{R^3 r_2^3} - \\ - \frac{P_1}{\rho_1} \frac{R r_2}{R - r_2} + \frac{4\pi G}{3} \left[(\rho_2 - \rho_1) r_2^3 + \frac{\rho_1}{2} R r_2 (R + r_2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (49.3)$$

Для сведения уравнения (49.3) к одной функции, подлежащей нахождению, рассмотрим условия на границе разрыва при $r = r_2$. Из непрерывности потоков массы, импульса, энергии на скачке, аналогичных условиям на фронте ударной волны [142], получаем

$$\begin{aligned} u_1 = -(\lambda - 1) \dot{r}_2, \quad \lambda = \rho_2 / \rho_1, \quad P_2 - P_1 = \rho_2 (\lambda - 1) \dot{r}_2^2 \\ E_2 - E_1 = \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2 \dot{r}_2^2 + \frac{P_1}{\rho_2} (\lambda - 1). \end{aligned} \quad (49.4)$$

Здесь P_1, E_1 — давление и удельная энергия на внутренней границе старой фазы, а P_2, E_2 — на границе ядра новой фазы. При адиабатическом сжатии

$$(E_2 - E_1)_{\text{ад}} = \frac{P_0}{\rho_2} (\lambda - 1). \quad (49.5)$$

Очевидно, что $P_1 \leq P_0$, а $P_2 \geq P_0$. Если ввести параметр δ так, что

$$\begin{aligned} P_2 = P_0 + \frac{1 + \delta}{2} \rho_2 (\lambda - 1) \dot{r}_2^2, \\ P_1 = P_0 - \frac{1 - \delta}{2} \rho_2 (\lambda - 1) \dot{r}_2^2, \quad -1 \leq \delta \leq 1, \end{aligned} \quad (49.6)$$

то выделение тепла на фазовом скачке при сжатии равно

$$q = E_2 - E_1 - (E_2 - E_1)_{\text{ад}} = \frac{\delta}{2} (\lambda - 1)^2 \dot{r}_2^2, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad (49.7)$$

а при расширении

$$q = E_1 - E_2 - (E_1 - E_2)_{\text{ад}} = -\frac{\delta}{2} (\lambda - 1)^2 \dot{r}_2^2, \quad -1 \leq \delta \leq 0. \quad (49.7a)$$

Ограничения на величину δ в (49.7) следуют из условия неубывания энтропии на фазовом скачке. Учитывая (49.4)–(49.7) в (49.5), получим уравнение для изменения радиуса ядра

$$\begin{aligned} \ddot{r}_2 + \frac{\dot{r}_2^2}{2r_2} \left\{ 3 + \delta\lambda + \frac{r_2}{R} \left[\lambda \frac{\delta - r_2^3/R^3}{1 - r_2/R} - 1 - \frac{r_2}{R} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] \right\} - \frac{2\pi G\rho_1}{3r_2(1 - r_2/R)(\lambda - 1)} \left[R^2 + (2\lambda - 3)r_2^2 - 2(\lambda - 1)\frac{r_2^3}{R} \right] + \\ + \frac{P_0}{\rho_1 r_2 (\lambda - 1) \left(1 - \frac{r_2}{R} \right)} = 0. \end{aligned} \quad (49.8)$$

Если вместо P_0 использовать равновесные значения радиуса R_0 и радиуса ядра $r_{2,0}$ звезды с массой M_0

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} [\rho_1 R_0^3 + (\rho_2 - \rho_1)r_{2,0}^3] = \frac{4\pi}{3} [\rho_1 R^3 + (\rho_2 - \rho_1)r_2^3], \quad (49.9)$$

$$\frac{P_0}{\rho_1} = \frac{2\pi G\rho_1}{3} \left[R_0^2 + (2\lambda - 3)r_{2,0}^2 - 2(\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^3}{R_0} \right], \quad (49.10)$$

то уравнение (49.8) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{r}_2 + \frac{\dot{r}_2^2}{2r_2} \left\{ 3 + \delta\lambda + \frac{r_2}{R} \left[\lambda \frac{\delta - r_2^3/R^3}{1 - r_2/R} - 1 - \frac{r_2}{R} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] \right\} + \\ + \frac{2\pi G\rho_1}{3r_2 \left(1 - \frac{r_2}{R} \right)} \left\{ \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} (r_{2,0}^2 - r_2^2) - \frac{r_{2,0}^3 - r_2^3}{R(R^2 + RR_0 + R_0^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[3R^2 + 3RR_0 + 2R_0^2 + 2(\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^3}{R_0} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (49.11)$$

Уравнение (49.11) справедливо для колебаний произвольной амплитуды. Для колебаний звезды с малой амплитудой $|r_2 - r_{2,0}| \ll r_2$, $|R - R_0| \ll r_2$, пренебрегая квадратичными по амплитуде членами в (49.11), имеем

$$\ddot{r}_2 + \frac{4\pi G\rho_1(r_{2,0} - r_2)}{3 \left(1 - \frac{r_{2,0}}{R_0} \right)} \left[\frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} - 4\frac{r_{2,0}}{R_0} - (\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^4}{R_0^4} \right] = 0, \quad (49.12)$$

что при $\omega^2 > 0$ соответствует гармоническим колебаниям с частотой

$$\omega^2 = \frac{4\pi G \rho_1}{3 \left(1 - \frac{r_{2,0}}{R_0}\right)} \left[4 \frac{r_{2,0}}{R_0} + (\lambda - 1) \frac{r_{2,0}^4}{R_0^4} - \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} \right]. \quad (49.12a)$$

Очевидно, что при $\lambda > 3/2$ колебания возможны только у звезды с конечным ядром [193]. Для звезды с малым ядром $r_{2,0} \ll R_0$ частота малых колебаний есть

$$\omega_0 = \left[\frac{4\pi G \rho_1}{3} \frac{3 - 2\lambda}{\lambda - 1} \right]^{1/2}. \quad (49.13)$$

Если фазовый переход происходит в оболочке $r_{2,0} \approx R_0$, то

$$\omega^2 = \frac{4\pi G \rho_1}{3} \frac{\lambda^2}{\lambda - 1} \frac{1}{1 - r_{2,0}/R_0}. \quad (49.14)$$

Нелинейные колебания звезды с малым ядром ($|r_2 - r_{2,0}| \sim r_{2,0}$, $r_{2,0} \ll R_0$) описываются уравнением

$$\ddot{r}_2 + \frac{\dot{r}_2^2}{2r_2} (3 + \delta\lambda) + \frac{\omega_0^2}{2r_2} (r_2^2 - r_{2,0}^2) = 0. \quad (49.15)$$

При $\delta = 1$ и $r_{2,0} = 0$ получается уравнение, рассмотренное в [158].

б) Физические процессы на фазовом скачке. В [487] рассматривались нелинейные затухающие колебания и предполагалось, что на стадии сжатия $\delta = 1$, а на стадии расширения также имеет место диссипация и $\delta = -1$. Чтобы обосновать выбор величины δ , рассмотрим фазовый переход, как предельный случай уравнения состояния, в котором давление меняется от P_a до P_b при изменении ρ от ρ_1 до ρ_2 . При $P_b \rightarrow P_0 \leftarrow P_a$ и неизменных ρ_1 и ρ_2 получаем фазовый переход.

В веществе промежуточного слоя скорость звука есть $a_s \approx [(P_b - P_a)/(\rho_2 - \rho_1)]^{1/2}$. Если амплитуды колебаний столь малы, что скорость движения $v < a_s$, то колебания будут адиабатическими с условием на скачке $\delta = 0$. В пределе $P_b \rightarrow P_0 \leftarrow P_a$ имеем $a_s \rightarrow 0$, т.е. всегда наступит $v > a_s$ и движение в переходном слое станет сверхзвуковым. Столкновение потока сверхзвуковой скорости со стенкой в виде ядра новой фазы приведет к формированию ударной волны, в которой кинетическая энергия переходит в тепло. Очевидно, что "фазовая диссипация" кинетической энергии в процессе сжатия звезды и роста ядра новой фазы имеет ту же природу, что и в ударной волне. В пределе при $P_b \rightarrow P_0 \leftarrow P_a$ величина δ в условии на скачке (49.6) может приближаться к единице, но пока $v < a_s$ имеет место $\delta = 0$.

Иным образом происходит стадия расширения звезды, сопровождающаяся уменьшением ядра новой фазы. В этом случае даже в идеально тонком фазовом скачке при сверхзвуковой скорости движения ударный фронт может не возникнуть ввиду отсутствия препятствия для движущейся наружу оболочки. Давление на границе ядра становится больше P_0 ввиду силы реакции при расширении оболочки. Таким образом, фаза расширения мо-

жет всегда остаться адиабатической с $\delta = 0$. Затухание колебаний звезды с фазовым переходом в этом случае происходит только на стадии сжатия звезды, а в случае неидеального, слегка размазанного скачка возможны строго адиабатические колебания малой, но конечной амплитуды.

в) Адиабатические колебания конечной амплитуды. В отсутствие затухания при $\delta = 0$ сохраняется полная энергия колеблющейся звезды, соответствующая первому интегралу уравнения (49.8)

$$E = 2\pi\rho_1(\lambda - 1)^2 \dot{r}_2^2 r_2^3 \left(1 - \frac{r_2}{R}\right) + \frac{4\pi}{3} r_2^3 P_0 (\lambda - 1) - \frac{16\pi^2 G \rho_1^2 R^5}{15} \left[1 + \frac{5}{2} (\lambda - 1) \frac{r_2^3}{R^3} + (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \frac{r_2^5}{R^5} \right]. \quad (49.16)$$

Из (49.16), используя (49.9), получим решение и формулу для периода колебаний в нелинейном случае. Во избежание излишне громоздких выражений рассмотрим нелинейные колебания звезды с малым ядром $r_2/R \ll 1$, для которого уравнение (49.16) с учетом (49.10), (49.13) примет вид

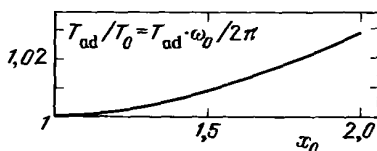
$$\dot{x}^2 = \omega_0^2 \left(\frac{x^{-3} - x^2}{5} - x_0^2 \frac{x^{-3} - 1}{3} \right). \quad (49.17)$$

Здесь $x = r_2/r_{2,\min}$, $x_0 = r_{2,0}/r_{2,\min}$ и учтено начальное условие $r_2 = r_{2,\min}$ при $\dot{r}_2 = 0$; $r_{2,\min}$ — минимальный радиус ядра. Период нелинейных адиабатических колебаний в случае малого ядра равен

$$T_{\text{ад}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{x_*} \left[\frac{x^{-3} - x^2}{5} - x_0^2 \frac{x^{-3} - 1}{3} \right]^{-1/2} dx. \quad (49.18)$$

Здесь $x_* > x_0 > 1$ соответствует максимальному радиусу ядра $x_* = r_{2,\max}/r_{2,\min}$ и является корнем знаменателя в (49.18). Зависимость

Рис. 132. Зависимость периода нелинейных адиабатических колебаний звезды с фазовым переходом $T_{\text{ад}}$ от амплитуды в случае малого ядра. По оси абсцисс отложены значения $x_0 = r_{2,0}/r_{2,\min}$ отношение равновесного радиуса ядра $r_{2,0}$ к минимальному $r_{2,\min}$, по оси ординат $T_{\text{ад}}/T_0 = T_{\text{ад}}\omega_0/2\pi$, где T_0 и ω_0 — период и частота малых гармонических колебаний



$T_{\text{ад}}\omega_0/2\pi$ от x_0 приведена на рис. 132. Колебания малой амплитуды $x = 1 + \alpha$, $x_0 = 1 + \Delta$, $\alpha, \Delta \ll 1$ являются гармоническими и из (49.18) следует

$$T_0 = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\alpha_{\max} = 2\Delta} (2\Delta\alpha - \alpha^2)^{-1/2} d\alpha = 2\pi/\omega_0$$

в соответствии с (49.13).

Оценим величину максимальной амплитуды адиабатических колебаний при пионизации, связанную с конечным давлением электронов. Для двух

случаев, рассмотренных в [487], получаем из (49.12а):

$$\begin{aligned} 1) \lambda = 5, \quad r_2/R = 0,518, \quad \omega = 0,648\omega_{00}; \\ 2) \lambda = 1, 2, \quad r_2/R = 0,295, \quad \omega = 1,4\omega_{00}, \quad \omega_{00} = \sqrt{4\pi G\rho_1}. \end{aligned} \quad (49.19)$$

Максимальная скорость движения вещества оболочки относительно скачка $v = \lambda \dot{r}_2 = \lambda \omega r_2 \eta$, где η — относительная амплитуда колебаний радиуса ядра. Скорость звука в области фазового перехода $a_s \sim (P_e/\rho)^{1/2}$, где P_e — давление электронов. При $\rho = 2 \cdot 10^{14}$ г·см⁻³, $P_e = 10^{30}$ дин, $R = 10$ км условие $v < a_s$ даст $\eta \leq 0,003$ и $\eta \leq 0,01$ соответственно.

г) **Затухающие колебания конечной амплитуды.** При достаточно большой амплитуде колебаний или в случае идеального фазового перехода при $P = P_0$, т.е. $a_s = 0$, стадия сжатия сопровождается затуханием колебаний и $\delta > 0$. На стадии расширения звезды (уменьшение ядра) затухание отсутствует, поэтому примем там $\delta = 0$, в отличие от [487]. Интеграл уравнения (49.15), аналогичный (49.17) при $\delta = \text{const} \neq 0$ примет вид

$$\dot{x}^2 = \omega_0^2 \left[\frac{x^{-3-\delta\lambda} - x^2}{5 + \delta\lambda} - x_0^2 \frac{x^{-3-\delta\lambda} - 1}{3 + \delta\lambda} \right]. \quad (49.20)$$

Если в начальном состоянии минимальный радиус ядра равен $r_{2,\min}^{(0)}$ и $\dot{r}_2 = 0$, то через время T , равное

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \int_1^{x_*} \left[\frac{x^{-3-\delta\lambda} - x^2}{5 + \delta\lambda} - x_0^2 \frac{x^{-3-\delta\lambda} - 1}{3 + \delta\lambda} \right]^{-1/2} dx + \right. \\ \left. + \int_{x_{**}}^1 \left[\frac{x^{-3} - x^2}{5} - \frac{x_0^2}{x_*^2} \frac{x^{-3} - 1}{3} \right]^{-1/2} dx \right\} \end{aligned} \quad (49.21)$$

минимальный радиус ядра станет равным $r_{2,\min}^{(1)} > r_{2,\min}^{(0)}$. Здесь первый

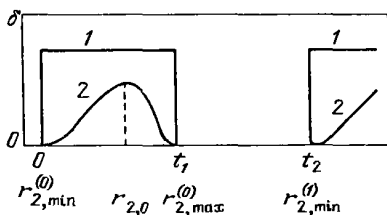


Рис. 133. Качественный вид изменения параметра δ (см. формулы (49.6), (49.7)) во время пульсаций: 1 — для идеального фазового перехода, 2 — для размазанного

интеграл соответствует сжатию звезды (увеличению ядра), а второй — расширению звезды. Величина $x_* > 1$ является корнем знаменателя в первом, а $x_{**} < 1$ — во втором интеграле соотношения (49.21). Здесь

$$x_0 = r_{2,0}/r_{2,\min}^{(0)}, \quad x_* = r_{2,\max}/r_{2,\min}^{(0)}, \quad x_{**} = r_{2,\min}^{(1)}/r_{2,\max}.$$

Отсюда

$$r_{2,\min}^{(1)} = r_{2,\min}^{(0)} x_* x_{**}, \quad \text{где } x_* x_{**} > 1$$

в силу затухания колебаний. Сделаем в (49.21) разложение, считая в первом интеграле $x = 1 + \alpha$, $x_0 = 1 + \Delta$, а втором $x = 1 - \beta$; $\alpha, \beta, \Delta \ll 1$, остав-

для члены $\sim \alpha^3, \beta^3, \Delta^3$ для учета затухания в первом не исчезающем члене. В результате элементарных выкладок получаем

$$\begin{aligned}x_* &= 1 + 2\Delta - \frac{5}{3}\Delta^2 - \frac{2}{3}\delta\Delta^2\lambda, \\x_{**} &= 1 - 2\Delta + \frac{17}{3}\Delta^2 + \frac{4}{3}\delta\Delta^2\lambda, \\ \frac{r_{2,\min}^{(1)}}{r_{2,\min}^{(0)}} &= 1 + \frac{2}{3}\delta\Delta^2\lambda.\end{aligned}\quad (49.22)$$

С учетом того, что $\Delta = \frac{r_{2,0}}{r_{2,\min}} - 1$, и третьего соотношения (49.22), получим уравнение для изменения $r_{2,\min}$, приняв период равным $2\pi/\omega_0$:

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\frac{\delta\omega_0\lambda}{3\pi}\Delta^2 \quad (49.23)$$

В случае начального условия $\Delta = \Delta_0$ при $t = 0$ имеем

$$\frac{\Delta_0 - \Delta}{\Delta\Delta_0} = \frac{\delta\omega_0\lambda}{3\pi}t. \quad (49.24)$$

В идеальном фазовом переходе на всей фазе сжатия естественно принять $\delta = \text{const} > 0$ (возможно, $\delta = 1$, как принято в [158, 487]). В случае размазанного перехода δ переменен, ввиду изменения отношения v/a_s в процессе движения, и плавно обращается в нуль вблизи начала и конца фазы сжатия. Качественная зависимость $\delta(t)$ вдоль периода колебаний показана на рис. 133. В реальных объектах скорости фазовых превращений конечны и всегда действует механизм второй вязкости, количественные оценки для которого нужно делать отдельно для каждого типа фазового перехода.

§ 50. Колебательная устойчивость массивных звезд

В настоящее время точно не известна верхняя граница массы звезд в Галактике. Начиная с работы Леду 1941 г. было сделано несколько исследований устойчивости массивных звезд относительно раскачки колебаний на основной радиальной моде [568, 602, 603, 649, 251, 252, 539, 540] в связи с попыткой теоретического определения максимально возможной массы звезды. С ростом массы увеличивается роль лучистого давления и средний показатель адиабаты γ_1 приближается к $4/3$. Ввиду того что адиабатическая звезда с $\gamma_1 = 4/3$ нейтральна относительно расширения или сжатия (см. § 34), влияние дестабилизирующих факторов возрастает с ростом массы из-за уменьшения запаса колебательной устойчивости.

Исследование данной проблемы в линейном приближении [568] показало, что в звездах с $M > 65 M_\odot$ неустойчивость относительно раскачки колебаний быстро развивается и звезда может разрушиться. Последующие расчеты обнаружили сильную стабилизацию этих колебаний в нелинейном режиме.

Равновесные модели и их пульсационные свойства (из [568])

$M/M_{\odot}$	$L/L_{\odot}$	$R/R_{\odot}$	T_{ef}, K	$\tau, 10^6 \text{ лет}$	$P, \text{сут}$	$1/K, \text{годы}$
218,3	4,36 (6)	20,5	5,82 (4)	0	0,546	930
121,1	1,80 (6)	14,3	5,58 (4)	0	0,383	1800
62,7	5,77 (5)	9,71	5,09 (4)	0	0,260	44 000
28,2	1,08 (5)	6,00	4,27 (4)	0	0,157	1400
121,1	2,21 (6)	18,75	5,13 (4)	1,39	0,502	-2200
62,7	7,93 (5)	13,3	4,72 (4)	2,08	0,356	-94
62,7	1.09 (6)	27,6	3,55 (4)	3,68	0,833	-3

а) Линейный анализ. В работе [568] рассматривались звезды с массами 28,2, 62,7, 121,1 и 218,3 $M_{\odot}$ с начальным химическим составом $x_{\text{H}} = 0,75$, $x_{\text{He}} = 0,22$. Равновесные модели строились методом Шварцшильда (§ 22, п. а)). Вычисление периода радиальных пульсаций проводилось с помощью решения уравнения (43.26) с граничным условием (43.29), (43.31). Непрозрачность определялась электронным рассеянием (см. § 7), уравнение состояния — суммой давления полностью ионизованного газа и излучения (1.2), для которого γ_1 дано в (1.20). Характеристики равновесных моделей: массы M , светимости L , эффективные температуры T_{ef} , возрасты τ , периоды радиальных пульсаций P в линейном приближении на основной моде даны в табл. 56 из [568].

Так как характерные времена жизни конвективных элементов на границе конвективного ядра много больше периода колебаний P , влиянием конвекции на устойчивость пренебрегалось. Длина перемешивания предполагалась равной двум характернымшкалам высот по давлению, $\alpha = 2$ в (10.22).

Пульсационная устойчивость при учете изменения светимости, тепловыделения в ядре, генерации акустических волн проверялась методом, аналогичным § 48, п. г. Вычислялась величина

$$K = \frac{1}{2} \frac{L_p}{E_p}, \quad L_p = L_{pN} - L_{pH} - L_{ps}, \quad (50.1)$$

где

$$E_p = \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \int_0^M (\delta r)^2 dm \quad - \quad (50.2)$$

кинетическая энергия пульсаций,

$$L_{pN} = \int_0^M \delta \epsilon \frac{\delta T}{T} dm \quad - \quad (50.3)$$

скорость роста энергии пульсаций за счет ядерных реакций со скоростью

выделения энергии ϵ ,

$$L_{pH} = \int_0^M \frac{d(\delta L)}{dm} \frac{\delta T}{T} dm - \quad (50.4)$$

скорость потери энергии пульсаций за счет излучения с поверхности,

$$L_{ps} = 4\pi R^2 \left[\frac{1}{2} \rho_R \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \left(\frac{\delta r}{r} \right)_R^2 \right] \sqrt{\frac{kT_R}{\mu m_u}} - \quad (50.5)$$

скорость потери энергии пульсаций за счет генерации акустических волн. Здесь индекс "R" относится к поверхности звезды. Член в квадратных скобках есть плотность энергии звуковых колебаний у фотосферы. Параметры фотосферы приближенно определялись из соотношений (см. точнее (22.11) – (22.18))

$$\begin{aligned} T_R &= T_{ef}, & k_R \frac{P_R}{g_R} &= 2/3, & k_R &= 0,19 (1 + x_H), \\ g_R &= \frac{GM}{R^2}, & P_R &= \frac{aT_R^4}{3} + \frac{kT_{ef}}{\mu m_u} \rho_R. \end{aligned} \quad (50.6)$$

При положительном K звезда пульсационно неустойчива, при этом K равно обратному времени увеличения энергии пульсаций в e раз. Отрицательные K означают пульсационную устойчивость и $|K|$ есть тогда обратное время затухания колебаний. Условие устойчивости (50.1) при отсутствии последнего члена L_{ps} из (50.5) следует из (48.53), если задаться там малыми синусоидальными колебаниями всех величин и проинтегрировать по периоду пульсаций. Значения δr , δT , δL в (50.2) – (50.5) имеют смысл амплитуд пульсаций.

Результаты исследования устойчивости представлены в последнем столбце табл. 56, откуда видно, что в процессе эволюции звезда может восстановить свою устойчивость. На главной последовательности устойчивыми оказываются звезды с массами $M \leq 60 M_\odot = M_{c0}$. Согласно [568] эта величина зависит от химического состава, так что

$$\mu^2 \frac{M_{c0}}{M_\odot} = \text{const} \approx 20, \quad \mu \text{ определяется из (1.7)}. \quad (50.7)$$

В [649] проведено специальное исследование зависимости M_{c0} от химического состава. Описание конвекции и, что важнее, непрозрачности отличалось от [568] и значения M_{c0} оказались выше при тех же составах. Для построения равновесных моделей в [649] использовался метод Хенни (см. § 22, п. 6). Значения $\mu^2 M_{c0}/M_\odot$ сохранялись примерно постоянными (≈ 34) при изменении x_{He} от 0,28 до 0,4 при том же содержании тяжелых элементов $x_Z = 0,02$. Изменение x_Z и входящего в него x_{CNO} приводит к тому, что $\mu^2 M_{c0}/M_\odot = 58$ для $x_{He} = 0,384$, $x_Z = 0,1$, $x_{CNO} = 0,06$. Значение $M_{c0} = 127 M_\odot$ получается для $x_{He} = 0,184$, $x_Z = 0,0201$, $x_{CNO} = 0,012$.

Если нормировать амплитуду пульсаций, приняв $\left. \frac{\delta r}{r} \right|_R = 1$, то результаты расчетов [568] можно представить в виде интерполяционных формул

$$\frac{L_p}{L} = 0,10 \left(\frac{M}{M_\odot} - 1 \right) - 2 \frac{\tau}{10^6}, \quad (50.8)$$

$$\frac{E_p}{L} = 3750 \text{ лет} \cdot \exp \left[-0,007 \left(\frac{M}{M_\odot} - 60 \right) - 1,2 \frac{\tau}{10^6} \right],$$

где τ — время эволюции в годах. Величина K , определяемая из (50.8), не зависит от нормировки. Из (50.8) следует, что через время τ_{cr} , при котором K обращается в нуль —

$$\tau_{\text{cr}} = 0,05 \left(\frac{M}{M_\odot} - 60 \right) \cdot 10^6 \text{ лет} \quad (50.9)$$

звезда станет пульсационно устойчивой. Величину τ_{cr} следует сравнить с $1/K$ из табл. 56. Устойчивость успевает восстановиться, если за время τ_{cr} энергия колебаний вырастет не очень значительно. Величина

$$N(\tau) = \int_0^\tau K d\tau \quad (50.10)$$

имеет смысл числа, стоящего в экспоненте, которая задает рост энергии пульсаций. Если принять, что устойчивость восстановится при $N(\tau_{\text{cr}}) \leq 9$, то массу устойчивых звезд можно оценить в $M_{\text{cr}} = 65 M_\odot$. Из расчетов [568] получено, что $N = 5,7$ для $M = 64 M_\odot$ и $N = 13,7$ для $M = 66 M_\odot$.

В [568] отмечено, что полученная таким образом величина M_{cr} оказывается существенно меньше наблюдаемой массы некоторых звезд, достигающей $\sim 95 M_\odot$ (например, звезда $\xi^1 \text{ Scorpi}$). Для устранения этого противоречия в [568] предполагается, что в звездах с массами $65 - 95 M_\odot$ развитие пульсационной неустойчивости приведет не к полному развалу звезды, а к интенсивному истечению вещества с поверхности, приводя к появлению звезд со спектрами типа Р Суг, наблюдаемых у очень массивных звезд*). В [568] сделано также предположение, что с ростом амплитуды пульсаций появляется нелинейная стабилизация колебаний, ведущая к ограничению их амплитуды конечной величиной задолго до разрушения звезды. Потеря массы звездой может осуществляться в состоянии квазистационарных колебаний с конечной амплитудой.

б) **Нелинейные колебания.** Для исследования нелинейных колебаний массивных звезд в [649] использовались уравнения гидродинамики (35.1)

*) Спектр звезды относят к типу Р Суг, если она имеет линии с поглощением у фиолетового конца и эмиссий, приблизительно симметричных относительно центральных частот. Они характерны для звезд с мощным истечением. Характерным представителем является звезда Р Суг [197].

с уравнением энергии в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial(r/\rho)}{\partial t} = F \left(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial m} \right). \quad (50.11)$$

Ввиду того что период пульсаций (P) много меньше времени роста в e раз их амплитуды ($\sim 1/K$), необходимо искусственно сблизить эти времена для возможности численного исследования роста амплитуды в нелинейном режиме. Эту роль выполняет множитель F в (50.11). Он выбирается примерно равным отношению $(PK)^{-1}$. Введение его эффективно уменьшает теплоемкость вещества звезды и, соответственно, увеличивает инкремент тепловой неустойчивости. Расчеты нелинейных пульсаций звезды с массой $100 M_{\odot}$, $x_{He} = 0,384$, $x_Z = 0,20$, неустойчивой в линейном приближении, проводились для $F = 4,133 \cdot 10^5$. Получено, что за примерно десять периодов поверхностная амплитуда пульсаций $\delta r/r$ выросла от 0,1 до 4. При этой амплитуде колебания застabilizировались. В процессе роста амплитуды и на стадии нелинейных колебаний с постоянной амплитудой потери массы получено не было. Относительная амплитуда колебаний в нелинейном режиме быстро падает вглубь звезды. В [649] отмечено, что при учете уноса энергии за счет образования ударных волн в атмосфере звезды амплитуда нелинейных колебаний может быть существенно меньше. Вычисления с большим F сильно занижают диссипацию энергии колебаний ударными волнами.

В работах [602, 603] для исследования нелинейных пульсаций также использовалось уравнение энергии в виде (50.11) с большим F , но в дополнение к этому исследовалась зависимость стационарной амплитуды от F при более реалистическом учете диссипации энергии колебаний ударными волнами. Расчеты были проделаны для звезд с массами 100, 1000, 10 000 $M_{\odot}$. Получено, что во всех случаях устанавливается стационарное колебательное состояние конечной амплитуды типа предельного цикла, причем амплитуда падает с уменьшением F . Это связано с увеличением роли диссипации ударными волнами. Для реального случая $F = 1$ оценка амплитуды пульсаций была сделана в [603] по критерию (48.53), в котором изменение параметров по нелинейному циклу приближенно задавалось на основе численных расчетов. Учитывалась также диссипация за счет образования ударных волн в атмосфере. Стационарная амплитуда пульсаций при $F = 1$ на поверхности составила $\delta r/r|_R = 0,085, 0,102, 0,09$ для $M = 100, 1000, 10\,000 M_{\odot}$ соответственно. Результаты численных расчетов, сделанных в [603] указывают на то, что радикальные моды более высокого порядка всегда затухают.

Методика счета, примененная в [602, 603, 649] не позволила определить темп потери массы на стадии нелинейных пульсаций, а получить лишь верхний предел $\dot{M} < 0,03 M_{\odot}/\text{год}$. Исследование нелинейных колебаний другим методом, позволяющим учитывать слабую потерю массы, сделано в [251, 252]. Вместо использования коэффициента F в (5.11), для ускорения счета применялось искусственное увеличение энергии колебаний на каждом шагу по времени путем умножения скорости $v(m, t)$ на множитель немного больше единицы. Для контроля проводился подсчет изменения истинной энергии колебаний за каждый период по формуле, аналогич-

ной (48.53). Физические свойства вещества в этих работах брались, как в [568] и значения M_{c0} в этих работах почти совпадают. Исследование колебаний звезд с массами от 60 до $600 M_{\odot}$ показало, что при $M < 100 M_{\odot}$ колебания звезд практически не приводят к потере массы. Звезды с массами $M = 100 - 200 M_{\odot}$ теряют массу в процессе колебаний, но за время жизни на главной последовательности эта потеря не очень существенна ($\leq 3 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{год}$). Если же масса звезды превышает $300 M_{\odot}$, то существенная часть массы звезды теряется на стадии водородного горения.

В последующих работах [539, 540] как в аналитических, так и в численных расчетах была получена генерация из-за неустойчивости нескольких радиальных мод колебаний, что приводит к изрезанности кривой предельного цикла $u(t)$. В то же время у звезд с массами от 70 до $210 M_{\odot}$ на стадии нелинейных пульсаций не было получено истечения вещества с поверхности. В [540] отмечается, что отсутствие возбуждения гармоник в работах [568, 603], возможно, связано с выбором слишком большого значения F при численных расчетах. Истечения вещества в [540] получено не было. Возможно, что, как и в [603], отсутствие истечения связано с грубостью пространственной сетки у поверхности звезды.

§ 51. О переменных звездах

Наблюдения показывают, что все звезды в большей или меньшей степени меняют свой блеск, т. е. являются переменными. Открытие солнечных пульсаций в области периодов ~ 5 мин привели к рождению новой области астрофизики — гелиосейсмологии. К настоящему времени наблюдалось более тысячи частот собственных колебаний Солнца, измеренных с точностью до четвертого-пятого знака [83а]. Этим колебаниям соответствуют небольшие амплитуды переменности блеска $\Delta m = 10^{-5} \div 10^{-6}$ и они относятся к высоким акустическим P -модам с $n = 11 \div 33$ и различными значениями l , меняющимися от нуля до нескольких сотен. По m наиболее благоприятны для наблюдений значения $m = 0, \pm 1$.

Экспериментальные значения собственных частот сопоставляются с теоретическими, которые в области больших n , l представимы в виде [83а]

$$\frac{\omega_{nl}}{2\pi} \approx \left(n + \frac{l}{2} + \epsilon_p\right) \Delta\nu - \frac{l(l+1) + \delta_p}{n + \frac{l}{2} + \epsilon_p} A_p \Delta\nu, \quad (50.12)$$

где

$$\Delta\nu = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c_s}\right)^{-1}, \quad \epsilon_p, \quad \delta_p, \quad A_p - \quad (50.13)$$

константы, чувствительные к строению Солнца.

В первом приближении частоты колебаний с одинаковыми $n + l/2$ совпадают. При фиксированном l частоты эквидистантны по n с интервалом $\Delta\nu$. Отклонение от такого вырождения описывается вторым членом

$$\delta \nu_{nl} = \nu_{nl} - \nu_{n-1, l+2} \approx \frac{2(2l+3)}{n + \frac{l}{2} + \epsilon_p} A_p \Delta \nu. \quad (50.14)$$

Определение из наблюдений "большого" $\Delta \nu$ и "малого" $\delta \nu_{nl}$ расщеплений дает уникальную информацию о внутреннем строении Солнца, которое в принципе восстанавливается с помощью решения обратной задачи. Расщепление частот по m связано с вращением Солнца и его магнитным полем. К настоящему времени сделаны лишь первые шаги в решении такой обратной задачи [83а].

Помимо Солнца, звезд-цефеид и звезд типа RR Лиры, пульсации наблюдаются у белых карликов (типа ZZ Кита) с периодами $P = 200 \div 1000$ с, переменных типа δ Щита ($P = 1 \div 3$ ч), ярких голубых звезд типа β Цефея ($P = 4 \div 6$ ч), звезд типа W Девы ($P = 2 \div 45$ сут), примыкающих к цефеидам, и RV Тельца ($P = 20 \div 150$ сут) [130]. Звезды типа δ Щита, или карликовые цефеиды, относятся примерно к тому же спектральному классу, что и звезды типа RR Лиры (A2 – F3), но слабее последних на $2 \div 3^m$ ($M_V, \delta \text{ Щита} \approx 2 \div 3^m$). Амплитуды их колебаний $0,01 \div 0,1^m$, а механизм возбуждения связан с зонами неполной ионизации, как у цефеид или звезд типа RR Лиры. Механизмы возбуждения колебаний голубых гигантов спектрального класса B1 $\div$ B2 вблизи главной последовательности типа β Цефея, имеющих массы $10 \div 20 M_\odot$ и светимости $\sim 10^3 L_\odot$, остаются неясными [155].

Наряду с регулярно пульсирующими звездами имеются различные типы звезд, показывающие нерегулярную переменность. Наиболее многочисленными являются красные вспыхивающие звезды малой массы типа UV Кита [197]. Источником переменности у них, а также у более массивных молодых звезд типа Т Тельца (см. гл. 8) является мощная конвекция в оболочке. Нерегулярные переменности с характерными временами $100 \div 700$ суток наблюдаются у красных гигантов, называемых миридами (по звезде Мира Кита). Мириды теряют массу со скоростью $10^{-6} \div 10^{-4} M_\odot/\text{год}$; истечение связывается с прохождением ударных волн в оболочках этих звезд [200, 208]. Явления нерегулярности, связанные с непостоянством кривых блеска, наблюдаются и у звезд типа RV Тельца, являющихся гигантами, несколько менее красными, чем мириды, в которых начинают проявляться эффекты ударных волн. Нерегулярные переменности, наблюдаемые у некоторых типов звезд, видимо, являются проявлениями таких неустойчивостей, которые способны привести к частичной хаотизации поведения звезды как динамической системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Принятые сокращения

АЖ – Астрономический журнал
ПАЖ – Письма в астрономический журнал
АФ – Астрофизика
НИ – Научные информации Астрономического Совета АН СССР
УФН – Успехи физических наук
ЖЭТФ – Журнал экспериментальной и теоретической физики
ПМТФ – Журнал прикладной механики и технической физики
ЖВМиМФ – Журнал вычислительной математики и математической физики
ApJ – Astrophysical Journal
AA – Astronomy and Astrophysics
ApSS – Astrophysics and Space Science
MN – Monthly Notices Royal Astron. Society
PR – Physical Review
NP – Nuclear Physics
PTP – Progress of Theoretical Physics
AJ – Astronomical Journal

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.). Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979.
2. *Абрикосов А.А.* О внутреннем строении водородных планет // *Вопр. космогонии.* – 1954. – Т. 3, С. 12–19.
3. *Абрикосов А.А.* Некоторые свойства сильно сжатого вещества // *ЖЭТФ.* – 1960. – Т. 39. – С. 1797–1805.
4. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. – М.: Высшая школа, 1978.
5. *Аллен К.У.* Астрофизические величины. – М.: Мир, 1977.
6. *Альфвен Г., Фельтхаммер К.Г.* Космическая электродинамика. – М.: Мир, 1967.
7. *Амбарцумян В.А.* Проблемы эволюции вселенной. – Ереван: АН АрмССР, 1968.
8. *Амбарцумян В.А.* Фуоры // *АФ.* – 1971. – Т. 7. – С. 557–572.
9. *Амбарцумян В.А., Саакян Г.С.* О вырожденном сверхплотном газе элементарных частиц // *АЖ.* – 1960. – Т. 37. – С. 193–209.
10. *Арделян Н.В.* Сходимость разностных схем для двумерных уравнений акустики и Максвелла // *ЖВМиМФ.* – 1983. – Т. 23. – С. 1168–1176.
11. *Арделян Н.В.* Об использовании итерационных методов при реализации неявных разностных схем двумерной магнитной гидродинамики // *ЖВМиМФ.* – 1983. – Т. 23. – С. 1417–1426.
12. *Арделян Н.В., Бисноватый-Коган Г.С., Попов Ю.П.* Исследование магниторотационного врыва сверхновой в цилиндрической модели // *АЖ.* – 1979. – Т. 56. – С. 1244–1255.

13. Арделян Н.В., Бисноватый-Коган Г.С., Попов Ю.П., Черниговский С.В. Расчет коллапса вращающегося газового облака на лагранжевой сетке // АЖ. — 1987. — Т. 64. — С. 495–508.
14. Арделян Н.В., Бисноватый-Коган Г.С., Попов Ю.П., Черниговский С.В. Коллапс ядра и образование быстровращающейся нейтронной звезды // АЖ. — 1987. — Т. 64. — С. 761–772.
15. Арделян Н.В., Гуцин И.С. Об одном подходе к построению консервативных разностных схем // Вест. МГУ, вычисл. мат. и кибернет. — 1982. — № 3. — С. 3–10.
16. Арделян Н.В., Черниговский С.В. О сходимости разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики с учетом гравитации в акустическом приближении // Дифференц. ур-ния. — 1984. — Т. 20. — С. 1119–1127.
17. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969.
18. Баско М.М. Двухгрупповое приближение в сферически-симметричных задачах теории переноса // Препринт ИТЭФ. — 1982. — № 7.
19. Баско М.М., Имшенник В.С. Потеря устойчивости звезд малой массы в условиях нейтронизации // АЖ. — 1975. — Т. 52. — С. 469–480.
20. Баско М.М., Рудзкий М.А., Сеидов З.Ф. Коллапс маломассивных звезд // АФ. — 1980. — Т. 16. — С. 321–335.
21. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский А.П. Релятивистская квантовая теория. ч. I. — М.: Наука, 1968.
22. Бете Г. Теория ядерной материи. — М.: Мир, 1974.
23. Бете Г., Моррисон Ф. Элементарная теория ядра. — М.: ИЛ, 1958.
24. Бисноватый-Коган Г.С. Критическая масса горячего изотермического белого карлика с учетом эффектов общей теории относительности // АЖ. — 1966. — Т. 43. — С. 89–95.
25. Бисноватый-Коган Г.С. Течение идеального газа в сферически-симметричном поле тяжести с учетом лучистой теплопроводности и лучистого давления // Прикл. мат. мех. — 1967. — Т. 31. — С. 762–769.
26. Бисноватый-Коган Г.С. Взрывы больших звезд // АЖ. — 1968. — Т. 45. — С. 74–80.
27. Бисноватый-Коган Г.С. О роли излучения в образовании солнечного ветра // Мех. жидк. газа. — 1968. — № 4. — С. 182–183.
28. Бисноватый-Коган Г.С. Предел массы горячих сверхплотных устойчивых конфигураций // АФ. — 1968. — Т. 4. — С. 221–238.
29. Бисноватый-Коган Г.С. Поздние стадии эволюции звезд: канд. дисс. — М.: Инст. прикл. мат., 1968.
30. Бисноватый-Коган Г.С. Пульсар, как нейтронная звезда и слабые взаимодействия // Радиофиз. — 1970. — Т. 13. — С. 1868–1872.
31. Бисноватый-Коган Г.С. О механизме взрыва вращающейся звезды, как сверхновой // АЖ. — 1970. — Т. 47. — С. 813–816.
32. Бисноватый-Коган Г.С. Равновесие и устойчивость звезд и звездных систем: докт. дисс. — М.: Инст. космич. исслед., 1977.
33. Бисноватый-Коган Г.С. Рентгеновские источники в тесных двойных системах: теоретические аспекты // Бюлл. Абастуман. обс. — 1985. — № 58. — С. 175–210.
34. Бисноватый-Коган Г.С. Остывание белых карликов с учетом неравновесных бета-процессов // ПАЖ. — 1987. — Т. 13. — С. 1014–1018.
- 34а. Бисноватый-Коган Г.С. Два поколения маломассивных рентгеновских двойных и подкрученные радиопульсары // Препринт ИКИ. — 1989. — Пр 1511.
35. Бисноватый-Коган Г.С., Блинныеков С.И. Горячая корона вокруг диска, аккрецирующего на черную дыру, и модель источника Лебедь X-1 // ПАЖ. — 1976. — Т. 2. — С. 489–493.
36. Бисноватый-Коган Г.С., Блинныеков С.И. Распространение волн в среде с высоким лучистым давлением // Препринт ИКИ. — 1978. — Пр-421.
37. Бисноватый-Коган Г.С., Блинныеков С.И. Распространение волн в среде с высоким лучистым давлением. I. Основные уравнения и случай однородной среды // АФ. — 1978. — Т. 14. — С. 563–577.
38. Бисноватый-Коган Г.С., Блинныеков С.И. Равновесие вращающихся газовых дисков конечной толщины // АЖ. — 1981. — Т. 58. — С. 312–323.

39. Бисноватый-Коган Г.С., Блинников С.И., Захаров А.Ф. Численная модель взрыва вблизи поверхности нейтронной звезды и гамма всплески // АЖ. — 1984. — Т. 61. — С. 104–111.
40. Бисноватый-Коган Г.С., Блинников С.И., Костюк Н.Д., Федорова А.В. Эволюция быстро вращающихся звезд на стадии гравитационного сжатия // АЖ. — 1979. — Т. 56. — С. 770–780.
41. Бисноватый-Коган Г.С., Блинников С.И., Федорова А.В. Роль вращения в эволюции молодых звезд // Ранние стадии эволюции звезд. — Киев: Наукова думка, 1977. — С. 40–46.
42. Бисноватый-Коган Г.С., Блинников С.И., Шноль Э.Э. Устойчивость звезд при наличии фазового перехода // АЖ. — 1975. — Т. 52. — С. 920–929.
43. Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б. Адиабатическое истечение и равновесные состояния с избытком энергии // АЖ. — 1966. — Т. 43. — С. 1200–1206.
44. Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б. Истечение вещества из звезд под действием большой непрозрачности в оболочке: докл. на 35 комм. XIII ген. асс. МАС // Препринт ИПМ. — 1967.
45. Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б. Истечение вещества из звезд под действием большой непрозрачности в атмосфере // АЖ. — 1968. — Т. 45. — С. 241–250.
46. Бисноватый-Коган Г.С., Каждан Я.М. Критические параметры звезд // АЖ. — 1966. — Т. 43. — С. 761–771.
47. Бисноватый-Коган Г.С., Каждан Я.М., Клыпин А.А., Луцкий А.Е., Шакура Н.И. Аккреция на быстро движущийся гравитирующий центр // АЖ. — 1979. — Т. 56. — С. 359–367.
48. Бисноватый-Коган Г.С., Ламзин С.А. Истечение из звезд на стадии гравитационного сжатия // АЖ. — 1976. — Т. 53. — С. 742–749.
49. Бисноватый-Коган Г.С., Ламзин С.А. Истечение вещества из звезд на ранней стадии эволюции // Ранние стадии эволюции звезд. — Киев: Наукова думка, 1977. — С. 107–118.
50. Бисноватый-Коган Г.С., Ламзин С.А. Модели истекающих оболочек звезд типа Т Тельца // АЖ. — 1977. — Т. 54. — С. 1268–1280.
51. Бисноватый-Коган Г.С., Ламзин С.А. Хромосфера, корона и рентгеновское излучение RU Волка — звезды типа Т Тельца // ПАЖ. — 1980. — Т. 6. — С. 34–38.
52. Бисноватый-Коган Г.С., Надежин Д.К. Метод счета эволюции звезд с потерей массы // НИ. — 1969. — вып. 11. — С. 27–39.
53. Бисноватый-Коган Г.С., Романова М.М. Диффузия и теплопроводность нейтронов в коре нейтронных звезд // ЖЭТФ. — 1982. — Т. 83. — С. 449–459.
54. Бисноватый-Коган Г.С., Рудзский М.А., Сеидов З.Ф. Неравновесные бета-процессы и роль возбужденных состояний ядер // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 67. — С. 1621–1630.
55. Бисноватый-Коган Г.С., Сеидов З.Ф. О связи белых карликов со вспышками сверхновых I типа // АФ. — 1969. — Т. 5. — С. 243–247.
56. Бисноватый-Коган Г.С., Сеидов З.Ф. Неравновесные бета процессы, как источник тепловой энергии белых карликов // АЖ. — 1970. — Т. 47. — С. 139–144.
57. Бисноватый-Коган Г.С., Сеидов З.Ф. О колебаниях звезды с фазовым переходом // АФ. — 1984. — Т. 21. — С. 563–571.
58. Бисноватый-Коган Г.С., Сняев Р.А. Ядра галактик и квазары, как источники инфракрасного излучения // АЖ. — 1971. — Т. 48. — С. 881–893.
59. Бисноватый-Коган Г.С., Фридман А.М. О механизме рентгеновского излучения нейтронной звезды // АЖ. — 1969. — Т. 46. — С. 721–724.
60. Бисноватый-Коган Г.С., Четкин В.М. Неравновесный состав оболочек нейтронных звезд и ядерные источники энергии // Письма в ЖЭТФ. — 1973. — Т. 17. — С. 622–626.
61. Бисноватый-Коган Г.С., Четкин В.М. Неравновесные оболочки нейтронных звезд, их роль в поддержании рентгеновского излучения и нуклеосинтеза // УФН. — 1979. — Т. 127. — С. 263–296.
62. Бисноватый-Коган Г.С., Четкин В.М. Гамма вспышки, как проявление собственной активности нейтронных звезд // АЖ. — 1981. — Т. 58. — С. 561–568.
63. Блатт Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. — М.: ИЛ, 1954.
64. Блинников С.И. Метод самосогласованного поля в теории вращающихся звезд // АЖ. — 1975. — Т. 52. — С. 243–254.

65. *Блинные С.И., Лозинская Т.А., Чугай Н.Н.* Сверхновые звезды и остатки вспышек сверхновых // Итоги науки и тех. сер. Астрономия. – 1987. – Т. 32. – С. 142–200.
66. *Блинные С.И., Рудзский М.А.* Коллапс маломассивного железного ядра звезды // ПАЖ. – 1984. – Т. 10. – С. 363–369.
67. *Блинные С.И., Рудзский М.А.* Аппроксимация для мощности излучения аннигиляционных нейтрино // Препринт ИТЭФ. – 1986. – № 157.
- 67а. *Блинные С.И., Рудзский М.А.* Новые представления термодинамических функций ферми-газа // Препринт ИТЭФ. – 1987. – № 119.
68. *Блинные С.И., Хохлов А.М.* Формирование детонации в вырожденных ядрах // ПАЖ. – 1986. – Т. 12. – С. 318–324.
69. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Квантовые поля. – М.: Наука, 1980.
70. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Гостехтеоризд., 1953.
71. *де Бройли Л.* Магнитный электрон. Теория Дирака. – Харьков: Гос. науч.-тех. изд. Украины, 1936.
72. *Бугаев Э.В., Котов Ю.Д., Розенталь И.Л.* Космические мюоны и нейтрино. – М.: Атомиздат, 1970.
73. *Бугаев Э.В., Рудзский М.А., Бисноватый-Коган Г.С., Сеидов З.Ф.* Взаимодействие нейтрино средних энергий с ядрами // Препринт ИКИ АН СССР. – 1978. – Пр–403.
74. *Вайсенберг А.О.* Мю-мезон. – М.: Наука, 1964.
75. *Вандакуров Ю.В.* Конвекция на Солнце и 11-летний цикл. – Л.: Наука, 1976.
76. *Вартамян Ю.Л., Овсепян А.В., Аджян Г.С.* Об устойчивости и радиальных пульсациях вращающихся нейтронных звезд // АЖ. – 1973. – Т. 50. – С. 48–59.
77. *Вартамян Ю.Л., Овакимова Н.К.* Нейтроннобогатые ядра в Ферми-газе // АЖ. – 1972. – Т. 49. – С. 306–315.
78. *Вартамян Ю.Л., Овакимова Н.К.* Холодное испарение нейтронов из ядер в сверхплотном веществе // Сообщ. Бюракан. обс. – 1976. – № 49. – С. 87–95.
79. *Вартамян Ю.Л., Овсепян А.В.* Эволюция и радиальные пульсации изотермических белых карликов с учетом вращения, эффектов нейтронизации и ОТО // АФ. – 1971. – Т. 7. – С. 107–119.
80. *Варшавский В.И.* Метод Шварцшильда с логарифмическими переменными // НИ. – 1970. – вып. 16. – С. 77–82.
81. *Варшавский В.И.* Эволюция звезд большой массы с учетом полуконвекции // НИ. – 1972. – вып. 21. – С. 25–45.
82. *Варшавский В.И., Тутуков А.В.* Эволюция массивных звезд // АЖ. – 1975. – Т. 52. – С. 227–233.
83. *Власюк М.П., Полежаев В.И.* Численное исследование конвективных движений в горизонтальном слое газа, подогреваемого снизу // Препринт ИПМ АН СССР. – 1970. – С. 1–74.
- 83а. *Воронцов С.В., Жарков В.Н.* Гелиосейсмология // Итоги науки и тех. сер. Астрономия. – 1988. – Т. 38. – С. 253–338.
84. *Ву Ц.С., Мошковский С.А.* Бета-распад. – М.: Атомиздат, 1970.
85. *Гавриченко К.В., Надежин Д.К.* Простые формулы для скоростей захвата электронов и позитронов ядрами. // Препринт ИТЭФ. – 1980. – № 123.
86. *Гайар М.К., Николич М.* (ред.). Слабые взаимодействия. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
87. *Герштейн С.С., Зельдович Я.Б.* О мезонных поправках к теории бета распада // ЖЭТФ. – 1955. – Т. 29. – С. 698–699.
88. *Герштейн С.С., Зельдович Я.Б.* Масса покоя мюонного нейтрино и космология // Письма ЖЭТФ. – 1966. – Т. 4. – С. 174–177.
89. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. – М.: Наука, 1975.
90. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. – М.: Наука, 1970.
91. *Годнев И.Н.* Вычисление термодинамических функций по молекулярным данным. – М.: Гостехиздат, 1956.
92. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Физматгиз, 1962.

93. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
94. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. — Л.: Гидрометеоздат, 1975.
95. Гуревич Л.Э., Либединский А.И. О причинах звездных вспышек // Труды 4-го совещания по вопр. космогонии. — М.: АН СССР, 1955. — С. 143—171.
96. Данжи Дж. Космическая электродинамика: Пер. с англ. под ред. Д.А. Франк-Каменецкого. — М.: Госатомиздат, 1961.
97. Дейтерий. Хим. энциклопед. словарь. — М.: СЭ, 1983. — С. 149.
98. Де Ягер К. Звезды наибольшей светимости. — М.: Мир. 1984.
99. Дзельтепов Б.С., Пекер Л.К. Схемы распада радиоактивных ядер. — М.: Наука, 1966.
100. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. Космология и элементарные частицы // УФН. — 1980. — Т. 130. — С. 559—614.
101. Дорофеев О.Ф., Родионов В.Н., Тернов И.М. Анизотропное излучение нейтрино, возникающих в бета-процессах при действии интенсивного магнитного поля // ПАЖ. — 1985. — Т. 11. — С. 302—309.
102. Зельдович Я.Б. О ядерных реакциях в сверхплотном холодном газе // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 33. — С. 991—993.
103. Зельдович Я.Б. Уравнение состояния при сверхвысокой плотности и релятивистские ограничения // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 41. — С. 1609—1615.
104. Зельдович Я.Б. Статические решения с избытком энергии в общей теории относительности // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42. — С. 1667—1671.
105. Зельдович Я.Б. Гидродинамическая устойчивость звезды // Вопр. космогонии. — 1963. — Т. 9. — С. 157—170.
106. Зельдович Я.Б. Химическая физика и гидродинамика. Избранные труды. — М.: Наука, 1984. — С. 279—280.
107. Зельдович Я.Б., Блинников С.И., Шакура Н.И. Физические основы строения и эволюции звезд. — М.: МГУ, 1981.
108. Зельдович Я.Б., Гуссейнов О.Х. Нейтронизация вещества при коллапсе и спектр нейтрино // ДАН СССР. — 1965. — Т. 162. — С. 791—793.
109. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. II // УФН. — 1965. — Т. 86. — С. 447—536.
110. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971.
111. Иванова Л.Н., Имшенник В.С., Надежин Д.К. Исследование динамики взрыва сверхновой // НИ. — 1969. — вып. 13. — С. 3—78.
112. Имшенник В.С., Коток Э.В., Надежин Д.К. Расчет однородных моделей методом прогонки // НИ. — 1965. — вып. 1. — С. 48—54.
113. Имшенник В.С., Морозов Ю.И. Релятивистски ковариантные уравнения взаимодействия излучения с веществом // АЖ. — 1969. — Т. 46. — С. 800—809.
114. Имшенник В.С., Надежин Д.К. Термодинамические свойства вещества при больших температурах и высоких плотностях // АЖ. — 1965. — Т. 42. — С. 1154—1167.
115. Имшенник В.С., Надежин Д.К. Нейтринная теплопроводность в коллапсирующих звездах // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 63. — С. 1548—1561.
116. Имшенник В.С., Надежин Д.К. Конечные стадии эволюции звезд и вспышки сверхновых // Итоги науки и тех. сер. Астрономия. — 1982. — Т. 21. — С. 63—129.
117. Имшенник В.С., Надежин Д.К., Пинаев В.С. Кинетическое равновесие β -процессов внутри звезд // АЖ. — 1966. — Т. 43. — С. 1215—1225.
118. Имшенник В.С., Надежин Д.К., Пинаев В.С. Нейтринное излучение энергии при β -взаимодействии электронов и позитронов с ядрами // АЖ. — 1967. — Т. 44. — С. 768—777.
119. Имшенник В.С., Четкин В.М. Термодинамика в условиях горячей нейтронизации вещества и гидродинамическая устойчивость звезд на поздних стадиях эволюции // АЖ. — 1970. — Т. 47. — С. 929—941.
120. Иоффе Б.Л., Липатов Л.Н., Хозе В.А. Глубоко-неупругие процессы. Феноменология. Кварк-партоновая модель. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
121. Каплан С.А. "Сверхплотные" звезды // Уч. зап. Львовского гос. ун-та, серия физ-мат. — 1949. — Т. 15. — С. 109—116.

122. *Каплан С.А.* Охлаждение белых карликов // *АЖ.* – 1950. – Т. 27. – С. 31–33.
123. *Кардашев Н.С.* Магнитный коллапс и природа мощных источников космического радиоизлучения // *АЖ.* – 1964. – Т. 41. – С. 807–813.
124. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. – М.: ИЛ, 1959.
125. *Киржниц Д.А.* О внутреннем строении сверхплотных звезд // *ЖЭТФ.* – 1960. – Т. 38. – С. 503–508.
126. *Киржниц Д.А., Лозовик Ю.Е., Шпатаковская Г.В.* Статистическая модель вещества // *УФН.* – 1975. – Т. 117. – С. 3–47.
127. *Козик В.С., Любимов В.А., Новиков Е.Г., Нозик В.З., Третьяков Е.Ф.* Об оценке массы $\tilde{\nu}_e$ по спектру β – распада трития в валине // *Ядерн. физ.* – 1980. – Т. 32. – С. 301–303.
128. *Кокс А.Н.* Коэффициенты поглощения и непрозрачность звездного вещества // *Внутреннее строение звезд* / Под ред. Л. Аллера и Д.Б. Мак-Лафлина. – М.: Мир, 1970. – С. 101–186.
129. *Кокс А., Стюарт Дж.* Лучистое поглощение и теплопроводность: непрозрачности для 25 звездных смесей // *НИ.* – 1969. – Вып. 15. – С. 3–103.
130. *Кокс Дж.П.* Теория звездных пульсаций. – М.: Мир, 1983.
131. *Колесник И.Г.* Гравитационное сжатие протозвезд. I. Объемные потери энергии // *Астрометрия и астрофизика.* – 1973. – № 18. – С. 45–58.
132. *Колесник И.Г.* Гидродинамика коллапса протозвезд // *Препринт ИТФ.* – 1979. – № 79–44Р, Киев.
133. *Колесник И.Г.* Численное моделирование коллапса протозвезд. Физическая и математическая постановка задачи I. Основные уравнения // *Астрометрия и астрофизика.* – 1980. – № 40. – С. 3–18; II. Вычислительные алгоритмы // Там же. – 1980. – № 41. – С. 40–58.
134. *Копысов Ю.С.* Нейтрино и внутреннее строение Солнца // *Препринт ИЯИ.* – 1975. – № П–0019.
135. *Кравцов В.А.* Массы атомов и энергии связи ядер. – М.: Атомиздат, 1974.
136. *Краснов Н.Ф.* Аэродинамика. – М.: Высшая школа, 1971.
137. *Крылов В.И.* Приближенные вычисления интегралов. – М.: Наука, 1967.
138. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. – М. – Л.: АН СССР, 1950.
139. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1958.
140. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947.
141. *Ландау Л.Д.* К теории звезд // *Сб. трудов, т. I.* – М.: Наука, 1969. – С. 86–89.
142. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. – М.: Гостехтеориздат, 1953.
143. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1962.
144. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. – М.: Наука, 1963.
145. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика: ч. I. – М.: Наука, 1976.
146. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
147. *Леду П.* К условиям равновесия в центре звезд и их эволюции // *Ядерные процессы в звездах* труды Льжского колл. – М.: ИЛ, 1957. – С. 152–162.
148. *Лейтон У.Дж.* Белые карлики: обнаружение и наблюдения // *Белые карлики* / Под ред. В.С. Имшенника. – М.: Мир, 1975. – С. 13–22.
149. *Лозинская Т.А.* Сверхновые звезды и звездный ветер. Взаимодействие с газом Галактики. – М.: Наука, 1986.
150. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1959.
151. *Лютостанский Ю.С.* и др. Кинетическая модель β -процесса // *Препринт ИПМ.* – 1984. – № 95.
152. *Мазец Е.П.* и др. Вспыхивающий рентгеновский пульсар в Золотой Рыбе // *ПАЖ.* – 1979. – Т. 5. – С. 307–312.
153. *Манчестер Р., Тейлор Дж.* Пульсары. – М.: Мир, 1980.
154. *Масевич А.Г., Рубен Г.В., Ломнев С.П., Попова Е.И.* Расчет однородных моделей звезд с массами $4 M_{\odot}$, $8 M_{\odot}$, $16 M_{\odot}$ для различного химического состава и различных законов поглощения // *НИ.* – 1965. – вып. 1. – С. 2–47.
155. *Масевич А.Г., Тутуков А.В.* Эволюция массивных звезд и проблема полуконвекции // *НИ.* – 1974. – Вып. 29. – С. 3–26.

156. Масевич А.Г., Тутуков А.В. Эволюция звезд: теория и наблюдения. — М.: Наука, 1988.
157. Местел Л. Меридиональная циркуляция в звездах // Внутреннее строение звезд // Под ред. Л. Аллера, Д.Б. Мак-Лафлина. — М.: Мир, 1970. — С. 249–289.
158. Мигдал А.Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. — М.: Наука, 1978.
159. Михалас Д. Звездные атмосферы: Ч. I и II. — М.: Мир, 1982.
160. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. Резонансное усиление осцилляций в веществе н спек- троскопия солнечных нейтрино // Ядерная физ. — 1985. — Т. 42. — С. 1441–1448.
161. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. Осцилляции нейтрино в среде с переменной плот- ностью и вспышки от гравитационных коллапсов звезд // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 91. — С. 7–13.
162. Морозов Ю.И. Уравнения радиационного переноса в неинерциальных системах координат // ПМТФ. — 1970. — № 1. — С. 3–11.
163. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИЛ, 1958.
164. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика: Т. 1. Физика атомного ядра. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
165. Надежин Д.К. Эволюция звезды $M = 30 M_{\odot}$ в стадии горения водорода // НИ. — 1966. — вып. 4. — С. 37–64.
166. Надежин Д.К. Асимптотические формулы для уравнения состояния электронно- позитронного газа // НИ. — 1974. — Вып. 32. — с. 3–72.
167. Надежин Д.К. Таблицы к уравнению состояния электронно-позитронного газа // НИ. — 1974. — Вып. 33. — С. 117–142.
168. Надежин Д.К., Четчин В.М. Нейтринное излучение УРКА-процессом при высо- ких температурах // АЖ. — 1969. — Т. 46. — С. 270–279.
169. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. — М.: Наука, 1986.
170. Одуз Ж., Ривс Х. Происхождение легких элементов // Ядерная астрофизи- ка // . — М.: Мир, 1986. — С. 340–358.
171. Окунь Л.Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. — М.: Наука, 1963.
172. Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
173. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1984.
174. Паркер Е.Н. Динамические процессы в межпланетной среде. — М.: Мир, 1965.
175. Петров П.Л. Звезды типа Т Тельца: Современные наблюдательные данные // Ранние стадии эволюции звезд // . — Киев: Наукова Думка, 1977. — С. 66–100.
176. Пикельнер С.Б. Основы космической электродинамики. — М.: Наука, 1961.
177. Порфирьев В.В., Редкобородый Ю.Н. Эффект электронного экранирования в ядерных реакциях при высоких плотностях // АФ. — 1969. — Т. 5. — С. 393–413.
178. Псковский Ю.П. Новые и верховые звезды. — М.: Наука, 1985.
179. Птицын Д.А., Четчин В.М. К вопросу об образовании элементов за железным пиком в сверхновых // ПАЖ. — 1982. — Т. 8. — С. 600–606.
180. Радциг А.А., Смирнов Б.М. Справочник по атомной и молекулярной физике. — М.: Атомиздат, 1980.
181. Редкобородый Ю.Н. Квантовая теория эффектов экранирования при термоядер- ных реакциях. I. Релятивистская электронная плазма // АФ. — 1976. — Т. 12. — С. 495–510.
182. Ривс Х. Источники звездной энергии // Внутреннее строение звезд // Под ред. Л. Ал- лера, Д.Б. Мак-Лафлина. — М.: Мир, 1970. — С. 13–100.
183. Росселанд С. Теория пульсаций переменных звезд. — М.: ИЛ, 1952.
184. Рублев С.В., Черепашук А.М. Звезды Вольфа-Райе // Явления нестационарности и звездная эволюция. — М.: Наука, 1974. — С. 47–124.
185. Рудерман М. Нейтрино и астрофизика // Нейтрино // . — М.: Наука, 1970.
186. Рудзский М.А., Сеидов З.Ф. Тепловые эффекты в бета-процессах // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ. тех. и мат. наук. — 1974. — Т. 4. — С. 98–106.
187. Рудзский М.А., Сеидов З.Ф. Коллапс звезды малой массы и нагрев бета про- цессами // АЖ. — 1974. — Т. 51. — С. 936–939.
188. Саакян Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. — М.: Нау- ка, 1972.
189. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1975.

190. *Седракан Д.Н., Шахбазян К.М., Мовсисян А.Г.* Магнитные моменты нейтронных звезд из реального газа барионов // АФ. – 1984. – Т. 21. – С. 547–561.
191. *Сеидов З.Ф.* Равновесие звезды с фазовым переходом // АФ. – 1967. – Т. 3. – С. 189–201.
- 191a. *Сеидов З.Ф.* Звезды с фазовым переходом // канд. дисс. – 1970. – Ереван.
192. *Сеидов З.Ф.* Политропы с фазовым переходом. II. Политропа $n = 1$ // Сообщ. Шемах, обс. – 1971. – вып. 5. – С. 58–69.
193. *Сеидов З.Ф.* Равновесие, устойчивость и пульсации звезд с фазовым переходом // Препринт ИКИ. – 1984. – № Пр-889.
194. *Сирс Р.Л., Браунли Р.Р.* Эволюция звезд и определение их возраста // Внутреннее строение звезд // Под ред. Л. Аллера, Д.Б. Маклафлина. – М.: Мир. – С. 290–364.
195. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: Т. 2. – М.: Наука, 1962.
196. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: Т. 4. – М.: Гостехиздат, 1958.
197. *Соболев В.В.* Курс теоретической астрофизики. – М.: Наука, 1967.
198. *Суинни Х., Голлаб Дж.* (ред.) Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. – М.: Мир, 1984.
199. *Тассуль Ж.-Л.* Теория вращающихся звезд. – М.: Мир, 1982.
200. *Тутуков А.В., Фадеев Ю.А.* Образование протяженной оболочки вокруг пульсирующей звезды // НИ. – 1981. – Вып. 49. – С. 48–63.
201. *Уиллер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К.* Теория гравитации и гравитационный коллапс. – М.: Мир, 1967.
- 201a. *Ульрих Р.К.* S-процесс // Ядерная астрофизика. – М.: Мир, 1986. – С. 290–312.
202. *Уртин В.А., Яковлев Д.Г.* Теплопроводность, обусловленная межэлектронными столкновениями в вырожденном релятивистском электронном газе // АЖ. – 1980. – Т. 57. – С. 213–215.
203. *Уртин В.А., Яковлев Д.Г.* Термогальваномагнитные явления в белых карликах и нейтронных звездах // АЖ. – 1980. – Т. 57. – С. 738–748.
204. *Ус У.Х.* Расчеты структуры тонких слоев ядерного горения в звездных моделях // НИ. – 1969. – Вып. 13. – С. 126–144.
205. *Ус У.Х.* Эволюция звезд $M = 1,5, 2,3$ и $5 M_{\odot}$ на стадии роста углеродного ядра // НИ. – 1970. – Вып. 17. – С. 3–24.
206. *Ус У.Х.* Проникновение конвективной оболочки звезды в зону ядерного горения // НИ. – 1971. – Вып. 20. – С. 60–63.
207. *Ус У.Х.* О возможности последовательной трактовки звездной турбулентной конвекции // Публ. Тартус. Астрофиз. Обс. им. В.Я. Струве. – 1979. – Т. 47. – С. 103–119.
208. *Фадеев Ю.А.* О возможности образования пылевых частиц в атмосфере FG Стрелы // НИ. – 1981. – Вып. 50. – С. 3–9.
209. *Федорова А.В.* Влияние магнитного поля на минимальную массу звезды главной последовательности // НИ. – 1978. – Вып. 42. – С. 95–109.
210. *Федорова А.В., Блинные С.И.* Влияние аккреции и вращения на минимальную массу звезды главной последовательности // НИ. – 1978. – Вып. 42. – С. 75–94.
211. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. – 1983. – Т. 141. – С. 343–374.
212. *Ферми Э.* Ядерная физика. – М.: ИЛ, 1951.
213. *Ферми Э.* К теории β -лучей // Научные труды: Т. 1. – М.: Наука, 1971. – С. 525–541.
214. *Фок В.А.* Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976.
215. *Франк-Каменецкий Д.А.* Физические процессы внутри звезд. – М.: Физматгиз, 1959.
216. *Франк-Каменецкий Д.А.* Кинетика нейтронизации при сверхвысоких плотностях // ЖЭТФ. – 1962. – Т. 42. – С. 875–879.
217. *Цурута С., Камерон А.* Урка-оболочки в плотных звездных недрах // Белые карлики / Под ред. В.С. Имшенника. – М.: Мир, 1975. – С. 149–173.
218. *Чандрасекхар С.* Введение в учение о строении звезд. – М.: ИЛ, 1950.
219. *Чандрасекхар С.* Перенос лучистой энергии. – М.: ИЛ, 1953.
220. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973.
221. *Чандрасекхар С.* Математическая теория черных дыр. – М.: Мир, 1986.
222. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.

- 222a. *Черепашук А.М.* (ред.) Каталог тесных двойных систем на поздних стадиях эволюции. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
223. *Чечев В.П., Крамаровский Я.М.* Теория ядерного синтеза в звездах: процесс медленного нейтронного захвата // УФН. – 1981. – Т. 134. – С. 431–467.
224. *Чечеткин В.М.* Равновесное состояние вещества при высоких температурах и плотностях // АЖ. – 1969. – Т. 46. – С. 202–206.
225. *Чукай Н.Н.* Спиральность нейтрино и пространственные скорости пульсаров // ПАЖ. – 1984. – Т. 10. – С. 210–213.
226. *Шакура Н.И.* Дискковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе // АЖ. – 1972. – Т. 49. – С. 921–929.
227. *Шатири С., Тьюкоольский С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: Т. 1, 2. – М.: Мир, 1985.
228. *Шварцман В.Ф.* Ореолы вокруг черных дыр // АЖ. – 1971. – Т. 48. – С. 479–488.
229. *Шварцшильд М.* Строение и эволюция звезд. – М.: ИЛ, 1961.
230. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. – М.: ИЛ, 1963.
231. *Шехтер В.М.* Слабое взаимодействие с нейтральными токами // УФН. – 1976. – Т. 119. – С. 593–632.
232. *Широков Ю.М., Юдин Н.П.* Ядерная физика. – М.: Наука, 1980.
233. *Шкловский И.С.* О природе планетарных туманностей и их ядер // АЖ. – 1956. – Т. 33. – С. 315–329.
234. *Шкловский И.С.* Сверхновые звезды. – М.: Наука, 1976.
235. *Шлихтинг Г.* Возникновение турбулентности. – М.: ИЛ, 1962.
236. *Шноль Э.Э.* Об устойчивости звезды со скачком плотности, вызванной фазовым переходом // Препринт ИПМ. – 1974. – № 93.
237. *Шустов Б.М.* Алгоритм расчета газодинамической эволюции оболочки массивной протозвезды // НИ. – 1978. – Вып. 42. – С. 60–74.
238. *Шустов Б.М.* Эволюция протозвездных оболочек I. Стадия коконов // НИ. 1979. – Вып. 46. – С. 63–92.
239. *Шустов Б.М.* Эволюция протозвездных оболочек II. Спектры выходящего излучения протозвезд и компактных зон H II // НИ. – 1979. – Вып. 46. – С. 93–110.
240. *Эбелинг В., Крефт В., Крем Д.* Теория связанных состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле. – М.: Мир, 1979.
241. *Эрма Э.В.* Модели оболочек $4 M_{\odot}$ и $20 M_{\odot}$ // НИ. – 1969. – Вып. 12.
242. *Эрма Э.В.* Нелокальная модель конвекции для звездных оболочек // НИ. – 1972. – Вып. 23. – С. 33–46.
243. *Эрма Э.В.* Термоядерные вспышки в оболочках нейтронных звезд // Итоги науки и тех., астрономия. – 1982. – Т. 21. – С. 130–150.
244. *Эрма Э.В.* Термоядерные процессы в аккрецирующих белых карликах (новые, симбиотические новые и сверхновые I типа) // Итоги науки и тех., астрономия. – 1986. – Т. 31. – С. 228–257.
245. *Яковлев Д.Г.* Явления переноса тепла и заряда в нейтронных звездах и белых карликах // Канд. дисс. – 1980. – Л.: ЛФТИ.
246. *Яковлев Д.Г., Уртин В.А.* О теплопроводности и проводимости в нейтронных звездах и белых карликах // АЖ. – 1980. – Т. 57. – С. 526–536.
247. *Яковлев Д.Г., Шалыбков Д.А.* Влияние электронного экранирования на скорость термоядерных реакций // ПАЖ. – 1987. – Т. 13. – С. 730–736.
248. *Яковлев Д.Г., Шалыбков Д.А.* Вырожденные ядра белых карликов и оболочки нейтронных звезд: термодинамика и плазменное экранирование в термоядерных реакциях // Итоги науки и тех. сер. Астрономия. – 1988. – Т. 38. – С. 191–252.
249. *Alcock Ch., Marlonov A.F.* The surface chemistry of stars. II. Fractionated accretion of interstellar matter // ApJ. – 1980. – V. 235. – P. 541–553.
250. *Alexander D.* Low temperature Rosseland opacity tables // ApJ Suppl. – 1975. – V. 29. – P. 363–374.
- 250a. *Alpar M.A., Cheng A.F., Ruderman M.A., Shaham J.* A new class of radio pulsars // Nature. – 1982. – V. 300. – P. 728–730.
251. *Appenzeller I.* The evolution of a vibrationally unstable main sequence star of $130 M_{\odot}$ // AA. – 1970. – V. 5. – P. 355–371.
252. *Appenzeller I.* Mass loss rates for vibrationally unstable very massive main-sequence stars // AA. – 1970. – V. 9. – P. 216–220.

253. Appenzeller I., Tscharnuter W. The evolution of a massive protostar // AA. - 1974. - V. 30. - P. 423-430.
254. Arnett D. Mass dependence in gravitational collapse of stellar cores // Canad. J. Phys. - 1967. - V. 45. - P. 1621-1641.
255. Arnett D. A possible model of supernovae: detonation of C^{12} // ApSS. - 1969. - V. 5. - P. 180-212.
- 255a. Arnett D. Neutrino trapping during gravitational collapse of stars // ApJ. - 1977. - V. 218. - P. 815-833.
256. Arponen J. Internal structure of neutron stars // NP. - 1972. - V. A191. - P. 257-284.
257. Auman J., Bodenheimer P. The influence of water-vapor opacity and the efficiency of convection on models of late-type stars // ApJ. - 1967. - V. 149. - P. 641-648.
258. Baade W., Zwicky F. Supernovae and cosmic rays // PR. - 1934. - V. 45. - P. 138-139.
259. Bahcall J. Solar neutrino experiment // Rev. Mod. Phys. - 1978. - V. 50. - P. 881-903.
260. Bahcall J., Cleveland B.T., Davis R.Jr., Rowley J.K. Chlorine and gallium solar neutrino experiment // ApJ. Lett. - 1985. - V. 292. - P. L79-L82.
261. Baker N., Gough D. Pulsations of model RR Lyrae stars // ApJ. - 1979. - V. 234. - P. 232-244.
262. Bardeen J. Binding energy and stability of spherically symmetric masses in general relativity // Preprint OAP. - 1965. - № 36.
263. Burrows A., Lattimer J. The birth of neutron stars // ApJ. - 1986. - V. 307. - P. 178-196.
264. Baud B. et. al. High-sensitivity IRAS observations of the Chamaeleon I dark cloud // ApJ. Lett. - 1984. - V. 278. - P. L53-L55.
265. Baym G., Bethe H., Pethick Ch. Neutron star matter // NP. - 1971. - V. A175. - P. 255-271.
266. Baym G., Pethick Ch. Neutron stars // Ann. Rev. Nucl. Sci. - 1975. - V. 25. - P. 27-77.
267. Baym G., Pethick Ch., Sutherland P. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models // ApJ. - 1971. - V. 170. - P. 306-315.
268. Beaudet G., Petrosian V., Salpeter E.E. Energy losses due to neutrino processes // ApJ. - 1967. - V. 150. - P. 979-999.
269. Beaudet G., Salpeter E.E., Silvestro M.L. Rates for URCA neutrino processes // ApJ. - 1972. - V. 174. - P. 79-90.
270. Becker S., Iben I. The asymptotic giant branch evolution of intermediate-mass stars as a function of mass and composition. I. Through the second dredge-up phase // ApJ. - 1979. - V. 232. - P. 831-853.
271. Becker S., Iben I., Tuggle R. On the frequency-period distribution of Cepheid variables in galaxies in the local group // ApJ. - 1977. - V. 218. - P. 633-653.
272. Beichman C.A. et. al. The formation of Solar-type stars: IRAS observations of the dark cloud Barnard 5 // ApJ. Lett. - 1984. - V. 278. - P. L45-L48.
273. Beichman C. et al. Candidate Solar-type protostars in nearby molecular cloud cores // ApJ. - 1986. - V. 307. - P. 337-349.
274. Bethe H. Possible explanation of the Solar neutrino puzzle // PR. Lett. - 1986. - V. 56. - P. 1305-1308.
275. Bethe H., Johnson M. Dense baryon matter calculations with realistic potentials // NP. - 1974. - V. A230. - P. 1-58.
276. Bethe H., Wilson J. Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating // ApJ. - 1985. - V. 295. - P. 14-23.
277. Bisnovatyi-Kogan G.S. Stellar envelopes with supercritical luminosity // ApSS. - 1973. - V. 22. - P. 307-320.
278. Bisnovatyi-Kogan G.S. Gamma-ray bursts from neutron stars // Report on COSPAR, Varna, 1975, preprint IKI. - 1975. - D - 203.
279. Bisnovatyi-Kogan G.S. Magnetohydrodynamical processes near compact objects // Rivista Nuovo Cimento. - 1979. - V. 2, № 1.
280. Bisnovatyi-Kogan G.S. Magnetorotational model of supernovae explosion // Ann. New-York Acad. Sci. - 1980. - V. 336. - P. 389-394.

281. *Bisnovatyi-Kogan G.S.* Pre-main – sequence stellar evolution // Proc. Symp. IAU № 93: Fundamental problems of stellar evolution / Ed. D. Sugimoto, D. Lamb, D. Schramm, D. Reidel, 1981. – P. 87–97.
282. *Bisnovatyi-Kogan G.S.* Physical processes in stars on late stages of stellar evolution // Astron. Nachrichten. – 1982. – V. 203. – P. 131–137.
283. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Blinnikov S.I.* The equilibrium, stability and evolution of a rotating magnetized gaseous disk // ApSS. – 1972. – V. 19. – P. 119–144.
284. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Blinnikov S.I.* Static criteria for stability of arbitrarily rotating stars // AA. – 1974. – V. 31. – P. 391–404.
285. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Blinnikov S.I.* Disk accretion onto a black hole at subcritical luminosity // AA. – 1977. – V. 59. – P. 111–125.
286. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Blinnikov S.I.* Spherical accretion onto compact X-ray source with preheating: no thermal limit for the luminosity // MN. – 1980. – V. 191. – P. 711–719.
287. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Chechetkin V.M.* Nucleosynthesis in supernova outbursts and the chemical composition of the envelopes of neutron stars // ApSS. – 1974. – V. 26. P. 25–46.
288. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Chechetkin V.M.* Nuclear fission in the neutron stars and gamma ray bursts // ApSS. – 1983. – V. 89. – P. 447–451.
289. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Imshennik V.S., Nadyozhin D.K., Chechetkin V.M.* Pulsed gamma ray emission from neutron and collapsing stars and supernovae // ApSS. – 1975. – V. 35. – P. 23–41.
290. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Nadyozhin D.K.* The evolution of massive stars with mass loss // ApSS. – 1972. – V. 15. – P. 353–374.
291. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Popov Yu.P., Samochin A.A.* The magnetohydrodynamical rotational model of supernovae explosion // ApSS. – 1976. – V. 41. – P. 321–356.
292. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Ruzmaikin A.A.* The stability of rotating supermassive stars // AA. – 1973. – V. 27. – P. 209–221.
293. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Ruzmaikin A.A.* The accretion of matter by a collapsing star in the presence of a magnetic field // ApSS. – 1974. – V. 28. – P. 45–59.
294. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Ruzmaikin A.A.* The accretion of matter by a collapsing star in the presence of magnetic field. II. Selfconsistent stationary picture // ApSS. – 1976. – V. 42. – P. 401–424.
295. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Vainshtein S.I.* Generation of magnetic fields in rotating stars and quasars // Astrophys. Lett. – 1971. – V. 8. – P. 151–152.
296. *Black D.C., Bodenheimer P.* Evolution of rotating interstellar clouds. I. Numerical techniques // ApJ. – 1975. – V. 199. – P. 619–632.
297. *Black D.C., Bodenheimer P.* Evolution of rotating interstellar clouds. II. The collapse of protostars of 1, 2 and 5 $M_{\odot}$ // ApJ. – 1976. – V. 206. – P. 138–149.
298. *Blake J., Schramm D.* A possible alternative to the r-process // ApJ. – 1976. – V. 209. – P. 846–849.
299. *Blake J., Woosley S., Weaver T., Schramm D.* Nucleosynthesis of neutron-rich heavy nuclei during explosive helium burning in massive stars // ApJ. – 1981. – V. 248. – P. 315–320.
300. *Blandford R.D., Znaeck R.L.* Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes // MN. – 1977. – V. 179. – P. 433–456.
301. *Bludman S., Van Riper K.* Diffusion approximation to neutrino transport in dense matter // ApJ. – 1978. – V. 224. – P. 631–642.
302. *Bodansky D., Clayton D., Fowler W.* Nuclear quasi-equilibrium during silicon burning // ApJ. Suppl. – 1968. – V. 16. – P. 299–371.
303. *Bodenheimer P., Ostriker J.* Rapidly rotating stars. IV. Pre-main sequence evolution of massive stars // ApJ. – 1970. – V. 161. – P. 1101–1115.
304. *Bodenheimer P., Ostriker J.* Do pulsars make supernovae? II. Calculations of light curves for type II events // ApJ. – 1974. – V. 191. – P. 465–471.
305. *Bodenheimer P., Tscharnuter W.* A comparison of two independent calculations of the axisymmetric collapse of a rotating protostar // AA. – 1979. – V. 74. – P. 288–293.
306. *Bohm-Vitenze E.* Über die Wasserstoffkonvektionzone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte // Z. Astrophys. – 1958. – V. 46. – P. 108–143.

307. *Boss A.P.* Protostellar formation in rotating interstellar clouds. I. Numerical methods and tests // *ApJ.* – 1980. – V. 236. – P. 619–627.
308. *Boss A.P.* Protostellar formation in rotating interstellar clouds. II. Axially symmetric collapse // *ApJ.* – 1980. – V. 237. – P. 563–573.
309. *Boss A.P.* Protostellar formation in rotating interstellar clouds. III. Nonaxisymmetric collapse // *ApJ.* – 1980. – V. 237. – P. 866–876.
310. *Boss A.P.* Collapse and equilibrium of rotating adiabatic clouds // *ApJ.* – 1980. – V. 242. – P. 699–709.
311. *Boss A.P., Habet J.G.* Axisymmetric collapse of rotating isothermal clouds // *ApJ.* – 1982. – V. 255. – P. 240–244.
312. *Bray R.J., Loughhead R.E.* The solar granulation. – London.: Chapman and Hall Ltd., 1967.
313. *Buchler J-R., Barkat Z.* Properties of low density neutron star matter // *PR Lett.* – 1971. – V. 27. – P. 48–51.
314. *Buchler J-R., Datta B.* Neutron gas: temperature dependence of the effective interaction // *PR.* – 1979. – V. C19. – P. 494–497.
315. *Buchler J-R., Yuen W.R.* Compton scattering opacities in a partially degenerate electron plasma at high temperatures // *ApJ.* – 1976. – V. 210. – P. 440–446.
316. *Bugaev E.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Rudzkyi M.A., Seidov Z.F.* The interaction of intermediate energy neutrinos with nuclei // *NP.* – 1979. – V. A324. – P. 350–364.
317. *Burbidge E.M., Burbidge G.R., Fowler W., Hoyle F.* Synthesis of the elements in stars // *Rev. Mod. Phys.* – 1957. – V. 29. – P. 547–650.
318. *Cabrit S., Bertout C.* CO lines formation in bipolar flows. I. Accelerated outflows // Preprint Inst.d Astrophys. de Paris. – 1985. – № 119.
319. *Carson T.R., Huebner W.F., Magee N. H., Merts A.L.* Discrepancy in the CNO opacity bump resolved // *ApJ.* – 1984. – V. 283. – P. 466–468.
320. *Castor J.L.* Radiative transfer in spherically symmetric flows // *ApJ.* – 1972. – V. 178. – P. 779–792.
321. *Caughlan G., Fowler W., Harris M., Zimmerman B.* Tables of thermonuclear reaction rates for low-mass nuclei ($1 \leq Z \leq 14$) // *At. data and nucl. data tabl.* – 1985. – V. 32. – P. 197–234.
- 321a. *Cavalerie A., Isaak G., et.al.* Structure of the 5-minute solar oscillations 1976–1980 // *Solar Phys.* – 1981. – V. 74. – P. 51–57.
322. *Chandrasekhar S.* The highly collapsed configurations of a stellar mass // *MN.* – 1931. – V. 91. – P. 456–466.
323. *Chandrasekhar S.* The dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity // *ApJ.* – 1964. – V. 140. – P. 417–433.
324. *Chan K., Sofia S., Wolff L.* Turbulent compressible convection in a deep atmosphere. I. Preliminary two-dimensional results // *ApJ.* – 1982. – V. 263. – P. 935–943.
325. *Chechetkin V.M., Gershstein S.S., Imshennik V.S., Ivanova L.N., Khlopov M.Yu.* Supernovae of types I and II and the neutrino mechanism of thermonuclear explosion of degenerated carbon-oxygen stellar cores // *ApSS.* – 1980. – V. 67. – P. 61–98.
326. *Chechetkin V.M., Kowalski M.* Production of heavy elements in nature // *Nature.* – 1976. – V. 259. – P. 643–644.
327. *Chiosi C., Stalio R.* (ed). Effects of mass loss on stellar evolution. Proceed. IAU Coll. N 59. – D. Reidel, 1981.
328. *Clifford F.E., Tayler R.J.* The equilibrium distribution of nuclides in matter at high temperatures // *Mem. Roy. Astron. Soc. London.* – 1965. – V. 69. – P. 21–81.
329. *Cloutman L., Whitaker R.* On convective and semiconvective mixing in massive stars // *ApJ.* – 1980. – V. 237. – P. 900–902.
330. *Cohen M., Kuhl L.V.* Observational studies of pre-main-sequence evolution // *ApJ. Suppl.* – 1979. – V. 41. – P. 743–843.
331. *Colgate S., White R.* The hydrodynamic behavior of supernovae explosions // *ApJ.* – 1966. – V. 143. – P. 626–681.
332. *Couch R., Arnett D.* Advanced evolution of massive stars. I Secondary nucleosynthesis during helium burning // *ApJ.* – 1972. – V. 178, p. 771–777.
333. *Couch R., Schmiedekamp A., Arnett D.* S-process nucleosynthesis in massive stars: core helium burning // *ApJ.* – 1974. – V. 190. – P. 95–100.
334. *Cox A., Tabor J.* Radiative opacity tables for 40 stellar mixtures // *ApJ. Suppl.* – 1976. – V. 31. – P. 271–312.

335. Cox D.P., Tucker W.H. Ionization equilibrium and radiative cooling in a low-density plasma // *ApJ.* — 1969. — V. 157, P. 1157–1167.
336. Dicus D. Stellar energy-loss rates in a convergent theory of a weak and electromagnetic interactions // *PR.* — 1972. — V. D6. — P. 941–949.
337. Downes D. et. al. Outflow of matter in the KL nebula: the role of IRc2 // *ApJ.* — 1981. — V. 244. — P. 869–883.
338. Dravins D., Lindegren L., Nordlund A. Solar granulation: Influence of convection on spectral line asymmetries and wavelength shifts // *AA.* — 1981. — V. 96. — P. 345–364.
339. Durney B.R. The interaction of rotation with convection // *Stellar rotation* // Ed. A. Slettebak. — D. Reidel, 1970. — P. 30–36.
340. Durney B.R. On theories of Solar rotation // *Basic mechanisms of Solar activity* // Ed. Bumba, Kleczek. — D. Reidel, 1976. — P. 243–295.
341. Dyck H.H., Simon Th., Zuckerman B. Discovery of an infrared companion to T Tauri // *ApJ. Lett.* — 1982. — V. 255. — P. L 103–L106.
342. Dzembowski W. Nonradial oscillations of evolved stars. I. Quasiadiabatic approximation // *Acta Astron.* — 1971. — V. 21. — P. 289–306.
343. Eardley D.M., Lightman A.P. Inverse Compton spectra and the spectrum of Cyg X-1 // *Nature.* — 1976. — V. 262. — P. 196–197.
344. Eggleton P. The structure of narrow shells in red giants // *MN.* — 1967. — V. 135. — P. 243–250.
345. Eggleton P. Towards consistency in simple prescriptions for stellar convection // *MN.* — 1983. — V. 204. — P. 449–461.
346. El Eid M.F., Hillebrandt W. A new equation of state of supernova matter // *AA.* — 1980. — V. 42. — P. 215–226.
347. Emerson J.P. et. al. IRAS observations near young objects with bipolar outflows: L1551 and HH 46–47 // *ApJ. Lett.* — 1984. — V. 278. — P. L49–L52.
348. Epstein R.I. Lepton-driven convection in supernovae // *MN.* 1979. — V. 188. — P. 305–325.
349. Ergma E., Paczynski B. Carbon burning with convective URCA neutrinos // *Acta Astron.* — 1974. — V. 24. — P. 1–16.
350. Ergma E.V., Tutukov A.V. Evolution of carbon-oxygen dwarfs in binary systems // *Acta Astron.* — 1976. — V. 26. — P. 69–76.
351. Eriguchi Y., Müller E. A general method for obtaining equilibria of self-gravitating and rotating gases // *AA.* — 1985. — V. 146. — P. 260–268.
352. Eriguchi Y., Sugimoto D. Another equilibrium sequence of self-gravitating and rotating incompressible fluid // *PTP.* — 1981. — V. 65. — P. 1870–1875.
353. Ezer D., Cameron A.G.W. Pre-main-sequence stellar evolution with mass loss // *ApSS.* — 1971. — V. 10. — P. 52–70.
354. Faulkner J., Roxburgh I.W., Strittmatter P.A. Uniformly rotating main-sequence stars // *ApJ.* — 1968. — V. 151. — P. 203–216.
355. Feigelson E.D., DeCampli W.M. Observations of X-ray emission from T Tauri stars // *ApJ Lett.* — 1981. — V. 243. — P. L89–L94.
356. Finzi A., Wolf R. Ejection of mass by radiation pressure in planetary nebulae // *AA.* — 1971. — V. 11. — P. 418–430.
357. Flowers E., Itoh N. Transport properties of dense matter II // *ApJ.* — 1979. — V. 230. — P. 847–858.
358. Fontaine G., Graboske H.C.Jr., van Horn H.M. Equation of state for stellar partial ionization zones // *ApJ. Suppl.* — 1977. — V. 35. — P. 293–358.
359. Fowler W. The solar neutrino problem // *Preprint OAP.* — 1977. — № 507.
360. Fowler W., Caughlan G., Zimmerman B. Thermonuclear reaction rates // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1967. — V. 5. — P. 525–570.
361. Fowler W., Caughlan G., Zimmerman B. Thermonuclear reaction rates II // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1975. — V. 13. — P. 69–112.
362. Fowler W., Engebrecht C., Woosley S. Nuclear partition functions // *ApJ.* — 1978. — V. 226. — P. 984–995.
363. Fowler W., Hoyle F. Neutrino processes and pair formation in massive stars and supernovae // *ApJ. Suppl.* — 1964. — V. 9. — P. 201–319.
364. Fraley G. Supernovae explosions induced by pair-production instability // *ApSS.* — 1968. — V. 2. — P. 96–114.

365. *Friedman B., Pandariphande V.R.* Hot and cold nuclear and neutron matter // NP. — 1981. — V. A361. — P. 502–520.
366. *Friedman J., Ipser J., Parker L.* Rapidly rotating neutron star models // ApJ. — 1986. — V. 304. — P. 115–139.
367. *Fuller G., Fowler W., Newman M.* Stellar weak-interaction rates for sd-shell nuclei I. Nuclear matrix element systematics with application to Al^{26} and selected nuclei of importance to the supernova problem // ApJ. Suppl. — 1980. — V. 42. — P. 447–473.
368. *Fuller G., Fowler W., Newman M.* Stellar weak interaction rates for intermediate mass nuclei II: $A = 21$ to $A = 60$ // ApJ. — 1982. — V. 252. — P. 715–740.
369. *Fuller G., Fowler W., Newman M.* Stellar weak interaction rates for intermediate mass nuclei III: rates tables for the free nucleons and $A = 21$ to $A = 60$ // ApJ. Suppl. — 1982. — V. 48. — P. 279–295.
370. *Fuller G., Fowler W., Newman M.* Stellar weak interaction rates for intermediate mass nuclei IV. Interpolation procedures for rapidly varying lepton capture rates using effective $\lg(ft)$ values // ApJ. — 1985. — V. 293. — P. 1–16.
371. *Gahm G.F.* X-ray observations of T Tauri stars // ApJ. Lett. — 1980. — V. 242. — P. L163–L166.
372. *Gahm G.F., Fredga K., Liseau R., Dravins D.* The far UV spectrum of T Tauri star RU Lupi // AA. — 1979. — V. 73. — P. L4–L6.
373. *Gaustad J.* The opacity of diffuse cosmic matter and the early of star formation // ApJ. — 1963. — V. 138. — P. 1050–1073.
374. *Gillman R.* Plank mean cross-sections for four grain materials // ApJ. Suppl. — 1974. — V. 28. — P. 397–403.
375. *Giovannelli F., Bisnovatyi-Kogan G.S., Golynskaya I.M.* et. al. Coordinated X-ray, ultraviolet and optical observations of T Tauri stars // Proc. symp. int. "X-ray astronomy'84" // Ed. M. Oda, R. Giacconi. — Bologna, 1984. — P. 77–80.
376. *Goldreich P., Julian W.* Pulsar electrodynamics // ApJ. — 1969. — V. 157. — P. 869–880.
377. *Golenetskii S.V., Mazets E.P.* et. al. Annihilation radiation in cosmic gamma-ray bursts // Preprint LFTI im. Ioffe. — 1985. — No. 959.
378. *Gonzi G., Osaki Y.* On local theories of time-dependent convection in the stellar pulsation problem // AA. — 1980. — V. 84. — P. 304–310.
379. *v. Groote H., Hilf E.R., Takahashi K.* A new semiempirical shell correction to the droplet model. Gross theory of nuclear magics // At. data nucl. data tables. — 1976. — V. 17. — P. 418–427, 476–608.
380. *Grossman A.* The surface boundary condition and approximate equation of state for low-mass stars // Proc. symp. "Low-luminosity stars" // Ed. Sh. Kumar. — Gordon and Breach, 1969. — P. 247–254.
381. *Grossmann A.* Evolution of low-mass stars I. Contraction to the main sequence // ApJ. — 1970. — V. 161. — P. 619–632.
382. *Grossmann A., Mutschlecner J., Pauls T.* Evolution of low-mass stars II. Effects of primordial deuterium burning and nongray surface condition during pre-main-sequence contraction // ApJ. — 1970. — V. 162. — P. 613–619.
383. *Grossmann A., Graboske H.Jr.* Evolution of low-mass stars III. Effects of nonideal thermodynamic properties during the pre-main-sequence contraction // ApJ. — 1971. — V. 164. — P. 475–490.
- 383a. *Hachisu I.* A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars // ApJ. Suppl. — 1986. — V. 61. — P. 479–508.
- 383 b. *Hachisu I.* A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars II Three dimensional self-consistent field method // ApJ. Suppl. — 1986. — V. 62. — P. 461–500.
384. *Hamada T., Salpeter E.* Models for zero-temperature stars // ApJ. — 1961. — V. 134. — P. 683–698.
385. *Hanson R., Jones B.F., Lin D.N.C.* The astrometric position of T Tauri and the nature of its companion // ApJ. Lett. — 1983. — V. 270. — P. L27–L30.
386. *Harm R., Schwarzschild M.* Red giants of population II. IV // ApJ. — 1966. — V. 145. — P. 496–504.
387. *Harm R., Schwarzschild M.* Transport from a red giant to a blue nucleus after ejection of a planetary nebula // ApJ. — 1975. — V. 200. — P. 324–329.

388. *Harm R., Schwarzschild M.* Red giants of population II. III // *ApJ.* — 1964. — V. 139. — P. 594–601.
389. *Harris M., Fowler W., Caughlan G., Zimmerman B.* Thermonuclear reaction rates III // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1983. — V. 21. — P. 165–176.
390. *Hayashi Ch.* Evolution of protostars // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1966. — V. 4. — P. 171–192.
391. *Hayashi Ch., Hoshi R., Sugimoto D.* Evolution of stars // *Suppl. PTP.* — 1962. — No. 22. — P. 1–183.
392. *Hayashi Ch., Hoshi R., Sugimoto D.* Advanced phases of evolution of population II stars. Growth of the carbon core and shell helium flashes // *PTP.* — 1965. — V. 34. — P. 885–911.
393. *Henyey L.G.* et.al. A method for automatic computation of stellar evolution // *ApJ.* — 1959. — V. 129. — P. 628–636.
394. *Herbig G.* The widths of absorption lines in T Tauri-like stars // *ApJ.* — 1957. — V. 125. — P. 612–613.
395. *Herbig G.H.* Eruptive phenomena in early stellar evolution // *ApJ.* — 1977. — V. 217. — P. 693–715.
396. *Hillebrandt W.* The rapid neutron capture process and the synthesis of heavy and neutron-rich elements // *Space. Sci. Rev.* — 1978. — V. 21. — P. 639–702.
397. *Hillebrandt W.* Stellar collapse and supernovae explosions // *Proc. NATO-ASI "High energy phenomena around collapsed stars" // Cargese, 1985.*
398. *Hillebrandt W., Nomoto K., Wolff R.* Supernovae explosions of massive stars. The mass range 8 to $10 M_{\odot}$ // *AA.* — 1984. — V. 133. — P. 175–184.
399. *Holmes J., Woosley S., Fowler E., Zimmerman B.* Tables of thermonuclear — reaction — rate data for neutron — induced reactions on heavy nuclei // *At. data nucl. data tables.* — 1976. — V. 18. — P. 305–412.
400. *Hoshi R.* Basis properties of a stationary accretion disk surrounding a black hole // *PTP.* — 1977. — V. 58. — P. 1191–1204.
401. *Hoshi R., Shibasaki N.* The effect of pressure gradient force on an accretion disk surrounding a black hole // *PTP.* — 1977. — V. 58. — P. 1759–1765.
402. *Houck J.R.* et.al. Unidentified point sources in the IRAS minisurvey // *ApJ. Lett.* — 1984. — V. 278. — P. L63–L66.
403. *Hoxie D.* The structure and evolution of stars of very low mass // *ApJ.* — 1970. — V. 161. — P. 1083–1099.
404. *Hunt R.* A fluid dynamical study of the accretion process // *MN.* — 1971. — V. 154. — P. 141–165.
405. *Hurlburt N., Toomre J., Massaguer J.* Two-dimensional compressible convection extending over multiple scale heights // *ApJ.* — 1984. — V. 282. — P. 557–573.
406. *Iben I.Jr.* Stellar evolution. I. The approach to the main sequence // *ApJ.* — 1965. — V. 141. — P. 993–1018.
407. *Iben I.* Stellar evolution II. The evolution of a $3 M_{\odot}$ star from main sequence through core helium burning // *ApJ.* — 1965. — V. 142. — P. 1447–1467.
408. *Iben I.* Stellar evolution. III. The evolution of a $5 M_{\odot}$ star from the main sequence through core helium burning // *ApJ.* — 1966. — V. 143. — P. 483–504.
409. *Iben I.* Stellar evolution IV. The evolution of a $9 M_{\odot}$ star from the main sequence through core helium burning // *ApJ.* — 1966. — V. 143. — P. 505–515.
410. *Iben I.* Stellar evolution V. The evolution of a $15 M_{\odot}$ star through core helium burning from the main sequence // *ApJ.* — 1966. — V. 143. — P. 516–526.
411. *Iben I.* Stellar evolution VI. Evolution from the main sequence to the red-giant branch for stars of mass $1 M_{\odot}$, $1.25 M_{\odot}$ and $1.5 M_{\odot}$ // *ApJ.* — 1967. — V. 147. — P. 624–649.
412. *Iben I.* Stellar evolution VII. The evolution of $2.25 M_{\odot}$ star from the main sequence to the helium burning phase // *ApJ.* — 1967. — V. 147. — P. 650–663.
413. *Iben I.* Stellar evolution within and off the main sequence // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1967. — V. 5. — P. 571–626.
414. *Iben I.* On the specification of the blue edge of the RR Lyrae instability trip // *ApJ.* — 1971. — V. 166. — P. 131–151.
415. *Iben I.* Post main sequence evolution of single stars // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1974. — V. 12. — P. 215–256.
416. *Iben I.* Thermal pulses; p-capture, α -capture, s-process nucleosynthesis; and convective mixing in a star of intermediate mass // *ApJ.* — 1975. — V. 196. — P. 525–547.

417. *Iben I.* Solar oscillations as a guide to solar structure // *ApJ. Lett.* – 1976. – V. 204. – P. L147–L150.
418. *Iben I.* Further adventures of a thermally pulsing star // *ApJ.* – 1976. – V. 208. – P. 165–176.
419. *Iben I.* Low-mass asymptotic giant branch evolution I // *ApJ.* – 1982. – V. 260. – P. 821–837.
420. *Iben I.* On the frequency of a planetary nebula nuclei powered by helium burning and on the frequency of white dwarfs with hydrogen-deficient atmospheres // *ApJ.* – 1984. – V. 277. – P. 333–354.
421. *Iben I.* The life and times of an intermediate mass star – in isolation / in a close binary // *Quart. J. Roy. Astron. Soc.* – 1985. – V. 26. – P. 1–39.
422. *Iben I., Kaler J., Truran J., Renzini A.* On the evolution of those nuclei of planetary nebulae, that experience a final helium shell flash // *ApJ.* – 1983. – V. 264. – P. 605–612.
423. *Iben I., Renzini A.* Asymptotic giant branch evolution and beyond // *Ann. Rev. Astron. Ap.* – 1983. – V. 21. – P. 271–342.
424. *Iben I., Renzini A.* Single star evolution I. Massive stars and early evolution of low and intermediate mass stars // *Phys. Rep.* – 1984. – V. 105. – P. 329–406.
425. *Iben I., Rood R.* Metal-poor stars. I. Evolution from the main sequence to the giant branch // *ApJ.* – 1970. – V. 159. – P. 605–617.
426. *Iben I., Tutukov A.V.* Cooling of low-mass carbon-oxygen dwarfs from the planetary nucleus stage through the crystallization stage // *ApJ.* – 1984. – V. 282. – P. 615–630.
427. *Ichimaru S.* Strongly coupled plasma: High density classical plasmas and degenerate electron liquids // *Rev. Mod. Phys.* – 1982. – V. 54. – P. 1017–1059.
428. *Ichimaru S., Utsumi K.* Enhancement of thermonuclear reaction rate due to screening by relativistic degenerate electrons long range correlation effect // *ApJ.* – 1984. – V. 286. – P. 363–365.
429. *Ilarionov A.F., Sunyaev R.A.* Why the number of galactic X-ray stars is so small? // *AA.* – 1975. – V. 39. – P. 185–195.
430. *Imshennik V.S., Nadyozhin D.K.* Neutrino chemical potential and neutrino heat conductivity with allowance for neutrino scattering // *ApSS.* – 1979. – V. 62. – P. 309–333.
431. *Itoh N.* Physics of dense plasmas and the enhancement of thermonuclear reaction rates due to strong screening // *Supl. PTP.* – 1981. – No. 70. – P. 132–141.
432. *Itoh N., Mitaku S., Iyetomi H., Ichimaru S.* Electrical and thermal conductivities of dense matter in the liquid metal phase I. High-temperature results // *ApJ.* – 1983. – V. 273. – P. 774–782.
433. *Itoh N., Totsuji H., Ichimaru S.* Enhancement of thermonuclear reaction rates due to strong screening // *ApJ.* – 1977. – V. 218. – P. 477–483; 1978. – V. 220. – P. 742.
434. *Itoh N., Totsuji H., Ichimaru S., De Witt H.* Enhancement of thermonuclear reaction rates due to strong screening II. Ionic mixtures // *ApJ.* – 1979. – V. 234. – P. 1079–1084; 1980. – V. 239. – P. 415.
435. *Ivanova L.N., Imshennik V.S., Chechetkin V.M.* Pulsation regime of the thermonuclear explosion of a star's dense carbon core // *ApSS.* – 1974. – V. 31. – P. 497–514.
436. *Jackson S.* Rapidly rotating stars. The coupling of the Henyey and the self-consistent-fluid methods // *ApJ.* – 1970. – V. 161. – P. 579–585.
437. *James R.A.* The structure and stability of rotating gas masses // *ApJ.* – 1964. – V. 140. – P. 552–582.
438. *Juman C.* Barion star models // *ApJ.* – 1965. – V. 141. – P. 187–194.
439. *Kamija Y.* The collapse of rotating gas clouds // *PTP.* – 1977. – V. 58. – P. 802–815.
440. *Keene J. et. al.* Far-infrared detection of low-luminosity star formation in the Bok globule B335 // *ApJ. Lett.* – 1983. – V. 274. – P. L43–L47.
441. *Kellman S., Gaustad J.* Rosseland and Planck mean absorption coefficients for particles of ice, graphite and silicon dioxide // *ApJ.* – 1963. – V. 138. – P. 1050–1073.
442. *Kippenhahn R.* Differential rotation in stars with convective envelopes // *ApJ.* – 1963. – V. 137. – P. 664–678.
443. *Kippenhahn R., Thomas H.C., Weigert A.* Sternentwicklung IV. Zentrales Wasserstoff und Heliumbrenner bei einem Stern von 5 Sonnenmassen // *Zeit. Astrophys.* – 1965. – V. 61. – P. 241–267.

444. *Kippenhahn R., Thomas H.C., Weigert A.* Sternentwicklung V. Der Kohlenstoff-Flash bei einem Stern von 5 Sonnenmassen // *Zeit. Astrophys.* — 1966. — Bd. 64. — S. 373–394.
445. *Kippenhahn R., Thomas H.C.* Rotation and stellar evolution // *Proc. IAU Symp. No. 93* "Fundamental problems of the theory of stellar evolution" // Ed. D. Sugimoto, D. Lamb, D. Shramm. — 1981. — D. Reidel. — P. 237–256.
446. *Kippenhahn R., Weigert A., Hofmeister E.* Methods for calculating stellar evolution // *Meth. Comput. Phys.* — 1967. — V. 7. — P. 129–190.
447. *Kohjima Y., Itoh N., Munakata H.* Neutrino energy losses in stellar interiors II. Axial-vector contribution to the plasma neutrino energy loss rate // *ApJ.* — 1986. — V. 310. — P. 815–819.
448. *Kuan P.* Emission envelopes of T Tauri stars // *ApJ.* — 1975. — V. 202. — P. 425–432.
449. *Kuhi L.V.* Mass loss from T Tauri stars // *ApJ.* — 1964. — V. 140. — P. 1409–1433.
450. *Kulkarni S.R.* Optical identification of binary pulsars implications for magnetic field decay in neutron stars // *ApJ. Lett.* — 1986. — V. 306. — P. L8 · L90.
451. *Kundt W.* Are supernova explosions driven by magnetic strings? // *Nature.* — 1976. — V. 261. — P. 673–674.
452. *Kutter G.S., Savedoff M.P., Schuerman D.W.* A mechanism for the production of planetary nebulae // *ApSS.* — 1969. — V. 3. — P. 182–197.
453. *Kutter G.S., Sparks W.* Studies of hydrodynamic events in stellar evolution III. Ejection of planetary nebulae // *ApJ.* — 1974. — V. 192. — P. 447–455.
454. *Kwok S.* From red giants to planetary nebulae // *ApJ.* — 1982. — V. 258. — P. 280–288.
455. *Lamb D.Q., Pethick C.J.* Effects of neutrino degeneracy in supernova models // *ApJ. Lett.* — 1976. — V. 209. — P. L77–L82.
456. *Lamb D.Q., Lattimer J.M., Pethick C.J., Ravenhall D.G.* Hot dense matter and stellar collapse // *PR. Lett.* — 1978. — V. 41. — P. 1623–1626.
457. *Lamb D.Q., Van Horn H.M.* Evolution of crystallizing pure C¹² white dwarfs // *ApJ.* — 1975. — V. 200. — P. 306–323.
458. *Lamb F.K.* Neutron star binaries, pulsars and burst sources // *Preprint Urbana Univ.* — 1981.
459. *Lamb S., Iben I., Howard M.* On the evolution of massive stars through the core carbon-burning phase // *ApJ.* — 1976. — V. 207. — P. 209–232.
460. *Lamers H.* The dependence of mass loss on the basic stellar parameters // *Effects of mass loss on stellar evolution* // Ed. C. Chiosi, R. Stalio. — D. Reidel, 1981. — P. 19–23.
461. *Lampe M.* Transport coefficients of degenerate plasma // *PR.* — 1968. — V. 170. — P. 306–319.
462. *Langake K., Wiescher M., Fowler W., Gorres J.* A new estimate of the $\text{Ne}^{19}(\text{p}, \gamma)\text{Na}^{20}$ and $\text{O}^{15}(\alpha, \gamma)\text{Ne}^{19}$ reaction rates at stellar energies // *Preprint OAP.* — 1985. — No. 659. — P. 1–17.
463. *Larson R.* The evolution of protostars — theory // *Found. Cosm. Phys.* — 1973. — V. 1. — P. 1–70.
464. *Lattimer J., Mazurek T.* Leptonic overturn and shocks in collapsing stellar cores // *ApJ.* — 1981. — V. 246. — P. 955–965.
465. *Lattimer J.* The equation of state of hot dense matter and supernovae // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* — 1981. — V. 31. — P. 337–374.
466. *Lattimer J., Mazurek T.* Stellar implosion shocks and convective overturn // *Proc. DUMAND-1980.*
467. *Le Blank L.M., Wilson J.R.* A numerical example of the collapse of a rotating magnetized star. // *ApJ.* — 1970. — V. 161. — P. 541–551.
468. *Ledoux P.* Non-radial oscillations // *Proc. IAU Symp. No. 59* // ed. P. Ledoux, A. Noels, A.W. Rodgers. — D. Reidel, 1974. — P. 135–173.
469. *Lewellyn-Smith C.H.* Neutrino reactions at accelerator energies // *Phys. Rep.* — 1972. — V. 3C. — P. 261–379.
470. *Lighthill H.J.* On the stability of small planetary cores (II) // *MN.* — 1950. — V. 110. — P. 339–342.
471. *de Loore C.* The influence of mass loss on the evolution of binaries // *Effects of mass loss on stellar evolution* // ed. C. Chiosi, R. Stalio. — D. Reidel, 1981. — P. 405–427.
472. *Lucy L.* Formation of planetary nebulae // *AJ.* — 1967. — V. 72. — P. 813.
473. *Lucy L.B.* Gravity-darkening for stars with convective envelopes // *Zeit. Astrophys.* — 1967. — V. 65. — P. 89–92.

- 473a. *Lyne A.G. et. al.* The discovery of a millisecond pulsar in the globular cluster M28 // *Nature*. – 1987. – V. 328. – P. 399–401.
474. *Mac Donald J.* The effect of a binary companion on a nova outburst // *MN*. – 1980. – V. 191. – P. 933–949.
475. *Maeder A.* Stellar evolution III: the overshooting from convective cores // *AA*. – 1975. – V. 40. – P. 303–310.
476. *Maeder A.* The most massive stars evolving to red supergiants: evolution with mass loss, WR stars, as post-red supergiants and pre-supernovae // *AA*. – 1981. – V. 99. – P. 97–107.
477. *Maeder A.* Grid of evolutionary models for upper part of the HR diagram, mass loss and the turning of some red supergiants into WR stars // *AA*. – 1981. – V. 102. – P. 401–410.
478. *Makashima K. et. al.* Simultaneous X-ray and optical observations of GX 339–4 in an X-ray high state // *ApJ*. – 1986. – V. 308. – P. 635–643.
479. *Malone R., Johnson M., Bethe H.* Neutron star models with realistic high-density equations of state // *ApJ*. – 1975. – V. 199. – P. 741–748.
480. *Massaguer J.M., Latour J., Toomre J., Zahn J.-P.* Penetrative cellular convection in a stratified atmosphere // *AA*. – 1984. – V. 140. – P. 1–16.
481. *Mathews G., Dietrich F.* The $N^{13}(p, \gamma)O^{14}$ thermonuclear reaction rate and the hot CNO cycle // *ApJ*. – 1984. – V. 287. – P. 969–976.
- 481a. *Mayle R., Wilson J.R., Schramm D.N.* Neutrinos from gravitational collapse // *ApJ*. – 1987. – V. 318. – P. 288–306.
482. *Mazurek T.* Degeneracy effects on neutrino mass ejection in supernovae // *Nature*. – 1974. – V. 252. – P. 287–289.
483. *Mestel L.* On the theory of white dwarf stars. I. The energy sources of white dwarfs // *MN*. – 1952. – V. 112. – P. 583–594.
484. *Mestel L.* On the theory of white dwarf stars II. The accretion of interstellar matter by white dwarfs // *MN*. – 1952. – V. 112. – P. 598–605.
485. *Mestel L., Ruderman M.A.* The energy content of a white dwarf and its rate of cooling // *MN*. – 1967. – V. 136. – P. 27–38.
486. *Meyers W., Swiatecki W.* Nuclear masses and deformations // *NP*. – 1966. – V. 81. – P. 1–60.
487. *Migdal A.B., Chernoutsan A.I., Mishustin I.N.* Pion condensation and dynamics of neutron stars // *Phys. Lett.* – 1979. – V. 83B. – P. 158–160.
488. *Mittler H.* Thermonuclear ion-electron screening at all densities. I. Static solution // *ApJ*. – 1977. – V. 212. – P. 513–532.
489. *Morton D.* Mass loss from three OB supergiants in Orion // *ApJ*. – 1967. – V. 150. – P. 535–542.
490. *Miller E., Hillebrandt W.* A magnetohydrodynamical supernova model // *AA*. – 1979. – V. 80. – P. 147–154.
491. *Moss D.* Models for rapidly rotating pre-main-sequence stars // *MN*. – 1973. – V. 161. – P. 225–237.
492. *Moss D.* Magnetic star models: toroidal fields and circulation // *MN*. – 1977. – V. 178. – P. 51–59.
493. *Moss D.* Time dependent models of rotating magnetic stars // *MN*. – 1984. – V. 209. – P. 607–639.
494. *Muchotrzeb B.* Transonic accretion flow in a thin disk around a black hole II // *Acta Astron.* – 1983. – V. 33. – P. 79–87.
495. *Muchotrzeb B., Paczynski B.* Transonic accretion flow in a thin disk around a black hole // *Acta. Astron.* – 1982. – V. 32. – P. 1–11.
496. *Munakata H., Kohyama Y., Itoh N.* Neutrino energy loss in stellar interiors // *ApJ*. – 1985. – V. 296. – P. 197–203.
497. *Myra E. et. al.* The effect of neutrino transport on the collapse of iron stellar cores // Preprint UPR. – 1986. – No. 030 T.
498. *Nadyozhin D.K.* The collapse of iron-oxygen stars: physical and mathematical formulation of the problem and computational method // *ApSS*. – 1977. – V. 49. – P. 399–425.
499. *Nadyozhin D.K.* Gravitational collapse of iron cores with masses 2 and 10 $M_{\odot}$ // *ApSS*. – 1977. – V. 51. – P. 283–302.

500. *Nadyozhin D.K.* The neutrino radiation for a hot neutron star formation and the envelope outburst problem // *ApSS.* — 1978. — V. 53. — P. 131–153.
501. *Nakazawa K.* Effect of electron capture on temperature and chemical composition in collapsing dense stars // *PTP.* — 1973. — V. 49. — P. 1932–1946.
502. *Nakazawa K., Hayashi C., Takahara M.* Isothermal collapse of rotating gas clouds // *PTP.* — 1976. — V. 56. — P. 515–530.
503. *Nakazawa K., Murai T., Hoshi R., Hayashi C.* Effect of electron capture on the temperature in dense stars // *PTP.* — 1970. — V. 44. — P. 829–830.
504. *Negele J., Vautherin D.* Neutron star matter at sub-nuclear densities // *NP.* — 1973. — V. A207. — P. 298–320.
505. *Neugebauer G. et. al.* The infrared astronomical satellite (IRAS) mission // *ApJ. Lett.* — 1984. — V. 278. — P. L1–L6.
506. *Newman M.* S-process studies: the exact solution // *ApJ.* — 1978. — V. 219. — P. 676–689.
507. *Nomoto K.* Accreting white dwarf models for type I supernovae II. Off-center detonation supernovae // *ApJ.* — 1982. — V. 257. — P. 780–792.
508. *Nomoto K.* Neutron star formation in theoretical supernovae — low mass stars and white dwarfs // *Proc. Symp. IAU No. 125 "The origin and evolution of neutron stars"* // Ed. D. Helfand, J. Huang. — D. Reidel, 1986.
509. *Nomoto K., Thielemann F.-K., Wheeler J.C.* Explosive nucleosynthesis and type I supernovae // *ApJ. Lett.* — 1980. — V. 279. — P. L23–L26.
510. *Nomoto K., Thielemann F.-K., Miyaji S.* The triple alpha reaction at low temperatures in accreting white dwarfs and neutron stars // *AA.* — 1985. — V. 149. — P. 238–245.
511. *Nomoto K., Tsuruta S.* Cooling of young neutron stars and the Einstein X-ray observations // *ApJ. Lett.* — 1981. — V. 250. — P. L19–L23.
512. *Nomoto K., Tsuruta S.* Cooling of neutron stars: effects of finite scale of thermal conduction // *ApJ.* — 1987. — V. 312. — P. 711–726.
513. *Nordlung A.* On convection in stellar atmospheres // *AA.* — 1974. — V. 32. — P. 407–422.
514. *Norman M.L., Wilson J.R., Barton R.T.* A new calculation on rotating protostellar collapse // *ApJ.* — 1980. — V. 239. — P. 968–981.
515. *Novikov I.D., Thorne K.S.* Astrophysics of black holes // *Black Holes* // Ed. B. and C. De Witt. — Gordon and Breach, 1973. — P. 343–561.
516. *Ohnishi T.* Gravitational collapse of rotating magnetized star // *Tech. Rep. Inst. At. En. Kyoto Univ.* — 1983. — No. 198.
517. *Oppenheimer J., Volkoff G.* On massive neutron cores // *PR.* — 1939. — V. 55. — P. 374–381.
518. *Ostriker J., Gunn J.* Do pulsars make supernovae? *ApJ Lett.* — 1971. — V. 164. — P. L95–L104.
519. *Ostriker J., Mark J.* Rapidly rotating stars I. The self-consistent-fluid method // *ApJ.* — 1968. — V. 151. — P. 1075–1088.
520. *Paczynski B.* Envelopes of red supergiants // *Acta Astron.* — 1969. — V. 19. — P. 1–22.
521. *Paczynski B.* Evolution of single stars I. Stellar evolution from main sequence to white dwarf or carbon ignition // *Acta Astron.* — 1970. — V. 20. — P. 47–58.
522. *Paczynski B.* Evolution of single stars II. Core helium burning in population I stars // *Acta Astron.* — 1970. — V. 20. — P. 195–212.
523. *Paczynski B.* Evolution of single stars. III. Stationary shell source // *Acta Astron.* — 1970. — V. 20. — P. 287–309.
524. *Paczynski B.* Evolution of single stars V. Carbon ignition in population I stars // *Acta Astron.* — 1971. — V. 21. — P. 271–288.
525. *Paczynski B.* Evolution of single stars VI. Model nuclei of planetary nebulae // *Acta Astron.* — 1971. — V. 21. — P. 471–435.
526. *Paczynski B.* Carbon ignition in degenerate stellar cores // *Ap. Lett.* — 1972. — V. 11. — P. 53–55.
527. *Paczynski B.* Linear series of stellar models I. Thermal stability of stars // *Acta Astron.* — 1972. — V. 22. — P. 163–174.
528. *Paczynski B.* Evolution of stars with $M \leq 8 M_{\odot}$ // *Proc. Symp. IAU No. 66 "Late stages of stellar evolution"* // Ed. R. Taylor. — D. Reidel, 1974. — P. 62–69.

529. Paczynski B. Helium flash in population I stars // *ApJ*. — 1974. — V. 192. — P. 483–485.
530. Paczynski B. Core mass-interflash period relation for double-shell source stars // *ApJ*. — 1975. — V. 202. — P. 558–560.
531. Paczynski B. Helium shell flashes // *ApJ*. — 1977. — V. 214. — P. 812–818.
532. Paczynski B. Models of X-ray bursters with radius expansion // *ApJ*. — 1983. — V. 267. — P. 315–321.
533. Paczynski B., Bismovatyi-Kogan G.S. A model of a thin accretion disk around a black hole // *Acta Astron.* — 1981. — V. 31. — P. 283–291.
534. Paczynski B., Schwarzenberg-Czerny A. Disk accretion in U Geminae // *Acta Astron.* — 1980. — V. 30. — P. 127–141.
535. Paczynski B., Witta P. Thick accretion disks and supercritical luminosities // *AA*. — 1980. — V. 88. — P. 23–31.
536. Paczynski B., Ziolkowski J. On the origin of planetary nebulae and Mira variables // *Acta Astron.* — 1968. — V. 18. — P. 255–266.
537. Pandharipande V. Dense neutron matter with realistic interaction // *NP*. — 1971. — V. A174. — P. 641–656.
538. Pandharipande V., Pines D., Smith R. Neutron star structure: theory, observation and speculation // *ApJ*. — 1976. — V. 208. — P. 550–566.
539. Papaloizou J.C.B. Nonlinear pulsations of upper main sequence stars I. A perturbation approach // *MN*. — 1973. — V. 162. — P. 143–168.
540. Papaloizou J.C.B. Nonlinear pulsations of upper main sequence stars II. Direct numerical investigations // *MN*. — 1973. — V. 162. — P. 169–187.
541. Papaloizou J.C.B., Whelan J.A.J. The structure of rotating stars: the J^2 method and results for uniform rotation // *MN*. — 1973. — V. 164. — P. 1–10.
542. Patterson J. The evolution of cataclysmic and low-mass X-ray binaries // *ApJ, Suppl.* — 1984. — V. 54. — P. 443–493.
543. Petrosian V., Beaudet G., Salpeter E.E. Photoneutrino energy loss rates // *PR*. — 1967. — V. 154. — P. 1445–1454.
544. Pollock E.L., Hansen J.P. Statistical mechanics of dense ionized matter II. Equilibrium properties and melting transition of the crystallized one-component plasma // *PR*. — 1973. — V. 8A. — P. 3110–3122.
- 544a. Pontecorvo B., Bilenky S. Neutrino today // Preprint JINR. — 1987. — E1,2–87–567, Dubna.
545. Radhakrishnan V. On the nature of pulsars // *Contemp. Phys.* — 1982. — V. 23. — P. 207–231.
546. Raikh M.E., Yakovlev D.G. Thermal and electrical conductivities of crystals in neutron stars and degenerate dwarfs // *ApSS*. — 1982. — V. 87. — P. 193–203.
547. Ramsey W.H. On the stability of small planetary cores (I) // *MN*. — 1950. — V. 110. — P. 325–338.
MN. — 1950. — V. 110. — P. 325–
548. Ravenhall D., Bennett C., Pechick C. Nuclear surface energy and neutron-star matter // *PR, Lett.* — 1972. — V. 28. — P. 978–981.
549. Reimers D. Winds in red giants // *Physical processes in red giants* // Ed. I. Iben, A. Renzini. — D. Reidel, 1981. — P. 269–284.
550. Regev O., Livio M. X-ray bursters — hot way to chaos // *Chaos in astrophysics* // Ed. Perdang J.M., J.R. Buchler, E.A. Spiegel. — D. Reidel, 1985.
551. Rosenfeld L. // "Astrophys. and Gravitation", Proc. 16 Solvay conf. on Phys. — Univ. de Bruxelles, 1974, 174 p.
552. Rose W., Smith R. Final evolution of a low-mass star I // *ApJ*. 1970. — V. 159. — P. 903–912.
553. Roth M., Weigert A. Example of multiple solutions for equilibrium stars with helium cores // *AA*. — 1972. — V. 20. — P. 13–18.
554. Sakashita S., Hayashi C. Internal structure and evolution of very massive stars // *PTP*. — 1959. — V. 22. — P. 830–834.
555. Salpeter E.E. Zero temperature plasma // *ApJ*. — 1961. — V. 134. — P. 669–682.
556. Salpeter E.E. Accretion of interstellar matter by massive objects // *ApJ*. — 1964. — V. 140. — P. 796–799.
557. Salpeter E.E., Van Horn H.M. Nuclear reaction rates at high densities // *ApJ*. — 1965. — V. 155. — P. 183–202.

558. *Salpeter E.E., Zapolsky H.S.* Theoretical high-pressure equations of state including correlation energy // PR. - 1967. - V. 158. - P. 876-886.
559. *Sampson D.H.* The opacity at high temperatures due to Compton scattering // ApJ. - 1959. - V. 129. - P. 734-751.
560. *Sato K.* Nuclear composition in the inner crust of neutron stars // PTP. - 1979. - V. 62. - P. 957-968.
561. *Scalo J.* Observations and theories of mixing in red giants // Physical processes in red giants // Ed. I. Iben, A. Renzini. - D. Reidel, 1981. - P. 77-114.
562. *Schinder P.* et. al. Neutrino emission by the pair, plasma and photoprocesses in the Weinberg-Salam model // ApJ. - 1987. - V. 313. - P. 531-542.
563. *Schonberger D.* Asymptotic giant branch evolution with steady mass loss // AA. - 1979. - V. 79. - P. 108-114.
564. *Schonberger D.* Late stages of stellar evolution: central stars of planetary nebulae // AA. - 1981. - V. 103. - P. 119-130.
565. *Schonberger D.* Late stages of stellar evolution II. Mass loss and the transition of asymptotic giant branch into hot remnant // ApJ. - 1983. - V. 272. - P. 708-714.
566. *Schonberger D.* Late stages of stellar evolution III. The observed evolution of central stars of planetary nebulae // AA. - 1986. - V. 169. - P. 189-193.
567. *Schramm D., Wagoner R.* Element production in the early universe // Ann. Rev. Nucl. Sci. - 1977. - V. 27. - P. 37-74.
568. *Schwarzschild M., Harm R.* On the maximum mass of stable stars // ApJ. - 1959. - V. 129. - P. 637-646.
569. *Schwarzschild M., Harm R.* Red giants of population II. II // ApJ. - 1962. - V. 136. - P. 158-165.
570. *Schwarzschild M., Harm R.* Thermal instability in non-degenerate stars // ApJ. - 1965. - V. 142. - P. 855-867.
571. *Schwarzschild M., Harm R.* Hydrogen mixing by helium-shell flashes // ApJ. - 1967. - V. 150. - P. 961-970.
572. *Schwarzschild M., Harm R.* Stability of the Sun against spherical thermal perturbations // ApJ. - 1973. - V. 184. - P. 5-8.
573. *Schwarzschild M., Seiberg H.* Red giants of population II. I // ApJ. - 1962. - V. 136. - P. 150-157.
574. *Seeger P., Fowler W., Clayton D.* Nucleosynthesis of heavy elements by neutron capture // ApJ. Suppl. - 1965. - V. 11. - P. 121-166.
575. *Shakura N.I., Sunyaev R.A.* Black holes in binary systems. Observational appearance // AA. - 1973. - V. 24. - P. 337-355.
576. *Shaviv G., Salpeter E.E.* Convective overshooting in stellar interior models // ApJ. - 1973. - V. 184. - P. 191-200.
577. *Shima E., Matsuda T., Takeda H., Sawada K.* Hydrodynamic calculations on axisymmetric accretion flow // MN. - 1985. - V. 217. - P. 367-386.
578. *Slattery W.L., Doolen G.D., De Witt H.E.* N dependence on the classical one-component plasma Monte-Carlo calculations // PR. A. - 1982. - V. A26. - P. 2255-2258.
579. *Smak J.* Eruptive binaries VI. Rediscussion of U Geminorum // Acta Astron. - 1976. - V. 26. - P. 277-300.
580. *Smak J.* Accretion in cataclysmic binaries IV. Accretion discs in dwarf novae // Acta Astron. - 1984. - V. 34. - P. 161-189.
581. *Sofia S., Chau K.* Turbulent compressible convection in a deep atmosphere II. Two dimensional results for main-sequence A5 and FO type envelopes // ApJ. - 1984. - V. 282. - P. 550-556.
582. *Sramek R., Panagia N., Weiler K.* Radio emission from type I supernova SN 1983.51 in NGC 5236 // ApJ. Lett. - 1984. - V. 285. - P. L59-L62.
583. *Stahler S.* The birthline for low-mass stars // ApJ. - 1983. - V. 274. - P. 822-829.
584. *Stahler S., Shu F., Taam R.* The evolution of protostars I. Global formulation and results // ApJ. - 1980. - V. 241. - P. 637-654.
585. *Stahler S., Shu F., Taam R.* The evolution of protostars II. The hydrostatic core // ApJ. - 1980. - V. 242. - P. 226-241.
586. *Stahler S., Shu F., Taam R.* The evolution of protostars III. The accretion envelope // ApJ. - 1981. - V. 248. - P. 727-737.
587. *Stothers R., Chin C.* Stellar evolution at high mass based on the Ledoux criterion for convection // ApJ. - 1973. - V. 179. - P. 555-568.

588. *Stothers R., Chin C.* Stellar evolution at high masses including the effects of a stellar wind // *ApJ.* — 1979. — V. 233. — P. 267–279.
589. *Stothers R., Chin C.* Stellar evolution at high mass with convective core overshooting // *ApJ.* — 1985. — V. 292. — P. 222–227.
590. *Strom S.E., Strom K., Rood R.T., Iben I.* On the evolutionary status of stars above the horizontal branch in globular clusters // *AA.* — 1970. — V. 8. — P. 243–250.
591. *Sugimoto D.* Helium flash in less massive stars // *PTP.* — 1964. — V. 32. — P. 703–725.
592. *Sugimoto D.* On the numerical stability of computations of stellar evolution // *ApJ.* — 1970. — V. 159. — P. 619–628.
593. *Sugimoto D., Nomoto K.* Presupernova models and supernovae // *Space Sci. Rev.* — 1980. — V. 25. — P. 155–227.
594. *Sugimoto D., Nomoto K., Eriguchi Y.* Stable numerical method in computations of stellar evolution // *Suppl. PTP.* — 1981. — № 70. — P. 115–131.
595. *Sugimoto D., Yamamoto Y.* Second helium flash and an origin of carbon stars // *PTP.* — 1966. — V. 36. — P. 17–36.
596. *Supernova 1987A, Proc. Workshop ESO, July 1987.*
597. *Sweigart A.* A method for suppression of the thermal instability in helium-shell burning stars // *ApJ.* — 1971. — V. 168. — P. 79–97.
598. *Sweigart A.* Initial asymptotic branch evolution of population II stars // *AA.* — 1973. — V. 24. — P. 459–464.
599. *Sweigart A., Mengel J., Demarque P.* On the origin of the blue halo stars // *AA.* — 1974. — V. 30. — P. 13–19.
600. *Sunyaev R.A., Titarchuk L.G.* Comptonization of X-rays in plasma clouds. Typical radiation spectra // *AA.* — 1980. — V. 86. — P. 121–138.
601. *Sztajno M. et al.* X-ray bursts from GX 17+2, a new approach // *Preprint MPE.* — 1986. — No. 48.
602. *Talbot R.J.* Nonlinear pulsations of unstable massive main-sequence stars I. Small-amplitude tests of an approximation technique // *ApJ.* — 1971. — V. 163. — P. 17–27.
603. *Talbot R.J.* Nonlinear pulsations of unstable massive main-sequence stars II. Finite-amplitude stability // *ApJ.* — 1971. — V. 165. — P. 121–138.
604. *Tassoul J.-L., Tassoul M.* Meridional circulation in rotating stars VIII. The solar spin-down problem // *ApJ.* — 1984. — V. 286. — P. 350–358.
605. *Taylor J.H., Weisberg J.M.* A new test of general relativity: gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16 // *ApJ.* — 1982. — V. 253. — P. 908–920.
606. *Tohline J.E.* Ring formation in rotating protostellar clouds // *ApJ.* — 1980. — V. 236. — P. 160–171.
607. *Tomonaga S.* Innere Reibung und Wärmeleitfähigkeit der Kernmaterie // *Zeit. Phys.* — 1938. — V. 110. — P. 573–604.
608. *Trautvetter H. et al.* The Ne-Na cycle and the $C^{12} + \alpha$ reaction // *Proc. Second Workshop on "Nuclear Astrophysics"* // *Preprint MPA.* — 1983. — No. 90. — P. 24–33.
609. *Trimble V.* The origin and abundances of chemical elements // *Rev. Mod. Phys.* — 1975. — V. 47. — P. 877–976.
610. *Tscharnutter W.* On the collapse of rotating protostars // *AA.* — 1975. — V. 39. — P. 207–212.
611. *Uehling E.A., Uhlenbeck G.E.* Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases I. // *PR.* — 1933. — V. 43. — P. 552–561; II. // *PR.* — 1934. — V. 46. — P. 917–929.
612. *Ulrich R.* A nonlocal mixing-length theory of convection for use in numerical calculations // *ApJ.* — 1976. — V. 207. — P. 564–573.
613. *Unno W.* Development of the stellar convection theory // *Suppl. PTP.* — 1981. — No. 70. — P. 101–114.
614. *Unno W., Kondo M.* The Eddington approximation generalized for radiative transfer in spherically symmetric systems I. Basic method // *Publ. Astron. Soc. Japan.* — 1976. — V. 28. — P. 347–354.
615. *Unno W., Kondo M.* The Eddington approximation generalized for radiative transfer in spherically symmetric systems II. Non-gray extended dust-shell models // *Publ. Astron. Soc. Japan.* — 1977. — V. 29. — P. 693–710.

616. *Unno W., Osaki Y., Ando H., Shibahashi H.* Nonradial oscillations of stars. — Tokyo.: Tokyo Univ. Press, 1979.
617. *Upton E.K.L., Little S.J., Dworetzky M.M.* Dynamical stability in pre-main-sequence stars // *ApJ.* — 1968. — V. 154. — P. 597–611.
618. *Vanbeveren D.* Evolution with mass loss: massive stars, massive binaries // Ph. D. Thesis, Brussel Univ., 1980.
619. *Van den Hulst J.* et. al. Radio discovery of a young supernova // *Nature.* — 1983. — V. 306. — P. 566–568.
620. *VanHorn H.M.* Crystallization of white dwarfs // *ApJ.* — 1968. — V. 151. — P. 227–238.
621. *Vardya M.S.* Hydrogen-Helium adiabats for late type stars // *ApJ. Suppl.* — 1960. — V. 4. — P. 281–336.
622. *Vardya M.S.* Thermodynamics of a solar composition gaseous mixture // *MN.* — 1965. — V. 129. — P. 205–213.
623. *Wagoner R.* Synthesis of the elements within objects exploding from very high temperatures // *ApJ. Suppl.* — 1969. — V. 18. — P. 247–296.
624. *Wallace R.K., Woosley S.E.* Explosive hydrogen burning // *ApJ. Suppl.* — 1981. — V. 45. — P. 389–420.
625. *Weaver T., Woosley S.* Evolution and explosion of massive stars // *Ann. New-York Acad. Sci.* — 1980. — V. 336. — P. 335–357.
626. *Weaver T., Zimmerman G., Woosley S.* Presupernova evolution of massive stars // *ApJ.* — 1978. — V. 225. — P. 1021–1029.
627. *Weigert A.* Sternentwicklung VI. Entwicklung mit Neutrinoverlust und thermische Pulse der Helium-Schalenquelle bei einem Stern von 5 Sonnenmassen // *Zeit. Astrophys.* — 1966. — V. 64. — P. 395–425.
628. *Weir A.D.* Axisymmetric convection in rotating sphere. Part I. Stress-free surface // *J. Fluid. Mech.* — 1976. — V. 75. — P. 49–79.
629. *Wendell C.E., Van Horn H.M., Sargent D.* Magnetic field evolution in white dwarfs // *ApJ.* — 1987. — V. 313. — P. 284–297.
630. *Westbrook Ch., Tarter B.* On protostellar evolution // *ApJ.* — 1975. — V. 200. — P. 48–60.
631. *Wiedemann V.* The initial/final mass relation for stellar evolution with mass loss // Effects of mass loss on stellar evolution // ed. C. Chiosi, R. Stalio. — D. Reidel, 1981. — P. 339–349.
632. *Wilson L.A.* FeI fluorescence in T Tauri stars II. Clues to the velocity field in the circumstellar envelopes // *ApJ.* — 1975. — V. 197. — P. 365–370.
633. *Wilson J.R., Mayle R., Woosley S., Weaver T.* Stellar core collapse and supernova // *Ann. New-York Acad. Sci.* — 1986. — V. 470. — P. 267–293.
634. *Wood P.R.* Dynamical models of asymptotic-giant-branch stars // *Proc. IAU Symp.* № 59 "Stellar instability and evolution" // Ed. P. Ledoux et. al. — D. Reidel, 1974. — P. 101–102.
635. *Wood P.R.* Pulsation and mass loss in Mira variables // *ApJ.* — 1979. — V. 227. — P. 220–231.
636. *Wood P.R., Faulkner D.J.* Hydrostatic evolutionary sequences for the nuclei of planetary nebula // *Apl.* — 1986. — V. 307. — P. 659–674.
637. *Woodward P.* Theoretical models of star formation // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1978. — V. 16. — P. 555–584.
638. *Woosley S., Fowler W., Holmes J., Zimmerman B.* Semiempirical thermonuclear reaction-rate data for intermediate mass nuclei // *At. Data Nucl. Data Tables.* — 1978. — V. 22. — P. 371–441.
639. *Woosley S., Fowler W., Holmes J., Zimmerman B.* Tables of thermonuclear reaction rate data for intermediate mass nuclei // Preprint OAP. — 1975. — No. 422. — P. 1–15, A1–A179.
640. *Woosley S., Weaver T.* Theoretical models for type I and type II supernovae // *Nucleosynthesis and its implications on nuclear and particle physics* // ed. J. Audouze, N. Mathieu. — D. Reidel, 1986. — P. 145–166.
641. *Wynn-Williams C.* The search for infrared protostar // *Ann. Rev. Astron. Ap.* — 1982. — V. 20. — P. 587–618.
642. *Yorke H.* The evolution of protostellar envelopes of masses $3 M_{\odot}$ and $10 M_{\odot}$ I. Structure and hydrodynamic evolution // *AA.* — 1979. — V. 80. — P. 308–316.
643. *Yorke H.* The evolution of protostellar envelopes of masses $3 M_{\odot}$ and $10 M_{\odot}$ II. Radiation transfer and spectral appearance // *AA.* — 1979. — V. 85. — P. 215–220.

644. *Yorke H.* Protostars and their evolution // Proc. ESO Conf. "Scientific importance of high angular resolution of infrared and optical wavelength". - Garching, 1981. - P. 319-340.
645. *Yorke H., Krugel H.* The dynamical evolution of massive protostellar clouds // AA. - 1977. - V. 54. - P. 183-194.
646. *Yorke H., Shustov B.M.* The spectral appearance of dusty protostellar envelopes // AA. - 1981. - V. 98. - P. 125-132.
647. *Zapolsky H.S., Salpeter E.E.* The mass-radius relations for cold spheres of low mass // ApJ. - 1969. - V. 158. - P. 809-813.
648. *Zhevakin S.A.* Physical basis of the pulsation theory of variable stars // Ann. Rev. Astron. Ap. - 1963. - V. 1. - P. 367-400.
649. *Ziebarth K.* On the upper mass limit for main sequence stars // ApJ. - 1970. - V. 162. - P. 947-962.
650. *Zimmerman B., Fowler W., Caughlan G.* Tables of thermonuclear reaction rates // Preprint OAP. - 1975. - No. 399. - P. 1-35.
651. *Ziolkowski J.* Evolution of massive stars // Acta Astron. - 1972. - V. 22. - P. 327-374.
652. *Żytkow A.* On the stationary mass outflow from stars I. The computational method and results for $1 M_{\odot}$ star // Acta Astron. - 1972. - V. 22. - P. 103-139.
653. *Żytkow A.* On the stationary mass outflow from stars II. The results for $30 M_{\odot}$ star // Acta Astron. - 1973. - V. 23. - P. 121-134.

НЕКОТОРЫЕ КОНСТАНТЫ

$\pi = 3,1415926536$; $e = 2,7182818285$; $\lg e = 0,4342944819$;
1 радиан = $57,2957795131^\circ$.

Физические постоянные

Скорость света $c = 2,997925 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$
Постоянная тяготения $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-2}$
Постоянная Планка $\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} = \hbar/2\pi$
Заряд электрона $e = 4,80325 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЕ}$
Масса электрона $m_e = 9,10956 \cdot 10^{-28} \text{ г}$, $m_e c^2 = 0,511004 \text{ МэВ} = k \cdot 5,93013 \cdot 10^9 \text{ К}$
Физическая единица массы $m_u = (1/12) m_{^{12}\text{C}} = 1,660531 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, $m_u c^2 = 931,481 \text{ МэВ}$
Масса протона $m_p = 1,672661 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1,00727 m_u$
Масса нейтрона $m_n = 1,674911 \cdot 10^{-24} \text{ г}$
Постоянная Больцмана $k = 1,38062 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-1}$
Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = (137,036)^{-1}$
Классический радиус электрона $r_e = e^2/m_e c^2 = 2,81794 \cdot 10^{-13} \text{ см}$
Комптоновская длина волны электрона $\lambda_e = \hbar/m_e c = 3,861592 \cdot 10^{-11} \text{ см}$
Длина волны фотона с энергией 1 эВ $\lambda \text{ (1 эВ)} = 12398,54 \cdot 10^{-8} \text{ см}$
Частота фотона с энергией 1 эВ $\nu \text{ (1 эВ)} = 2,417965 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$
Энергия, соответствующая 1 эВ $E_0 \text{ (1 эВ)} = 1,602192 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$
Температура, соответствующая 1 эВ $T \text{ (1 эВ)} = 11604,8 \text{ К} = E_0/k$, $(E_0/k) \lg e = 5039,9 \text{ К}$
Постоянная плотности излучения $a = \frac{\pi^3 k^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7,56464 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}$
Постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = ac/4 = 5,66956 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$

Астрономические постоянные

1 астрономическая единица (а.е.) = $1,495979 \cdot 10^{13} \text{ см}$
1 парсек (пк) = $3,085678 \cdot 10^{18} \text{ см}$
1 световой год = $9,460530 \cdot 10^{17} \text{ см}$
Масса Солнца $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г}$
Радиус Солнца $R_\odot = 6,9599 \cdot 10^{10} \text{ см}$
Светимость Солнца $L_\odot = 3,826 \cdot 10^{33} \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}$
Масса Земли $M_\oplus = 5,976 \cdot 10^{27} \text{ г}$
Радиус Земли, экв. $R_{\oplus, \text{э}} = 6378,164 \text{ км}$
Масса Юпитера $M_{\text{ж}} = 317,83 M_\oplus$
Радиус Юпитера, экв $R_{\text{ж}} = 71300 \text{ км}$
Тропический год (от равноденствия до равноденствия) 1 год = $3,1556926 \cdot 10^7 \text{ с}$
Связь абсолютной болометрической звездной величины с полной светимостью:
 $M_{\text{bol}} = 4,74 - 2,5 \lg(L/L_\odot)$
Связь абсолютной (M) и видимой (m) звездных величин: $M = m + 5 - 5 \lg d_{\text{пк}}$
– $A_{\text{поглощения}}$ ($d_{\text{пк}}$ – расстояние до звезды в парсеках)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
ЧАСТЬ I	
ФИЗИКА ЗВЕЗДНОЙ МАТЕРИИ	5
Глава 1. Термодинамические свойства вещества	5
§ 1. Идеальный газ с излучением	5
§ 2. Релятивистский газ с учетом вырождения	11
§ 3. Уравнение состояния при наличии ядерного равновесия и процессов слабого взаимодействия	28
§ 4. Вещество при очень больших плотностях, нейтронизация, взаимодействие частиц	31
Глава 2. Лучистый перенос энергии. Теплопроводность	56
§ 5. Уравнение переноса энергии.	56
§ 6. Эддингтоновское приближение. Лучистая теплопроводность	59
§ 7. Непрозрачность: поглощение, рассеяние и электронная теплопроводность. Росселандово среднее	64
§ 8. Теплопроводность вещества при больших плотностях и температурах.	82
§ 9. Перенос излучения в движущихся средах	96
Глава 3. Конвекция	99
§ 10. Условия возникновения конвекции; путь перемешивания	99
§ 11. Нелокальное и нестационарное описание конвекции	104
§ 12. Численное моделирование конвекции	108
Глава 4. Ядерные реакции	110
§ 13. Скорости ядерных реакций	110
§ 14. Горение водорода, дейтерия и гелия	117
§ 15. Реакции с тяжелыми ядрами при высоких температурах	130
§ 16. Процессы образования тяжелых элементов	132
§ 17. Ядерные реакции в плотном веществе	141

Глава 5. Бета-процессы в звездах	153
§ 18. Основы теории слабого взаимодействия	153
§ 19. Нейтринное охлаждение звезд	184
§ 20. Нагрев вещества при неравновесных бета-процессах.	192
§ 21. Нейтринный перенос и нейтринная теплопроводность.	196

ЧАСТЬ II

ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД	201
---------------------------------	------------

Глава 6. Уравнения равновесия и звездной эволюции и методы их решения	201
§ 22. Сферически-симметричные звезды	201
§ 23. Равновесие вращающихся замагниченных звезд	213
§ 24. Эволюция вращающихся звезд.	222

Глава 7. Образование звезд	228
§ 25. Наблюдения областей звездообразования	228
§ 26. Сферически-симметричный коллапс межзвездных облаков	230
§ 27. Коллапс вращающихся облаков	239

Глава 8. Эволюция звезд до главной последовательности	244
§ 28. Стадия Хаяши	244
§ 29. Эволюция быстровращающихся звезд на стадии Гравитационного сжатия	250
§ 30. Модели истечения вещества из молодых звезд	259

Глава 9. Ядерная эволюция звезд.	273
§ 31. Источники неопределенности в эволюционных расчетах	273
§ 32. Эволюция звезд на спокойных стадиях горения	276
§ 33. Эволюция при наличии вырождения, тепловые вспышки.	306

Глава 10. Коллапс и сверхновые	329
§ 34. Модели предсверхновых.	330
§ 35. Взрывы при развитии тепловой неустойчивости вырожденных углеродных ядер	341
§ 36. Коллапс звездных ядер малой массы	345
§ 37. Гидродинамический коллапс ядер звезд	348
§ 38. Магниторотационная модель взрыва сверхновой	356

Глава 11. Последние стадии звездной эволюции.	364
§ 39. Белые карлики	365
§ 40. Нейтронные звезды.	381
§ 41. Черные дыры и аккреция	392

ЧАСТЬ III

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД	405
-------------------------------------	------------

Глава 12. Динамическая устойчивость.	405
§ 42. Иерархия характерных времен.	405
§ 43. Вариационный принцип и малые возмущения.	406
§ 44. Статические критерии устойчивости.	414
§ 45. Устойчивость звезды при наличии фазового перехода.	420

Глава 13. Тепловая устойчивость	428
§ 46. Эволюционные стадии проявления тепловых неустойчивостей	428
§ 47. Развитие тепловой неустойчивости в невырожденных слоевых источниках	433
Глава 14. Колебания звезд и устойчивость	438
§ 48. Собственные моды	438
§ 49. Колебания звезд с фазовым переходом	446
§ 50. Колебательная устойчивость массивных звезд	451
§ 51. О переменных звездах	456
Список литературы	458
Некоторые константы	482